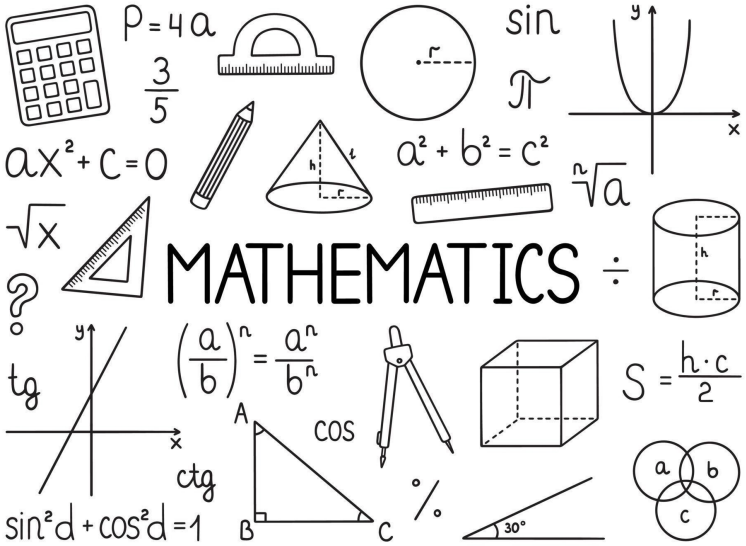



**Caderno de Matemática 4 ESO (Parte 1)**

**Nome: _____**

**Grupo: ____**

# 1 Números reales

## INTRODUCCIÓN

Los conceptos que se estudian en esta unidad ya han sido tratados en cursos anteriores. A pesar de ello, es importante volverlos a repasar, pues los alumnos suelen cometer errores al operar con este tipo de números.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *número* es el resultado de sumar los valores de posición de sus cifras.
- El *máximo común divisor* (*m.c.d.*) de dos números es el mayor de sus divisores comunes.
- El *mínimo común multiplo* (*m.c.m.*) de dos números es el menor de sus múltiplos comunes.
- *Truncar* las cifras decimales de un número hasta un orden determinado consiste en cambiar por ceros las cifras que vienen a continuación de dicho orden.
- *Redondear* un número decimal es estimar si se suma o no una unidad a la cifra que ocupa la posición a la que se va a redondear el número.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Reconocer el valor de cada una de las cifras de un número. | • Valor de cada cifra en función de la posición que ocupa.<br>• Expresión polinómica de un número. | • Identificación de la posición que ocupa cada cifra en un número y su valor.<br>• Desarrollo de un número en forma polinómica. |
| **2.** Hallar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos números. | • Máximo común divisor (m.c.d.) de dos números. | • Obtención de los divisores de dos números y selección del mayor divisor común. |
| **3.** Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números. | • Mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números. | • Obtención de los primeros múltiplos de dos números y selección del menor múltiplo común. |
| **4.** Representar y operar con números enteros. | • Representación de los números enteros.<br>• Valor absoluto de un número entero.<br>• Operaciones con números enteros. | • Localización de números enteros sobre las divisiones de una recta.<br>• Obtención del valor absoluto de números enteros.<br>• Operaciones con números enteros. |
| **5.** Representar y operar con números racionales. | • Representación de los números racionales.<br>• Operaciones con números racionales. | • Localización de números fraccionarios entre números enteros (divisiones de una recta).<br>• Operaciones con fracciones. |
| **6.** Expresar un número decimal en forma de fracción. | • Transformación de un número decimal en una fracción. | • Transformaciones de números decimales en fracciones. |
| **7.** Aproximar un número decimal. | • Aproximación por truncamiento y redondeo. | • Truncamiento y redondeo de un número decimal hasta un orden. |
| **8.** Calcular el error que cometemos al aproximar un número decimal. | • Error absoluto.<br>• Cota o margen de error.<br>• Error relativo. | • Obtención de los errores absoluto y relativo al aproximar un número decimal.<br>• Determinación de la cota de error. |

# 1 OBJETIVO 1
## RECONOCER EL VALOR DE CADA UNA DE LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

En un número, el **valor** de cada cifra depende de la **posición** que ocupe.
Una cifra escrita a la izquierda de otra cifra representa unidades de un orden inmediato superior.

**EJEMPLO**

En el número 3.125.479,275:

3 representa las unidades de millón.
1 representa las centenas de millar.
2 representa las decenas de millar.
5 representa las unidades de millar.
4 representa las centenas.
7 representa las decenas.
9 representa las unidades.
2 representa las décimas.
7 representa las centésimas.
5 representa las milésimas.

**EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO**
Un número es el resultado de sumar los valores de posición de cada una de sus cifras.

**EJEMPLO**

$$\mathbf{3.025.079} = 3 \cdot 10^6 + ... + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + ... + 7 \cdot 10 + 9$$
$$\mathbf{35{,}012} = 3 \cdot 10 + 5 + ... + 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

La cifra 0 no aporta valor al número, independientemente de la posición que ocupe.

**1** **Identifica las cifras y escribe en forma polinómica los siguientes números.**

a) 83 — 8 → decenas — 3 → unidades

$83 = 8 \cdot 10 + 3$

b) 511,3 — 5 → centenas — 1 → decenas
1 → _____ — 3 → décimas

$511{,}3 = 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 1 + 3 \cdot 10^{-1}$

c) 2.305,74
2 → unidades de millar — 3 → centenas — 0 → _____
5 → _____ — 7 → _____ — 4 → centésimas

$2.305{,}74 = 2 \cdot 10^3 + ____ + ____ + 7 \cdot ____ + 4 \cdot 10^{-2}$

d) 3.003.303,303
3 → unidades de millón — 3 → unidades de millar — 3 → centenas
3 → unidades — 3 → décimas — 3 → milésimas

$3.003.303{,}303 = 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot ____ + 3 \cdot ____ + 3 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot ____$

OBJETIVO 2

# HALLAR EL MÁXIMO COMÚN DIVISOR (m.c.d.) DE DOS NÚMEROS



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El máximo común divisor de dos números es el **mayor** de sus **divisores comunes**.

## EJEMPLO

Sean los números 12 y 42. Sus divisores son:

Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
Div (42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

Divisores comunes = {1, 2, 3, **6**}

Luego el máximo común divisor de 12 y 42 es: m.c.d. (12, 42) = 6

**¿Cómo lo vamos a hallar?**

Para hallar el máximo común divisor de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en sus **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** de ambos, elevados al **menor exponente**.

## EJEMPLO

| | |
|---|---|
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

$12 = 2^2 \cdot 3$

| | |
|---|---|
| 42 | 2 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

m.c.d. (12, 42) = $2 \cdot 3 = 6$

**1** **Halla el máximo común divisor de estos números, descomponiendo en factores primos.**

a) 21 y 105

| | |
|---|---|
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$21 = 3 \cdot 7$ $\quad$ $105 = 3 \cdot \square \cdot \square$

m.c.d. (21, 105) = $\square \cdot \square = 21$

b) 33 y 44

| | |
|---|---|
| 33 | 3 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 44 | — |
| — | — |
| 11 | — |
| 1 | |

$33 = 3 \cdot \square$ $\quad$ $44 = 2^2 \cdot \square$

m.c.d. (33, 44) = 11

c) 60 y 210

| | |
|---|---|
| 60 | 2 |
| — | — |
| — | — |
| — | — |

| | |
|---|---|
| 210 | 2 |
| — | — |
| — | — |
| — | — |

$60 = 2^2 \cdot \square \cdot \square$ $\quad$ $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. (60, 210) = $\square \cdot \square \cdot \square = 30$

d) 45 y 80

| | |
|---|---|
| 45 | 3 |
| 15 | — |
| — | — |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 80 | — |
| — | — |
| — | — |
| — | — |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$45 = 3^2 \cdot \square$ $\quad$ $80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.d. (45, 80) = 5

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 1 OBJETIVO 3
## HALLAR EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.) DE DOS NÚMEROS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El mínimo común múltiplo de dos números es el **menor** de sus **múltiplos comunes**.

**EJEMPLO**

Sean los números 12 y 42. Sus múltiplos son: Múltiplos de 12 = {0, 12, 24, 36, 48, 60, **84**, 96, ...}

Múltiplos de 42 = {0, 42, **84**, 126, ...}

Luego el mínimo común múltiplo de 12 y 42 es: m.c.m. (12, 42) = 84

**¿Cómo lo vamos a hallar?**

Para hallar el mínimo común múltiplo de dos números seguimos estos pasos.

1.º Descomponemos los dos números en **factores primos**.

2.º Multiplicamos los factores primos **comunes** y **no comunes** a ambos que estén elevados al **mayor exponente**.

**EJEMPLO**

| | |
|---|---|
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

$12 = 2^2 \cdot 3$

| | |
|---|---|
| 42 | 2 |
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

m.c.m. $(12, 42) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

**1** **Halla el mínimo común múltiplo de estos números, descomponiendo en factores primos.**

a) 21 y 105

| | |
|---|---|
| 21 | 3 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 105 | 3 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

$21 = \square \cdot \square$ $105 = \square \cdot \square \cdot \square$

m.c.m. $(21, 105) = \square \cdot \square \cdot \square = 105$

b) 33 y 88

| | |
|---|---|
| 33 | 3 |
| 11 | 11 |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 88 | 2 |
| 44 | __ |
| __ | __ |
| 11 | __ |
| 1 | |

$33 = 3 \cdot \square$ $88 = 2^3 \cdot \square$

m.c.m. $(33, 88) = \square \cdot \square \cdot \square = 264$

c) 60 y 210

| | |
|---|---|
| 60 | __ |
| 30 | __ |
| 15 | __ |
| 5 | __ |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 210 | __ |
| 105 | __ |
| 35 | __ |
| 7 | __ |
| 1 | |

$60 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $210 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.m. $(60, 210) = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = 420$

d) 45 y 80

| | |
|---|---|
| 45 | 3 |
| 15 | __ |
| __ | __ |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 80 | __ |
| __ | __ |
| __ | __ |
| __ | __ |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$45 = 3^2 \cdot \square$ $80 = 2^4 \cdot \square$

m.c.m. $(45, 80) = \square \cdot \square \cdot \square = 720$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 253

OBJETIVO 4

# REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS ENTEROS



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Representamos los números enteros positivos y negativos sobre una recta dividida en intervalos de la misma longitud.

