Ecuaciones Exponenciales:

La incógnita se encuentra en el exponente. Para resolverlas aplicamos las siguientes propiedades:

Si tienen la misma base: igualamos los exponentes $\Rightarrow$ $a^b = a^c \to b = c$

Potencias : aplicamos sus propiedades para descomponer las ecuaciones exponenciales.

Producto : nos encontramos con una suma de exponentes, ponemos el producto $\Rightarrow$ $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

Cociente : nos aparece una resta de exponentes, ponemos el cociente $\Rightarrow$ $a^{b-c} = a^b : a^c$

Potencia de potencia: nos aparece un producto en el exponente, $\Rightarrow$ $a^{b\cdot c} = \left(a^b\right)^c$

Ecuaciones exponenciales que se reducen a ecuaciones de primer grado

1. $\mathbf{2^{x+1} = 8}$ $\Rightarrow$ $2^{x+1} = 2^3$ $\Rightarrow$ $x + 1 = 3$ $\Rightarrow$ $x = 2$

* Cuando tenemos un sólo término en ambos miembros de la ecuación, descomponemos en factores para conseguir la misma base. Igualamos los exponentes y resolvemos.

2. $\mathbf{2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7}$

1º Aplicamos las propiedades de las potencias, para descomponer. $\dfrac{2^x}{2} + 2^x + 2^x \cdot 2 = 7$

2º Para resolver mejor hacemos $2^x = t$ $\Rightarrow$ $\dfrac{t}{2} + t + 2t = 7 \Rightarrow t + 2t + 4t = 14 \Rightarrow 7t = 14 \to t = 2$

3º Como $2^x = t$ $\Rightarrow$ $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

3. $\mathbf{3^x + 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117}$

$$3^x + \frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3 = 117 \Rightarrow 3^x = t \Rightarrow t + \frac{t}{3} + 3t = 117 \Rightarrow 13t = 351 \Rightarrow t = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

Ecuaciones esponenciales que se reducen a ecuaciones de segundo grado.

1. $\mathbf{2^{x+3} + 4^{x+1} - 320 = 0}$

1º. – Aplicamos las propiedades de las potencias y sustituimos $2^x = t$

$$2^x \cdot 2^3 + \left(2^2\right)^{x+1} - 320 = 0 \quad \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + \left(2^x\right)^2 \cdot 2^2 - 320 = 0 \qquad 8t + 4t^2 - 320 = 0 \Rightarrow$$

2º. – Resolvemos la ecuación de segundo grado para obtener los valores de t. Finalmente calculamos x.

$$t^2 + 2t - 80 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 8 & \to \quad 2^x = t \to 2^x = 8 \to 2^x = 2^3 \to x = 3 \\ t_2 = -10 & \to \quad \text{no tiene solución.} \end{cases}$$

2. $\mathbf{5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0}$

$$\left(5^x\right)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \quad \Rightarrow 5^x = t \quad \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 & \Rightarrow 5^x = 5 \quad \Rightarrow x = 1 \\ t_2 = 1 & \Rightarrow 5^x = 1 \quad \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones Logarítmicas:

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$\log_a N + \log_a M = \log_a N \cdot M$

$\log_a N - \log_a M = \log_a N/M \quad \Rightarrow \quad$ Y la relación $\boxed{\log A = \log B \Leftrightarrow A = B}$

$m \cdot \log_a N = \log_a N^m$

Ejemplos

a) $\mathbf{\log x + \log 20 = 3}$

El logaritmo de la suma se transforma en producto.

Hacemos SHIFT log 3 = 1000. Relación y resolvemos.

$\log x + \log 20 = 3 \Leftrightarrow \log 20 \cdot x = \log 1000$

$20x = 1000 \Rightarrow x = 50$

Solución: $x = 50$

b) $\mathbf{\log x^3 = \log 6 + 2\log x}$

$\log x^3 = \log 6 + \log x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \log x^3 = \log 6x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 = 0$

$x^2(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ no es solución de la ecuación logarítmica. No existe log 0.} \\ x_2 = 6 \text{ es solución.} \end{cases}$

Solución: $x = 6$

c) $\mathbf{2\log x = \log(10 - 3x)}$

$2\log x = \log(10 - 3x) \quad \Leftrightarrow \log x^2 = \log(10 - 3x) \quad \Rightarrow x^2 = 10 - 3x$

$x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$

Comprobamos si las soluciones tienen sentido, sustituyendo en la ecuación logarítmica.

$x_1 = 2 \quad \Rightarrow 2\log 2 = \log(10 - 3 \cdot 2) \quad \Rightarrow 2\log 2 = \log 4 \quad \Rightarrow 2\log 2 = 2\log 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ es solución

$x_2 = -5 \quad \Rightarrow 2\log(-5)$. El log (-5) no tiene sentido. $\Rightarrow \quad x = -5$ no es solución.

Solución: $x = 2$

d) $\mathbf{\log 4 + 2\log(x - 3) = \log x}$

$\log\left[4 \cdot (x-3)^2\right] = \log x \Leftrightarrow 4 \cdot \left(x^2 - 6x + 9\right) = x$

$4x^2 - 25x + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow \log 4 + 2\log 1 = \log 4 \quad \Rightarrow x = 4 \text{ es solución.} \\ x_2 = \dfrac{9}{4} \rightarrow \log 4 + 2\log \underbrace{\left(\dfrac{9}{4} - 3\right)}_{\text{negativo}} = \log\dfrac{9}{4} \quad \Rightarrow x = \dfrac{9}{4} \text{ no es solución} \end{cases}$

Solución: $x = 4$

1 Resolver las ecuaciones exponenciales:

1 $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

2 $\sqrt[3]{8^x} = 65536$

3 $4^{x^2-6x} = 16384$

4 $4^{\sqrt{x+1}} - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0$

5 $3^{x^2-1} = 134$

6 $2^{2x} \cdot 2 = 3^x \cdot 3^5$

7 $3^x \cdot 5^{2x} = 150$

2 Efectuar las ecuaciones exponenciales:

1 $3^{1-x} - 3^x = 2$

2 $2^{4x} - 2^{2x} - 12 = 0$

3 $e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$

4 $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + \cdots + 2^x = \frac{127}{8}$

3 Resolver los sistemas de ecuaciones exponenciales:

1 $\begin{cases} \dfrac{2^{2x-3}}{2^{3y+2}} = 2^8 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^{x-1} - 2^{y-2} = 1 \end{cases}$

4 Resolver las ecuaciones logarítmicas:

1 $4\log\left(\frac{x}{5}\right) + \log\left(\frac{525}{4}\right) = 2\log x$

2 $2\log x - 2\log(x+1) = 0$

3 $\log x = \frac{2 \quad \log x}{\log x}$

4 $\log(25 - x^3) - 3\log(4 - x) = 0$

5 $\frac{\log(125 - x^2)}{\log(5 - x)} = 3$

5 Resolver los sistemas de ecuaciones logarítmicas:

1 $\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{cases}$

2 $\begin{cases} \log x + \log y = \log 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - 2\log y = -1 \end{cases}$