## EJEMPLO

**Representa y ordena, de menor a mayor, los siguientes números enteros: 7, –1, –3, 5, 0, 1, 5, –7 y 2.**

Los representamos sobre la recta:

Su ordenación es inmediata: $-7 < -3 < -1 < 0 < 1 < 2 < 5 < 7$

**1** **Representa y ordena estos números enteros: –4, –5, 4, 5, –2, 2, –7 y 7.**

**2** **Indica el signo < (menor que) o > (mayor que), según corresponda en cada caso.**

a) $-5 > -7$
b) $0 \square 9$
c) $5 \square 7$
d) $-5 \square -1$
e) $-3 \square 0$
f) $4 \square 1$

**VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO**

- El valor absoluto de un entero positivo es él mismo: $|3| = 3$, $|0| = 0$
- El valor absoluto de un entero negativo es su opuesto: $|-3| = 3$, $|-15| = 15$

**3** **Opera y halla el valor absoluto de los números enteros.**

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$
b) $|3 - 7 + 2 - 5| = |\square| = \square$
c) $|(-1) \cdot (4 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$
d) $|(2 - 3) \cdot (7 - 5)| = |(-1) \cdot (\square)| = |\square| = \square$
e) $|(-4) : (7 - 8)| = |(-4) : (\square| = |\square| = \square$

**4** **Efectúa las siguientes operaciones con números enteros.**

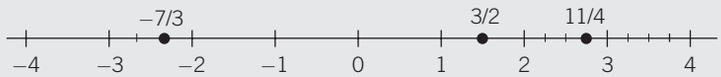
a) $[(-2)^2 + 2^3] : (-2) = [\square + \square] : (-2) = \square : (-2) = -6$
b) $3 \cdot [1 - 4 + 2] - (-3) \cdot [5 - (7 - 3)] = 3 \cdot (\square) - (-3) \cdot [5 - \square] = \square + \square = \square$
c) $[(-2)^2 \cdot 6^2] : 3^2 = [4 \cdot 36] : 9 = \square : 9 = 16$
d) $|(-1) \cdot 3 - 2 \cdot (-3 + 5)| = |(-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2| = |-\square - \square| = |\square| = 7$
e) $|[(-5 + 3) \cdot 5] : (2 - 7)| = |[(-2) \cdot 5] : (-5)| = |(\square) : (-5)| = 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 1 OBJETIVO 5
## REPRESENTAR Y OPERAR CON NÚMEROS RACIONALES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Representamos los números racionales sobre una recta, en la que los números fraccionarios están comprendidos entre los números enteros.



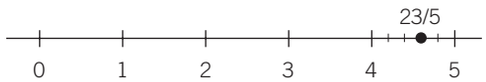

Para ver cómo se representa un número fraccionario mostramos un ejemplo. Así, para representar el número $\frac{138}{30}$ seguimos estos pasos.

1.º Simplificamos la fracción hasta obtener su fracción irreducible: $\frac{138}{30} = \frac{69}{15} = \frac{23}{5}$

2.º Calculamos la parte entera y la parte decimal: $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$

3.º Tomamos sobre la recta el intervalo formado por los dos números enteros entre los que está comprendido el número, en este caso [4, 5], y lo dividimos en un número de partes igual que el denominador de la fracción, en este caso, en 5 partes.

Marcamos desde el número 4 tantas partes como indique el numerador, en este caso 3:




**1 Representa los siguientes números fraccionarios.**

a) $\frac{540}{900}$

1.º Simplificamos: $\frac{540}{900} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{5}$

2.º Calculamos: $\frac{3}{5} = 0 + \frac{\quad}{\quad}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, 1].
Lo dividimos en 5 partes iguales.
Marcamos 3 partes e indicamos la posición.

b) $\frac{420}{180}$

1.º Simplificamos: $\frac{420}{180} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{7}{3}$

2.º Calculamos: $\frac{7}{3} = 2 + \frac{\quad}{\quad}$

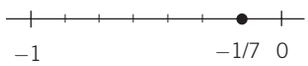
3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [2, 3].
Lo dividimos en 3 partes iguales.
Marcamos 1 parte e indicamos la posición.

c) $-\frac{210}{1.470}$

1.º Simplificamos: $-\frac{210}{1.470} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{1}{7}$

2.º Calculamos: $-\frac{1}{7} = 0 - \frac{1}{7}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, –1], y representamos la fracción.



829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 255

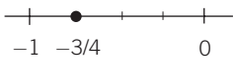


d) $-\dfrac{450}{600}$

1.º Simplificamos: $-\dfrac{450}{600} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{\quad}{\quad} = -\dfrac{3}{4}$

2.º Calculamos: $-\dfrac{3}{4} = 0 - \dfrac{3}{4}$

3.º Señalamos sobre la recta el intervalo [0, −1] y representamos la fracción.




**SUMA (O RESTA) DE NÚMEROS RACIONALES**

Para sumar (o restar) fracciones con **distinto** denominador, las reducimos a **común** denominador y luego sumamos sus numeradores.

**EJEMPLO**

**Efectúa:** $\dfrac{3}{5} - 2 + \dfrac{17}{3}$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores: m.c.m. (3, 5) = 15

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9}{15} \qquad 2 = \frac{2 \cdot 15}{15} = \frac{30}{15} \qquad \frac{17}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15}$$

$$\frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{3} = \frac{9}{15} - \frac{30}{15} + \frac{85}{15} = \frac{9 - 30 + 85}{15} = \frac{64}{15}$$

**2** **Realiza las siguientes operaciones.**

a) $4 - \dfrac{5}{3} - \dfrac{3}{2}$ m.c.m. (2, 3) =

$$4 = \frac{4 \cdot \square}{\square} \qquad \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot \square}{3 \cdot \square} = \frac{\square}{\square} \qquad \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot \square}{2 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$4 - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad - \quad - \quad}{\quad} = \frac{5}{6}$$

b) $\dfrac{5}{2} - \left[1 - \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4}\right)\right]$ m.c.m. (3, 4) = 12

Efectuamos primero la suma del paréntesis:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot \square}{12} + \frac{1 \cdot \square}{12} = \frac{\square + \square}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{5}{2} - \left[1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{5}{2} - \left[1 - \frac{11}{12}\right] = \frac{5}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5 \cdot \square}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\square - \square}{12} = \frac{29}{12}$$

c) $3 - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right)$ m.c.m. (3, 5) = 15

Efectuamos primero la resta del paréntesis:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot \square}{15} - \frac{1 \cdot \square}{15} = \frac{\square - \square}{15} = \frac{2}{15}$$

$$3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot \square}{15} - \frac{2}{15} = \frac{43}{15}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 1

**PRODUCTO (O COCIENTE) DE NÚMEROS RACIONALES**

- Para multiplicar dos fracciones, efectuamos el producto de los numeradores y lo dividimos entre el producto de los denominadores.
- Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

**EJEMPLO**

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{5}{21}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} : \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{7}{15}$$

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} : \mathbf{3} = \frac{2}{5} : \frac{3}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$$

**3** **Efectúa las siguientes operaciones.**

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{\square \cdot (\square) \cdot \square}{\square \cdot \square \cdot \square} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}\right) : \frac{(-3)}{7} = \left(\frac{\square}{\square}\right) \cdot \frac{7}{(-3)} = \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot (-3)} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\left[3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\right] : \left[(-5) : \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{\square \cdot (-2)}{\square}\right] : \left[(-5) \cdot \frac{2}{1}\right] = \left(\frac{\quad}{\quad}\right) : \left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \left(\frac{\quad}{\quad}\right) \cdot \left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \frac{3}{100}$

d) $\left(\frac{1}{3} : \frac{5}{7}\right) \cdot \left(7 : \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5}\right) \cdot \left(7 \cdot \frac{2}{1}\right) = \left(\frac{\quad}{\quad}\right) \cdot \left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \frac{\quad}{\quad}$

**POTENCIA DE UNA FRACCIÓN**

Para elevar una fracción a una potencia, se elevan el numerador y el denominador a dicha potencia.

**EJEMPLO**

$$\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{3}} = \frac{(-3)^3}{5^3} = \frac{-27}{125}$$

**4** **Haz estas operaciones.**

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\square - \square}{200} = \frac{\quad -}{200} = \frac{667}{200}$

b) $5 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 5 - \frac{1}{\quad} = \frac{\quad -}{27} = \frac{134}{27}$

c) $3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 + \frac{\quad}{\quad} - \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad + \quad -}{36} = \frac{113}{36}$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 257



**OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS RACIONALES**

La jerarquía de las operaciones es:

- Primero se hacen las operaciones de los paréntesis.
- Después, se calculan las potencias, si las hubiera.
- A continuación, se efectúan las multiplicaciones y divisiones.
- Por último, se resuelven las sumas y restas.
- Siempre se opera respetando el orden en que están escritas las operaciones, de izquierda a derecha.

**EJEMPLO**

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)$$

Hay dos bloques, con los que debemos operar por separado:

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{5}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{15}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$$

$$3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 7\cdot 2}{7\cdot 2}-\frac{1\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{1\cdot 7}{2\cdot 7}=\frac{42}{14}-\frac{2}{14}+\frac{7}{14}=\frac{42-2+7}{14}=\frac{47}{14}$$

Operamos y simplificamos:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right):\left(3-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{10}:\frac{47}{14}=\frac{17\cdot 14}{10\cdot 47}=\frac{238}{470}=\frac{119}{235}$$

**5** **Efectúa las operaciones.**

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{7-4}\right]=\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3=0$

b) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{+}{3}\right)-\left(\frac{+}{4}\right)+\left(\frac{-}{12}\right)=\frac{}{}-\frac{}{}+\frac{}{}=$

$$=\frac{-\quad+}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

c) $\dfrac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}=\dfrac{\frac{+}{7}}{\frac{+}{14}}=\frac{}{7}\cdot\frac{14}{}=\frac{308}{70}=\frac{154}{35}=\frac{22}{5}$

d) $\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+\left(3-\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{5}\right)=\frac{}{}+\frac{}{2}-\frac{}{5}=\frac{+\quad-}{30}=-\frac{16}{30}$

e) $\left(2-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right):\left(4-\frac{2}{3}\right)=\frac{}{5}\cdot\frac{}{2}:\frac{}{3}=\frac{}{5}\cdot\frac{}{2}\cdot\frac{3}{}=\frac{189}{100}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 1 OBJETIVO 6
## EXPRESAR UN NÚMERO DECIMAL EN FORMA DE FRACCIÓN Y VICEVERSA

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Para expresar un número fraccionario en **forma decimal** y viceversa se divide el numerador entre el denominador.

**EJEMPLO**

**a)** $\frac{49}{20} = 2{,}45 \rightarrow$ decimal exacto

**b)** $\frac{86}{11} = 7{,}8181... = 7{,}\widehat{81} \rightarrow$ decimal periódico puro

**c)** $\frac{87}{66} = 1{,}31818... = 1{,}3\widehat{18} \rightarrow$ decimal periódico mixto

Para pasar un número en forma decimal a fracción y viceversa, operamos de manera diferente en cada uno de los tres casos anteriores.

**EJEMPLO**

**a) Decimal exacto:**

$$2{,}4625 = \frac{24.625}{10.000} = \frac{4.925}{2.000} = \frac{985}{400} = \frac{197}{80}$$

**b) Decimal periódico puro:**

Se resta la parte entera

$$3{,}\widehat{45} = \frac{345 - 3}{99} = \frac{342}{99} = \frac{114}{33} = \frac{38}{11}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica

Cifras de la parte entera y la parte decimal no periódica

**c) Decimal periódico mixto:**

$$3{,}21\widehat{7} = \frac{3.217 - 321}{900} = \frac{2.896}{900} = \frac{1.448}{450} = \frac{724}{225}$$

Se ponen tantos 9 como cifras tenga la parte periódica y tantos 0 como cifras tenga la parte anteperiódica

**1** **Obtén la fracción generatriz de los siguientes números.**

a) $0{,}87 = \frac{87}{100}$

b) $0{,}\widehat{3} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{3}$

c) $3{,}15\widehat{27} = \frac{31.527 - 315}{9.900} =$

$= \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $2{,}\widehat{45} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{27}{11}$

e) $0{,}0\widehat{15} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{1}{66}$

f) $-235{,}75 = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad} = -\frac{\quad}{\quad}$

g) $6{,}\widehat{2} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

OBJETIVO 7

# APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL



Para **truncar** las cifras decimales de un número hasta un orden determinado eliminamos las cifras que vienen a continuación de dicho orden.

**EJEMPLO**

5,751 truncado a las décimas es 5,7.
0,837 truncado a las centésimas es 0,83.
12,3146 truncado a las milésimas es 12,314.

**1** **Trunca los números decimales a la cifra de las décimas, centésimas y milésimas.**

| | a) 0,2765 | b) 12,34 | c) 8,7521 | d) 361,4938 |
|---|---|---|---|---|
| | 0,2 | _____ | _____ | _____ |
| | 0,27 | _____ | _____ | _____ |
| | 0,276 | _____ | _____ | _____ |

Para **redondear** un número decimal hasta un orden determinado vemos si la cifra del siguiente orden es menor que 5 o mayor o igual que 5 y, en función de eso, dejamos la cifra anterior como está o la incrementamos en una unidad.

**EJEMPLO**

5,751 redondeado a las décimas es 5,8.
0,837 redondeado a las centésimas es 0,84.
12,3146 redondeado a las milésimas es 12,315.

**2** **Redondea los números decimales a las décimas, centésimas y milésimas.**

| | a) 0,2765 | b) 12,3453 | c) 8,7521 | d) 361,4932 |
|---|---|---|---|---|
| | 0,3 | _____ | _____ | _____ |
| | 0,28 | _____ | _____ | _____ |
| | 0,277 | _____ | _____ | _____ |

**3** **Efectúa las operaciones con números decimales, y redondea el resultado a las centésimas.**

a) $(1{,}367 + 4{,}875) \cdot 2 =$ _____ $\cdot 2 =$ _____ $= 12{,}48$

b) $(3{,}642 - 2{,}485) - (9{,}675 + 1{,}476) =$ _____ $-$ _____ $=$ _____ $= -9{,}99$

c) $\left(\dfrac{43{,}764}{2{,}15} \cdot 3{,}831\right) - \left(\dfrac{74{,}772}{13{,}57} \cdot 5{,}63\right) =$ _____ $-$ _____ $= 46{,}959 = 46{,}96$

d) $\sqrt{37} - \sqrt{22} =$ _____ $-$ _____ $=$ _____ $= 1{,}39$

e) $\dfrac{35{,}732 - 20{,}189}{63{,}562 - 18{,}987} =$ _____ $= 0{,}349 = 0{,}35$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 1 OBJETIVO 8
## CALCULAR EL ERROR QUE COMETEMOS AL APROXIMAR UN NÚMERO DECIMAL

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El **error absoluto** que cometemos al aproximar un número decimal es igual al valor absoluto de la diferencia entre el número dado y el número aproximado. Se representa por $E_a$.

**EJEMPLO**

**Sea el número 3,5765. ¿Qué error absoluto se comete al aproximarlo a las centésimas?**

Podemos aproximar el número de dos maneras: truncándolo o redondeándolo.

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57, y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

Si lo redondeamos a las centésimas, el número es 3,58, y el error absoluto sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}58| = 0{,}0035$$

Como el error cometido al redondear es menor, esta forma de aproximación es mejor que el truncamiento.

**1** **Calcula el error que cometemos al aproximar los siguientes números decimales a las milésimas.**

a) 35,3277

Por truncamiento queda 35,327.

$E_a = |35{,}3277 - _____| = 0{,}0007$

Por redondeo queda 35,328.

$E_a = |_____ - 35{,}3277| = 0{,}0003$

b) 107,8912

Por truncamiento queda: _____

$E_a = |107{,}8912 - _____| = 0{,}0002$

Por redondeo queda: _____

$E_a = |107{,}8912 - _____| = 0{,}0002$

El máximo error absoluto que cometemos al hacer una aproximación se llama **cota** o **margen de error**.

**EJEMPLO**

Al hallar con la calculadora el valor de $\sqrt{3}$, obtenemos:

$$\sqrt{3} = 1{,}7320508$$

Pero esta es una aproximación por redondeo que hace la calculadora a 7 cifras decimales, por lo que no es el valor exacto de $\sqrt{3}$.

Como no podemos hallar el error absoluto, al no conocer el valor exacto, vamos a calcular una cota del error absoluto cometido. Si aproximamos, por ejemplo, a las centésimas:

$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$

El error que cometemos será menor o, como máximo, igual que la diferencia entre 1,73 y 1,74, es decir: $1{,}74 - 1{,}73 = 0{,}01$.

Así, resulta que 0,01 es una cota del error cometido al aproximar $\sqrt{3}$ a las centésimas.

**2** **Halla una cota de error al aproximar $\sqrt{3}$ a las milésimas.**

$1{,}73\mathbf{2} < \sqrt{3} < 1{,}73\mathbf{3}$

$1{,}73\mathbf{3} - 1{,}73\mathbf{2} = _____$

**3** **Obtén la cota de error al aproximar los números a las décimas y a las centésimas.**

a) $\frac{3}{7}$ $\qquad \frac{3}{7} = 0{,}42857\ldots$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$0{,}4 < \frac{3}{7} < ____$$

luego la cota de error será:

$$0{,}5 - 0{,}4 = ____$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$0{,}42 < \frac{3}{7} < ____$$

luego la cota de error será:

$$0{,}43 - 0{,}42 = ____$$

b) $\frac{3}{11}$ $\qquad \frac{3}{11} = 0{,}272727$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$0{,}2 < \frac{3}{11} < ____$$

luego la cota de error será:

$$0{,}3 - 0{,}2 = ____$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$0{,}27 < \frac{3}{11} < ____$$

luego la cota de error será:

$$0{,}28 - 0{,}27 = ____$$

c) $2{,}3\widehat{5}$ $\qquad 2{,}3\widehat{5} = 2{,}35555\ldots$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$2{,}3 < 2{,}3\widehat{5} < ____$$

luego la cota de error será:

$$_____ - _____ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$2{,}35 < 2{,}3\widehat{5} < ____$$

luego la cota de error será:

$$2{,}36 - 2{,}35 = 0{,}01$$

d) $\sqrt{7}$ $\qquad \sqrt{7} = 2{,}64575$

Para la aproximación a las **décimas**:

$$2{,}6 < \sqrt{7} < ____$$

luego la cota de error será:

$$_____ - _____ = 0{,}1$$

Para la aproximación a las **centésimas**:

$$2{,}64 < \sqrt{7} < ____$$

luego la cota de error será:

$$2{,}65 - 2{,}64 = 0{,}01$$

El **error relativo** que cometemos al aproximar un número decimal es el cociente entre su error absoluto y el valor exacto de dicho número. Se representa por $\boldsymbol{E_r}$.

**EJEMPLO**

**Sea el número 3,5765. ¿Qué error relativo se comete al aproximarlo por truncamiento a las centésimas? ¿Y a las milésimas?**

Si lo truncamos a las centésimas, el número es 3,57, y el error absoluto $E_a$ sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}57| = 0{,}0065$$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0065}{3{,}5765}\right| = 0{,}001817$

Si lo truncamos a las milésimas, el número es 3,576, y el error absoluto $E_a$ sería:

$$E_a = |3{,}5765 - 3{,}576| = 0{,}0005$$

El error relativo, en este caso, es: $E_r = \left|\frac{0{,}0005}{3{,}5765}\right| = 0{,}000139$

Otra forma de expresar el error relativo es mediante el tanto por ciento:

Para las centésimas: $E_r = 0{,}001817 = 0{,}18\,\%$ $\qquad$ Para las milésimas: $E_r = 0{,}000139 = 0{,}01\,\%$

Observa que, en ambos casos, hemos redondeado el error, para expresar el tanto por ciento (%) con dos cifras decimales.

# 1

**4** **Halla el error relativo que cometemos al aproximar por truncamiento a las centésimas.**

a) $\frac{5}{7}$ $\qquad \frac{5}{7} = 0{,}71428$

El error absoluto será:

$E_a = |0{,}71428 - 0{,}71| =$ _____

El error relativo será:

$E_r = \left|\frac{0{,}00428}{0{,}71428}\right| = 0{,}005992 = 0{,}60\,\%$

b) $\frac{7}{9}$ $\qquad \frac{7}{9} = 0{,}77777$

El error absoluto será:

$E_a = |0{,}77777 - 0{,}77| =$ _____

El error relativo será:

$E_r = \left|\frac{0{,}00777}{0{,}77777}\right| = 0{,}00999 = 1\,\%$

c) $3{,}87\widehat{5}$ $\qquad 3{,}87\widehat{5} = 3{,}87555\ldots$

El error absoluto será:

$E_a = |3{,}87555 - 3{,}87| = 0{,}00555$

El error relativo será:

$E_r = \left|\frac{0{,}00555}{3{,}87555}\right| = 0{,}001432 =$ _____ %

d) $\sqrt{7}$ $\qquad \sqrt{7} = 2{,}64575$

El error absoluto será:

$E_a = |2{,}64575 - 2{,}64| = 0{,}00575$

El error relativo será:

$E_r = \left|\frac{0{,}00575}{2{,}64575}\right| = 0{,}00217 =$ _____ %

**5** **Al medir varias veces con una cinta métrica, graduada en centímetros, la altura de un compañero de clase, hemos obtenido los siguientes valores.**

| **MEDIDAS** | 177 | 173 | 175 | 174 | 177 | 174 | 174 | 173 | 175 | 172 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Calcula la media de estas medidas y el error relativo cometido.**

El valor medio de estas medidas será:

$$\text{altura media} = \frac{177 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{10} = \frac{1.744}{10} = 174{,}4 \text{ cm}$$

El error absoluto cometido en cada una de las medidas lo obtenemos restando la media de cada medida y obteniendo su valor absoluto:

| **MEDIDAS** | 177 | 173 | 175 | 174 | 177 | 174 | 174 | 173 | 175 | 172 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ERROR ABSOLUTO** | $\lvert 177 - 174{,}4 \rvert = 2{,}6$ | $\lvert 173 - 174{,}4 \rvert = 1{,}4$ | 0,6 | 0,4 | 2,6 | 0,4 | 0,4 | 1,4 | 0,6 | 2,4 |

La media de los errores absolutos será:

$$\frac{2{,}6 + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{10} = \frac{12{,}8}{10} = 1{,}28 = 1{,}3$$

La altura del compañero es: $174{,}4 \pm 1{,}3$ cm, y el error relativo cometido es:

$$\left|\frac{1{,}3}{174{,}4}\right| = 0{,}00745 = 0{,}75\,\%$$

# 2 Potencias y radicales

## INTRODUCCIÓN

Los alumnos ya han trabajado con potencias de exponente positivo y han efectuado multiplicaciones y divisiones de potencias y potencias de potencias.

En esta unidad se introducen las potencias de exponentes negativos y fraccionarios. Es importante insistir en que cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente positivo.

La notación científica sirve para expresar números muy grandes o muy pequeños, y será tratada en esta unidad. Los alumnos aprenderán a realizar las cuatro operaciones fundamentales con números expresados en esta forma.

Por último, se trabajará con radicales expresados en forma de potencia.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un número *a,* llamado *base*, elevado a un *exponente n* es igual al resultado de multiplicar *a* por sí mismo *n* veces: $a^n$.
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\quad a^n : a^m = a^{n-m}$

  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- Un número en *notación científica* es un número entero o decimal, con una sola cifra entera (del 1 al 9), multiplicado por una potencia de base 10.
- *Orden de magnitud* de un número expresado en notación científica es el exponente de la potencia de base 10.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Operar con potencias: multiplicación, división y potencia de potencia. | • Potencias: base y exponente.<br>• Multiplicación de potencias de la misma base.<br>• División de potencias de la misma base.<br>• Potencia de una potencia.<br>• Potencias de exponente negativo. | • Expresión del producto de varios factores iguales como potencia.<br>• Producto y división de potencias de la misma base.<br>• Potencia de una potencia.<br>• Utilización de las reglas de las operaciones combinadas con potencias.<br>• Operaciones con potencias de exponente negativo. |
| **2.** Expresar un número en notación científica. | • Notación científica. | • Transformación de un número en forma decimal en producto de una parte decimal por la correspondiente potencia de 10. |
| **3.** Realizar operaciones en notación científica. | • Sumas y restas de números con el mismo exponente en la potencia de 10.<br>• Sumas y restas de números con diferentes exponentes en la potencia de 10.<br>• Productos y cocientes de números con iguales o diferentes exponentes en la potencia de 10. | • Sumas y restas de números, sacando como factor común 10 elevado al exponente común.<br>• Sumas y restas de números, sacando como factor común 10 elevado al menor de los exponentes no comunes.<br>• Multiplicaciones y divisiones de números, sumando o restando los exponentes de 10. |
| **4.** Operar con radicales. | • Transformación de radicales en potencias.<br>• Multiplicación y división de radicales.<br>• Racionalización de denominadores. | • Expresión de números expresados en forma de raíces en potencias.<br>• Operaciones con radicales.<br>• Multiplicación por el conjugado del denominador. |

# 2 OBJETIVO 1
## OPERAR CON POTENCIAS: MULTIPLICACIÓN, DIVISIÓN Y POTENCIA DE POTENCIA

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**POTENCIA**

Un número *a*, llamado base, elevado a un exponente *n* es igual al resultado de multiplicar *a* por sí mismo *n* veces:

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}^{n \text{ veces}} = a^n$$ Se lee: «*a* elevado a *n*».

$a^n$ → ***n*: exponente**, indica cuántas veces se multiplica la base por ella misma.
$a^n$ → ***a*: base**

**EJEMPLO**

$\mathbf{6 \cdot 6 \cdot 6} = 6^3$

Se lee: «seis elevado a tres».

**1 Completa.**

a) $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = \square$ «_____»

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \square$ «_____»

c) $\square = 13^5$ «_____»

d) $\square = \square$ «Siete elevado a cuatro»

**MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS**

- Como las potencias son multiplicaciones, se va a trabajar con ellas cuando multiplicamos o dividimos:

$$3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^7$$

$$5^2 \cdot 5^4 = \overbrace{5 \cdot 5} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^{⑥} \leftarrow \textbf{exponente}$$

- Las potencias han de tener la **misma base** para unificar el exponente.

$3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ (no se puede poner con el mismo exponente)

- La fórmula general para **multiplicar potencias de la misma base** es:

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

**2 Realiza las siguientes operaciones.**

a) $10^2 \cdot 10^5 =$

b) $7^4 \cdot 7^2 = 7^{\square}$

c) $11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$

d) $3^2 \cdot 3^6 =$

e) $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$

f) $\square \cdot 3^5 = 3^7$

g) $11^3 \cdot 11^3 =$

h) $19^5 \cdot 19^7 =$

i) $2^2 \cdot \square = 2^5$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 265



**DIVISIÓN DE POTENCIAS**

- Para dividir potencias con igual base, se deja la base y se restan los exponentes: $\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$.
- La división entre potencias de distinta base no se puede realizar, y debe quedar indicada.

**EJEMPLO**

$$\mathbf{7^5 : 7^2} = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$$

**3** **Opera con las siguientes potencias.**

a) $5^6 : 5^4 = \dfrac{5^6}{5^4} = \underline{\qquad\qquad} = 5 \cdot 5 = \square$

b) $3^7 : 3^4 = \underline{\quad} = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \square \cdot \square \cdot \square = \square$

c) $11^5 : 11^3 =$ d) $13^6 : 13^2 =$ e) $7^2 : 7^3 =$

**4** **Realiza estas divisiones.**

a) $3^5 : 3^4 = \square$ c) $4^6 : \square = 4^3$ e) $5^7 : \square = 5^2$

b) $\square : 7^2 = 7^5$ d) $12^7 : 12^4 = \square$ f) $6^{12} : 6^5 = \square$

- A veces se combinan las operaciones de multiplicación y división. En estos casos, se realizan las distintas operaciones, paso a paso:

$$\frac{3^2 \cdot 3^5 \cdot 3}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2$$

$$\frac{5^6 \cdot 5^3}{5^2 \cdot 5^3} = \frac{5^9}{5^5} = 5^4$$

- Hay que tener en cuenta que solo se puede operar cuando se unifiquen las bases de las potencias:

$$\frac{7^2 \cdot 7^3 \cdot 5^2}{7^2 \cdot 7} = \frac{7^5 \cdot 5^2}{7^3} = 7^2 \cdot 5^2$$

**5** **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(2^5 \cdot 2^4) : (2^3 \cdot 2^2) = \underline{\qquad\qquad} = \dfrac{2^{\square}}{2^{\square}} = \square$

b) $(11^5 \cdot 11^2 \cdot 11^3) : (11^4 \cdot 11) =$

c) $(10^5 : 10^2) \cdot 10^5 = \dfrac{\square}{\square} \cdot \square = \square$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 2

**POTENCIA DE UNA POTENCIA**

Si elevamos una potencia a otra potencia, el resultado es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes:

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

**EJEMPLO**

$(7^2)^3 = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

$(5^4)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^8$

**6** **Completa las siguientes operaciones.**

a) $(7^3)^4 = 7^{\square}$

b) $(3^3)^{\square} = 3^{15}$

c) $(6^2)^{\square} = 6^{12}$

d) $(9^3)^{\square} = 9^{15}$

e) $(4^2)^{\square} = 4^8$

f) $(2^5)^2 = 2^{\square}$

g) $(5^3)^4 = 5^{\square}$

h) $(10^2)^3 = 10^{\square}$

Hay también operaciones combinadas que presentan las tres operaciones estudiadas hasta el momento.

| $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | $a^m : a^n = a^{m-n}$ | $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ |
|---|---|---|
| **Multiplicación** | **División** | **Potencia de una potencia** |

**EJEMPLO**

$$(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3 = \frac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3$$

**7** **Realiza estas operaciones.**

a) $(3^5 : 3^2)^3 = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3 = (\square)^3 =$

b) $(5^7 : 5^3) \cdot (5^6 : 5^2) = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square}$

c) $(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$

d) $(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$

e) $(6^5 : 6^2) \cdot (6^3)^4 =$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 267



**POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO**

- Al efectuar una división de potencias, el resultado puede ser una potencia de exponente negativo:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

- Si hay exponentes negativos, podemos transformarlos en una fracción: $\frac{1}{a^n}$

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En general, las potencias de exponente negativo se definen: $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

- Las potencias de exponente negativo cumplen las propiedades que ya conocemos para las potencias de exponente natural.

**8** **Opera con potencias de exponentes negativos.**

a) $5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \frac{1}{3^{\square}} = \frac{5^2}{3^{\square}} = \frac{25}{\square}$

b) $5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \frac{1}{\square} \cdot 5^3 = \frac{5^2 \cdot 5^3}{\square} = \square$

c) $6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \frac{1}{\square} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \frac{1}{\square} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{\square} = \square$

$\boxed{6 = 2 \cdot 3}$

d) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 2^3 = \frac{\square}{\square} =$

$\boxed{4 = 2 \cdot 2}$

$\boxed{8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3}$

**9** **Expresa en forma de potencia de la base indicada en cada caso.**

| OPERACIÓN | BASE | RESULTADO |
|---|---|---|
| $9^{-7} \cdot 9^{11}$ | 3 | |
| $4^6 : 8^{-3}$ | 2 | |
| $(25^9)^{-3}$ | 5 | |
| $(16^{-5} : 4^3)^{-2}$ | 2 | |
| $(49^{-3})^4 : 7^{-6}$ | 7 | |

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 2 OBJETIVO 2
## EXPRESAR UN NÚMERO EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Para expresar un número en notación científica, lo escribimos con una sola cifra, distinta de cero, como parte entera y las otras cifras decimales, multiplicado por una potencia de 10 con exponente igual a:

- el número de cifras que hemos pasado a la parte decimal, o
- menos el número de posiciones que hemos saltado para conseguir que la primera cifra sea entera.

**EJEMPLO**

| | |
|---|---|
| **5.438** $= 5{,}438 \cdot 10^3$ | 3 cifras hemos tenido que pasar a decimales. |
| **34,7** $= 3{,}47 \cdot 10^1$ | 1 cifra hemos tenido que pasar a decimal. |
| **800** $= 8 \cdot 10^2$ | 2 cifras hemos tenido que pasar a decimales. |
| **0,00748** $= 7{,}48 \cdot 10^{-3}$ | 3 saltos hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 7, esté en la parte entera. |
| **0,356** $= 3{,}56 \cdot 10^{-1}$ | 1 salto hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 3, esté en la parte entera. |
| **0,0691** $= 6{,}91 \cdot 10^{-2}$ | 2 saltos hemos tenido que dar para conseguir que la primera cifra: 6, esté en la parte entera. |

**1** **Expresa en notación científica los siguientes números.**

a) $2.000.000 = 2{,}000000 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6$
b) $4.000 =$ _____
c) $100 =$ _____
d) $700 =$ _____
e) $10 =$ _____
f) $80.000 =$ _____
g) $5.000.000 = 5 \cdot$ _____

**2** **Expresa en notación científica estos números con parte entera y parte decimal.**

a) $990{,}85 = 9{,}9085 \cdot 10^2$
b) $340 = 3{,}4 \cdot$ _____
c) $655{,}1 = 6{,}551 \cdot$ _____
d) $567.765{,}22 =$ _____
e) $15{,}35 =$ _____
f) $340{,}05 = 3{,}4005 \cdot$ _____
g) $37{,}986 = 3{,}7986 \cdot$ _____
h) $4{,}4 =$ _____
i) $3{,}45 =$ _____

**3** **Expresa los números decimales en notación científica.**

a) $0{,}0567 = 5{,}67 \cdot 10^{-2}$
b) $0{,}000045 = 4{,}5 \cdot$ _____
c) $0{,}0000061 =$ _____
d) $0{,}093 =$ _____
e) $0{,}367 = 3{,}67 \cdot$ _____
f) $0{,}0073 =$ _____
g) $0{,}000101 =$ _____
h) $0{,}0007 =$ _____
i) $0{,}4765 =$ _____

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 269

OBJETIVO 3

# REALIZAR OPERACIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Para efectuar operaciones con números expresados en notación científica, hay que seguir unas sencillas reglas, que vamos a ver con ejemplos y para hacerlo después con calculadora, es importante aprender a calcular primero sin ella, pues funciona según las mismas reglas.

## EJEMPLO

1.er caso: cuando las potencias de 10 están elevadas al **mismo exponente**, un número entero positivo o negativo.

**Efectúa la suma $13{,}42 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$.**

En este caso, las dos potencias de 10 están elevadas al mismo exponente: 5, de forma que podemos **sacar factor común**. El resultado se da en notación científica.

$$13{,}42 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5 = (13{,}42 + 4) \cdot 10^5 = 17{,}42 \cdot 10^5 = 1{,}742 \cdot 10^6$$

**1** **Haz las siguientes sumas y restas en notación científica.**

a) $6 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^3 = (___ - ___ + ___) \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3$

b) $[101{,}17 \cdot 10^2 - 5{,}87 \cdot 10^2] \cdot 3 = [(_____ - _____) \cdot 10^2] \cdot 3 = [_____ \cdot 10^2] \cdot 3 = 2{,}859 \cdot 10^4$

c) $(33{,}3 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 10 - 6{,}7 \cdot 10) \cdot \frac{2}{7} = [(_____ + _____ - _____) \cdot 10] \cdot \frac{2}{7} =$

$= [_____ \cdot 10] \cdot \frac{2}{7} = 8{,}31 \cdot 10$

## EJEMPLO

2.º caso: cuando las potencias de 10 están elevadas a **distintos exponentes enteros positivos**.

**Efectúa la resta $6{,}74 \cdot 10^5 - 2{,}85 \cdot 10^3$.**

Observa que, en este caso, las dos potencias de 10 están elevadas a números distintos: 5 y 3, de manera que no podemos sacar factor común directamente. Hay que expresar los dos números en función de la **potencia de menor valor**, en este caso 3.

$2{,}85 \cdot 10^3$

$6{,}74 \cdot 10^5 = 6{,}74 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 674 \cdot 10^3$

$6{,}74 \cdot 10^5 - 2{,}85 \cdot 10^3 = 674 \cdot 10^3 - 2{,}85 \cdot 10^3 = (674 - 2{,}85) \cdot 10^3 = 671{,}15 \cdot 10^3$

Una vez efectuada la operación, convertimos el resultado en notación científica:

$671{,}15 \cdot 10^3 = 6{,}7115 \cdot 10^5$

**2** **Haz las siguientes sumas y restas en notación científica.**

a) $2{,}71 \cdot 10^3 - 1{,}9 \cdot 10^2 + 5{,}43 \cdot 10^4 = 2{,}71 \cdot 10 \cdot 10^2 - 1{,}9 \cdot 10^2 + 5{,}43 \cdot 10^2 \cdot 10^2 =$

$= _____ \cdot 10^2 - _____ \cdot 10^2 + _____ \cdot 10^2 = (_____ - _____ + _____) = 568{,}2 \cdot 10^2$

b) $3{,}76 \cdot 10^4 - 5{,}78 \cdot 10^3 = 3{,}76 \cdot 10 \cdot 10^3 - 5{,}78 \cdot 10^3 = _____ \cdot 10^3 - _____ \cdot 10^3 =$

$= (_____ - _____) \cdot _____ = 31{,}82 \cdot 10^3$

c) $5{,}25 \cdot 10^4 + 60{,}4 \cdot 10^3 = _____ \cdot 10 \cdot 10^3 + _____ \cdot 10^3 = 5{,}854 \cdot 10^5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

**EJEMPLO**

3.er caso: cuando las potencias de 10 están elevadas a **distintos exponentes**, con números enteros negativos.

**Efectúa la suma $2{,}5 \cdot 10^{-5} + 9{,}6 \cdot 10^{-4}$.**

En este caso, las dos potencias de 10 están elevadas a distintos números enteros negativos: $-5$ y $-4$, por lo que para sacar factor común elegimos el mayor de ellos, $-4$, y procedemos así:

$$2{,}5 \cdot 10^{-5} = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4}$$

$$9{,}6 \cdot 10^{-4}$$

$$2{,}5 \cdot 10^{-5} + 9{,}6 \cdot 10^{-4} = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} + 9{,}6 \cdot 10^{-4} = 0{,}25 \cdot 10^{-4} + 9{,}6 \cdot 10^{-4} =$$
$$= (0{,}25 + 9{,}6) \cdot 10^{-4} = 9{,}85 \cdot 10^{-4}$$

**3** **Haz estas sumas y restas en notación científica.**

a) $2{,}32 \cdot 10^{-3} - 3{,}76 \cdot 10^{-4}$

Como $10^{-4} = 10^{-1} \cdot 10^{-3}$, resulta que:

$2{,}32 \cdot 10^{-3} - 3{,}76 \cdot 10^{-4} = 2{,}32 \cdot 10^{-3} - 3{,}76 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} = (2{,}32 - 0{,}376) \cdot 10^{-3} = 1{,}944 \cdot 10^{-3}$

b) $7{,}9 \cdot 10^{-6} + 5{,}5 \cdot 10^{-5} = ___ \cdot ___ \cdot ___ + ___ \cdot ___ = ___ \cdot ___ + ___ \cdot ___ =$

$= (_____ + _____) \cdot 10^{-5} = 6{,}29 \cdot 10^{-5}$

c) $3 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} =$

$= (___ - 2 + ___ - ___) \cdot 10^{-3} = -1{,}677 \cdot 10^{-3}$

**EJEMPLO**

**Efectúa el producto $(6{,}2 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^3)$.**

Multiplicamos los números: $6{,}2 \cdot 4 = 24{,}8$, y por otro lado, multiplicamos las potencias: $10^5 \cdot 10^3 = 10^8$

$$(6{,}2 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^3) = 24{,}8 \cdot 10^8 = 2{,}48 \cdot 10^9$$

**Efectúa la división $(6{,}2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3)$.**

Dividimos los números: $6{,}2 : 4 = 1{,}55$, y por otro lado, dividimos las potencias: $10^5 : 10^3 = 10^2$

$$(6{,}2 \cdot 10^5) : (4 \cdot 10^3) = 1{,}55 \cdot 10^2$$

**4** **Realiza los productos y cocientes en notación científica.**

a) $(5 \cdot 10^4) \cdot (12 \cdot 10^7) = (5 \cdot 12) \cdot 10^{4+7} = 60 \cdot 10^{11}$

b) $(34{,}4 \cdot 10^{-5}) \cdot (6{,}1 \cdot 10^4) = (___ \cdot ___) \cdot 10^{__} = 209{,}84 \cdot 10^{-1}$

c) $(60 \cdot 10^5) : (3 \cdot 10^6) = (60 : 3) \cdot 10^{__} = 20 \cdot 10^{-1}$

**5** **Efectúa las operaciones combinadas en notación científica.**

a) $[(3 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^5) : (5 \cdot 10^3)] - [(2 \cdot 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^4] = (2 \cdot 10^{__}) - (-3 \cdot 10^0) =$

$= 200 + 3 = 203 = 2{,}03 \cdot 10^2$

b) $(6 \cdot 10^{-3}) : (8 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}) = (6 \cdot 10^{-3}) : [(___ - ___ - ___) \cdot 10^{-3}] =$

$= (6 \cdot 10^{-3}) : (___ \cdot 10^{-3}) = 2 \cdot 10^0 = 2$

OBJETIVO 4

# OPERAR CON RADICALES



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

La raíz *n*-ésima de un número se puede poner en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, *a* es el **radicando** y *n* es el **índice** de la raíz.

Es más fácil operar con potencias que con raíces, por lo que transformamos las raíces en potencias.

**EJEMPLO**

$\sqrt{\mathbf{5}} = 5^{1/2}$ $\qquad$ $\sqrt[7]{\mathbf{3^2}} = 3^{2/7}$

**1** **Escribe los radicales en forma de potencias.**

a) $\sqrt[5]{7^3} = ___^{3/5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{8^5}} = \dfrac{1}{8^{5/2}} = 8^{\square}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = ___$

**MULTIPLICACIÓN (O DIVISIÓN) DE RADICALES**

Para multiplicar o dividir radicales con el **mismo radicando**, los convertimos primero en potencias.

**EJEMPLO**

$\sqrt[3]{\mathbf{2}} \cdot \sqrt[5]{\mathbf{2}} = 2^{1/3} \cdot 2^{1/5} = 2^{1/3+1/5} = 2^{(5+3)/15} = 2^{8/15} = \sqrt[15]{2^8}$

$\sqrt[7]{\mathbf{3^5}} : \sqrt[3]{\mathbf{3}} = 3^{5/7} : 3^{1/3} = 3^{5/7-1/3} = 3^{(15-7)/21} = 3^{8/21} = \sqrt[21]{3^8}$

**2** **Calcula los siguientes productos de radicales.**

a) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7^3} = 7^{3/5} \cdot 7^{3/2} = 7^{3/5+3/2} = 7^{(__+__)/__} = 7^{21/10} = \sqrt[10]{7^{21}}$

b) $\sqrt[7]{6^2} + 6 = 6^{__} \cdot 6 = 6^{__+__} = 6^{9/7} = \sqrt[7]{6^9}$

c) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3^{__} \cdot 3^{__} = 3^{__+__} = 3^{19/10} = \sqrt[10]{3^{19}}$

d) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2^{3/4} \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{____} = 2^{____} = 2^{23/12} = \sqrt[12]{2^{23}}$

**3** **Halla estos cocientes de radicales.**

a) $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = 2^{1/2} : 2^{1/3} = 2^{1/2-1/3} = 2^{(3-2)/6} = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[3]{8^5} : \sqrt[3]{8^2} =$

c) $\sqrt[7]{5} : \sqrt[4]{5^3} =$

d) $(\sqrt[3]{3^7} \cdot \sqrt[3]{3^4}) : \sqrt{3^2} = (3^{__} \cdot 3^{__}) : 3 = 3^{__} : 3 = 3^{8/3} = \sqrt[3]{3^8}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 2

**RACIONALIZAR DENOMINADORES**

Racionalizar un denominador es el proceso mediante el que hacemos desaparecer el radical del denominador de la fracción.

Este proceso consiste en multiplicar el numerador y el denominador por un número que haga que en el denominador se elimine la raíz.

**EJEMPLO**

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[5]{\mathbf{3^2}}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^3}}{3}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{2}}} = \frac{1 \cdot (3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{2}}{7}$$

En este caso, utilizamos la propiedad de que una suma por una diferencia de dos números es igual a una diferencia de cuadrados:

$$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7$$

**4** **Racionaliza los denominadores de las fracciones.**

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} =$

c) $\frac{5}{2 + \sqrt{3}} = \frac{5 \cdot (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3})} = \underline{\qquad\qquad} = 10 - 5\sqrt{3}$

d) $-\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = -\frac{1 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})} = -\underline{\qquad\qquad} = -\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2}) \cdot (\qquad\qquad)}{(1 - \sqrt{2}) \cdot (\qquad\qquad)} = \frac{(\qquad\qquad)^2}{\qquad\qquad} = -(1 + \sqrt{2})^2$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\square \cdot \square}{\square \cdot \square} = \frac{\sqrt{15}}{10}$

g) $\frac{2}{1 - \sqrt{3}} =$

# 3 Polinomios y fracciones algebraicas

## INTRODUCCIÓN

Son múltiples los contextos en los que aparecen los polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de ahí la importancia de comprender el concepto de polinomio y otros conceptos asociados a él.

Después de comprender y practicar cada uno de estos conceptos, se estudiará cómo operar con polinomios. Las dificultades pueden surgir en la multiplicación (en la colocación correcta de los términos) y en la división (en la determinación de cada término del cociente y en la resta de los productos obtenidos).

Conviene seguir los ejemplos resueltos, dejar claro el proceso seguido y hacer hincapié en la necesidad de colocar correctamente cada término para operar sin cometer errores.

Asimismo, es importante que los alumnos aprendan a deducir por sí mismos el desarrollo de las fórmulas de las igualdades notables.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un *polinomio* es una suma de monomios.
- Un *polinomio reducido* no tiene monomios semejantes. Su grado es el grado del término de mayor grado.
- El *valor numérico de un polinomio*, para $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable $x$ por $a$ y operando.
- *Sumamos dos polinomios* sumando los términos semejantes de ambos.
- *Restamos dos polinomios* sumando al primer polinomio el opuesto del segundo.
- *Multiplicamos dos polinomios* multiplicando cada uno de los monomios de uno por todos los monomios del otro.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- *Igualdades notables.*

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Reconocer el grado, los términos y los coeficientes de un polinomio. | • Grado, término independiente y coeficientes de un polinomio.<br>• Polinomio ordenado.<br>• Polinomio reducido.<br>• Polinomio completo. | • Identificación del grado, el término independiente y los coeficientes de un polinomio.<br>• Reducción de polinomios.<br>• Ordenación de los términos de un polinomio.<br>• Distinción de polinomios completos e incompletos. |
| **2.** Determinar el valor numérico de un polinomio. | • Valor numérico de un polinomio. | • Cálculo del valor numérico de un polinomio. |
| **3.** Realizar operaciones con polinomios: sumas y restas. | • Suma y resta de polinomios. | • Suma y resta de polinomios. |
| **4.** Realizar operaciones con polinomios: multiplicación. | • Multiplicación de polinomios. | • Multiplicación de polinomios: aplicación de la propiedad distributiva. |
| **5.** Realizar operaciones con polinomios: división. | • División de polinomios. | • División de polinomios.<br>• Comprobación de las divisiones. |
| **6.** Identificar y desarrollar igualdades notables. | • Cuadrado de una suma.<br>• Cuadrado de una diferencia.<br>• Producto de una suma por una diferencia. | • Identificación y desarrollo de las igualdades notables. |

# 3 OBJETIVO 1
## RECONOCER EL GRADO Y LOS ELEMENTOS QUE FORMAN UN POLINOMIO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma algebraica de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido es el grado del término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio.

**EJEMPLO**

**Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:**

**a) Obtén el polinomio reducido.**

**b) Determina el grado del polinomio.**

**c) ¿Cuántos términos tiene? ¿Cuál es su término independiente?**

**d) ¿Es un polinomio completo? Si es incompleto, di qué término falta.**

a) Para reducir un polinomio lo primero que hay que hacer es operar:

$$P(x) = 5x^2 - \underbrace{3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2$$ **Polinomio reducido**

b) El grado del polinomio es grado 2: $P(x) = 5x^2 - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y $-2$ es el término independiente.

$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2}$ → $-2$ es el término independiente.

→ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underset{2}{\underline{5x^2}} - \underset{1}{\underline{x}} - \underset{0}{\underline{2}}$ es un **polinomio completo**.

grado: 2 1 0

**EJEMPLO**

**¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?**

$Q(x) = \underset{3}{\underline{7x^3}} + \underset{2}{\underline{2x^2}} + \underset{0}{\underline{3}}$ es un **polinomio incompleto**, pues falta el término de grado 1.

grado: 3 2 0

**1** **Reduce los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 275



**2** **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$$

$P(x) =$ _____

- Tiene _____ términos.
- El término independiente es _____
- El grado del polinomio es _____
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? _____

**3** **Reduce el polinomio y ordénalo, de mayor a menor grado.**

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$$

$P(x) =$ _____

- Tiene _____ términos.
- El término independiente es _____
- El grado del polinomio es _____
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? _____

**4** **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

| POLINOMIO | COMPLETO | INCOMPLETO | FALTAN LOS TÉRMINOS |
|---|---|---|---|
| $P(x) = -4x^2 + 5x - 2$ | | | |
| $Q(x) = 2x^3 + 40$ | | | |
| $R(x) = -10x^2 - 20x + 40$ | | | |
| $S(x) = 40$ | | | |
| $T(x) = x^3 + x^2 + 1$ | | | |

**5** **Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica:**

a) Si el polinomio es ordenado.
b) Si el polinomio está reducido.
c) Si el polinomio es completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

# 3 OBJETIVO 2
## DETERMINAR EL VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para un valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo la variable $x$ por $a$ y operando.

**EJEMPLO**

**En un polinomio, por ejemplo $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede introducir cualquier valor $a$ sustituyendo a $x$:**

**Para $x = 2$:** $P(2) = 2 \cdot 2^2 + 1$
$P(2) = 2 \cdot 4 + 1$
$P(2) = 8 + 1$
$P(2) = 9$ El valor del polinomio cuando introducimos el valor 2 es 9.

**Para $x = 10$:** $P(10) = 2 \cdot 10^2 + 1$
$P(10) = 2 \cdot 100 + 1$
$P(10) = 200 + 1$
$P(10) = 201$ El valor del polinomio cuando introducimos el valor 10 es 201.

**1** **Calcula el valor numérico de los polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$
$x = 1$ $P(\ ) = \square + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

**2** **Halla el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$

OBJETIVO 3

# REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: SUMAS Y RESTAS



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar términos semejantes**.

## EJEMPLO

**Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$**

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los términos semejantes.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 - \boxed{2x^2} + \boxed{5x} - \boxed{3} + \boxed{4x^2} - \boxed{3x} + \boxed{2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$\boldsymbol{P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1}$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + \quad Q(x) = & \phantom{3x^3 - 2x^2 +} 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline \boldsymbol{P(x) + Q(x) =} & \boldsymbol{3x^3 + 2x^2 + 2x - 1} \end{array}$$

## EJEMPLO

**Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$**

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - \boxed{5x^2} + \boxed{5} - (\boxed{5x^2} - 2x + \boxed{7}) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$\boldsymbol{P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2}$$

- **En columna:** hay que ordenar los polinomios como se indica

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 5x^2 \phantom{- 2x} + 5 \\ - \quad Q(x) = & \phantom{3x^3} - (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline \boldsymbol{P(x) - Q(x) =} & \boldsymbol{3x^3 - 10x^2 + 2x - 2} \end{array}$$

**1** **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones de las maneras estudiadas: en línea y en columna.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 278



**2** **Calcula la suma y resta de estos polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ + & Q(x) = \\ \hline & P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ - & Q(x) = \\ \hline & P(x) - Q(x) = \end{array}$$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ + & Q(x) = \\ \hline & P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ - & Q(x) = \\ \hline & P(x) - Q(x) = \end{array}$$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ + & Q(x) = \\ \hline & P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ - & Q(x) = \\ \hline & P(x) - Q(x) = \end{array}$$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ + & Q(x) = \\ \hline & P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ - & Q(x) = \\ \hline & P(x) - Q(x) = \end{array}$$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ + & Q(x) = \\ \hline & P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$$\begin{array}{rl} & P(x) = \\ - & Q(x) = \\ \hline & P(x) - Q(x) = \end{array}$$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 279

OBJETIVO 4

# REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: MULTIPLICACIÓN



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- El **producto** de dos polinomios se halla **multiplicando cada uno de los monomios de uno de ellos por todos los monomios del otro y sumando** (o restando) los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

## EJEMPLO

**Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$**

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

*Se multiplican todos los monomios de un polinomio por todos los monomios del otro polinomio.*

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} + \boxed{2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} + \boxed{x \cdot x^2 + x \cdot 3} - \boxed{7 \cdot x^2 + 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

*Solo se suman términos semejantes.*

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21}$$

**1** **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

*Multiplica los monomios.*

$$= \boxed{\phantom{xxxx}} - \boxed{\phantom{xxxx}} - \boxed{\phantom{xxxx}} = \boxed{\phantom{xxxx}} - \boxed{\phantom{xxxx}} + \boxed{\phantom{xxxx}} =$$

$$=$$

*Suma los términos.*

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) =}$$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 3

**EJEMPLO**

**Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$**

Vamos a resolver el ejercicio multiplicando en columna:

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\ \times \quad Q(x) = & x^2 + 3 \\ \hline + & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\ & 7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2 \\ \hline \end{array}$$

← *Producto de 3 por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

← *Producto de $x^2$ por $7x^3$, $2x^2$, x, 7.*

$$\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21}$$

← *Suma de monomios semejantes.*

**2** **Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$**

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 5x^2 - 3x + 4 \\ \times \quad Q(x) = & 3x + 2 \\ \hline & \\ + & \\ \hline \end{array}$$

← *Producto de 2 por $5x^2$, 3x, 4.*

← *Producto de 3x por $5x^2$, 3x, 4.*

$$\boxed{\boldsymbol{P(x) \cdot Q(x) =}}$$

← *Suma de monomios semejantes.*

**3** **Calcula el producto de los polinomios $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

**4** **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 281

OBJETIVO 5

# REALIZAR OPERACIONES CON POLINOMIOS: DIVISIÓN



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Para dividir dos polinomios, $P(x)$ y $Q(x)$, hay que tener en cuenta que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el grado del polinomio $Q(x)$.
- Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen que:

$$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  ***P*(*x*)** es el polinomio **dividendo**.

  ***Q*(*x*)** es el polinomio **divisor**.

  ***C*(*x*)** es el polinomio **cociente**.

  ***R*(*x*)** es el polinomio **resto**.
- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:

  La **división** es **exacta**.

  El polinomio ***P*(*x*) es divisible por *Q*(*x*)**.
- En caso contrario, se dice que la **división** es **entera**.

## EJEMPLO

**Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$**

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline \bigcirc & \end{array}$$

*Hay que elegir un monomio que multiplicado por $x^2$ nos dé $5x^3$:*

*$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.*

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + \ \ 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \cancel{-5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\qquad - 25x & \\ \hline \qquad 3x^2 - 20x - 7 & \end{array}$$

*Multiplicamos 5x por cada uno de los términos del polinomio cociente ($x^2$, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.*

*Hay que buscar un monomio que multiplicado por $x^2$ nos dé $3x^2$, en este caso 3.*

$$\begin{array}{l|l} \cancel{5x^3} + 3x^2 + \ \ 5x - \ \ 7 & x^2 + 5 \\ \cancel{-5x^3} & 5x + 3 \\ \qquad\qquad - 25x & \\ \hline \qquad \cancel{3x^2} - 20x - \ \ 7 & \\ \qquad \cancel{-3x^2} \qquad\quad - 15 & \\ \hline \qquad\qquad - 20x - 22 & \end{array}$$

*Multiplicamos 3 por cada uno de los términos del polinomio cociente ($x^2$, 5), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna correspondiente. A continuación, hacemos la suma.*

*Hay que buscar un monomio que multiplicado por $x^2$ nos dé 20x, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.*

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$

Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división es entera, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 3

**1** **Calcula las divisiones de polinomios, y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

**2** **Efectúa estas divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 283

OBJETIVO 6

# IDENTIFICAR Y DESARROLLAR IGUALDADES NOTABLES



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**CUADRADO DE UNA SUMA**

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \overbrace{ab + ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**EJEMPLO**

$\boldsymbol{(x + 3)^2} = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\boldsymbol{(4x + y)} = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

**1** **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

**CUADRADO DE UNA DIFERENCIA**

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo:

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - \overbrace{ab - ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**EJEMPLO**

$\boldsymbol{(2y - 3)^2} = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\boldsymbol{(x^2 - 2)} = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

**2** **Desarrolla las igualdades.**

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(4x^3 - a^2)^2 =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 3

**PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA**

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Vemos que esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} + b^2 = a^2 - b^2$$

**EJEMPLO**

$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

**3** **Desarrolla los siguientes productos.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

**4** **Desarrolla los productos.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

**5** **Desarrolla.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

# 4 Ecuaciones 1º y 2º grado

## INTRODUCCIÓN

Comenzamos esta unidad diferenciando entre identidades y ecuaciones, y definiendo los conceptos asociados a cualquier ecuación: miembros, términos, coeficientes, grado, solución..., que son necesarios para desarrollar y trabajar el resto de la unidad.

Para resolver ecuaciones de primer grado aprendemos a transponer términos, resolviendo ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.

Para resolver ecuaciones de segundo grado, los alumnos han de aprender a identificarlas y distinguir entre las ecuaciones completas e incompletas, ya que las ecuaciones incompletas son más fáciles de resolver, sin necesidad de aplicar la fórmula general.

Es importante que los alumnos asimilen el método general de resolución de problemas mediante ecuaciones, aplicando todas las fases y respetando la fase de la comprobación de la solución, que los alumnos suelen obviar, para comprobar que el resultado obtenido es coherente.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *ecuación* es una igualdad algebraica que solo es cierta para algunos valores.
- La *incógnita* de una ecuación es la letra de valor desconocido.
- El *grado* de una ecuación es el mayor exponente al que está elevada la incógnita.
- La *solución* o las *soluciones* de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que se cumpla la igualdad.
- Para *resolver ecuaciones* se transponen términos y se tienen en cuenta las reglas de la suma y del producto.
- Una *ecuación de primer grado* es una expresión del tipo: $ax = b$. Su solución es $x = \frac{b}{a}$.
- Una *ecuación de segundo grado* es una expresión del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a$, $b$ y $c$ son números reales y $a \neq 0$. Sus soluciones son:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Ecuaciones. Grado de una ecuación. Soluciones. | • La ecuación como igualdad.<br>• Elementos de una ecuación: incógnitas, coeficientes, miembros, términos y grado. | • Identificación del grado de una ecuación.<br>• Cálculo por tanteo de la solución de una ecuación. |
| **2.** Resolver ecuaciones de primer grado. Transposición de términos. | • Transposición de términos.<br>• Resolución de ecuaciones. | • Resolución de ecuaciones de primer grado por transposición de términos. |
| **3.** Resolver ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. | • Eliminación de paréntesis.<br>• Eliminación de denominadores.<br>• Resolución de ecuaciones de primer grado | • Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores.<br>• Comprobación de la solución de una ecuación. |
| **4.** Ecuaciones de segundo grado. | • Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas.<br>• Resolución de ecuaciones de segundo grado completas. | • Identificación de una ecuación de segundo grado.<br>• Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas y completas. |
| **5.** Resolver problemas con ecuaciones de primer y segundo grado. | • Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado. | • Planteamiento y resolución de problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado. |

# 4 OBJETIVO 1
## ECUACIONES. GRADO DE UNA ECUACIÓN. SOLUCIONES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

En Matemáticas, para representar cualquier enunciado o problema, lo hacemos mediante **expresiones algebraicas** u operaciones en las que aparecen letras y números.

- Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, que se cumple o es cierta para cualquier valor de las letras contenidas en ambas expresiones. Por ejemplo:
  $3 - x = 6 + x^2 - (3 + x + x^2)$ es una igualdad, que se cumple para cualquier valor de $x$.
- Una **ecuación** es una identidad algebraica que se cumple o es cierta solo para algunos valores de las letras. Por ejemplo:
  $x^2 + x = 2$ es una ecuación, que solo se cumple cuando $x$ vale 1 o $-2$.

La **incógnita** de una ecuación es la letra con valor desconocido.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente con el que aparece la incógnita en la ecuación, una vez realizadas todas las operaciones.

La parte izquierda de la igualdad se llama **primer miembro**, y la parte derecha es el **segundo miembro**.

Cada miembro está formado por uno o más sumandos que se llaman **términos**.

La **solución** o las soluciones de una ecuación son los valores de la incógnita que hacen que la igualdad se cumpla.

**EJEMPLO**

**Elementos de una ecuación**

$\underbrace{5x - 3(x+1)}_{1.^{er}\text{ miembro}} = \underbrace{4x - 1}_{2.^{o}\text{ miembro}}$

Términos: $5x$, $3(x+1)$, $4x$ y $-1$ Incógnita: $x$

Coeficientes: 5, $-3$, 4 y $-1$

**EJEMPLO**

**Grado de una ecuación**

a) La ecuación $3x - 5 = 0$ es una ecuación de primer grado.

b) La ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ es una ecuación de cuarto grado.

**1** **Indica el grado de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^3 + 2x^2 = 13x - 10$

b) $(7 - 2x) + (5 + 3x) = 0$

c) $3(x^2 + 2) - 4(x^2 - 1) + (x^2 + x - 5) = 0$

d) $3(x^2 - 1) - 2(x + 6 - x^2) = 0$

**2** **Calcula, por tanteo, las soluciones de las ecuaciones.**
***(Ten en cuenta que una ecuación tendrá tantas soluciones como sea su grado.)***

a) $2x - 18 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

c) $x^2 + 3x - 10 = 0$

d) $x^2 - 9 = 0$

e) $14 = 5 - 3x$

f) $(1 + x) + (1 - 2x) = 0$

OBJETIVO 2

# RESOLVER ECUACIONES DE PRIMER GRADO



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**Resolver** una ecuación es hallar el valor de la incógnita que cumple la ecuación.

Para resolver una ecuación de primer grado, **transponemos términos**, lo que consiste en pasar a un miembro (normalmente, al izquierdo) todos los términos con $x$, y al otro miembro (el derecho), todos los números o términos independientes (términos sin $x$).

Se deberán tener en cuenta las siguientes reglas.

- **Regla de la suma:** un término que está **sumando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **restando**, y si está **restando** pasa **sumando**.
- **Regla del producto:** un término que está **multiplicando** en un miembro de la ecuación pasa al otro miembro **dividiendo**, y si está **dividiendo** pasa **multiplicando**.

## EJEMPLO

**Resuelve esta ecuación de primer grado por transposición: $5x - 3 = 3x + 11$**

- Sumamos 3 en los dos miembros:

$$5x - 3 + 3 = 3x + 11 + 3 \rightarrow 5x = 3x + 14$$

- Para eliminar el término con $x$ del segundo miembro, restamos $3x$ en ambos miembros:

$$5x - 3x = 3x + 14 - 3x \rightarrow 2x = 14$$

- Para despejar la incógnita $x$, dividimos ambos miembros de la ecuación entre 2:

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x = 7$$

**1** **Resuelve por transposición las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $7x - 1 = 9 - 3x$

b) $5 - 3x = 1 - x + 9 - 3x$

c) $x - 10 = 3x - 7 + 8x - 13$

d) $75 - 37x + 25 - 12x = 318 + x - 10 + 2x$

e) $4x - 18 + x - 7 = 25 - 5x$

f) $5x - 30 + 35 - 10x = 45x - 20 + 65 - 10x$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 4 OBJETIVO 3
# ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS Y DENOMINADORES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PARÉNTESIS**

Para resolver una ecuación de primer grado que contiene paréntesis, en primer lugar hay que quitarlos, poniendo atención en los cambios de signo cuando haya un signo negativo delante del paréntesis.

**EJEMPLO**

**Resuelve la siguiente ecuación de primer grado: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$**

- Quitamos los paréntesis: $2 + x - 5x + 5 = 3x + 3 + x - 4$
- Reducimos términos semejantes: $-4x + 7 = 4x - 1$
- Transponemos términos: $-4x - 4x = -1 - 7 \rightarrow -8x = -8$
- Despejamos la $x$: $x = \frac{-8}{-8} = 1$
- Comprobamos la solución: $(2 + x) - 5(x - 1) = 3(x + 1) + (x - 4)$
  $(2 + 1) - 5(1 - 1) = 3(1 + 1) + (1 - 4)$
  $3 - 0 = 3 \cdot 2 - 3 \rightarrow 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow 3 = 3$

La solución es correcta, porque el resultado final de las operaciones es el mismo número en ambos miembros de la ecuación.

**1** **Resuelve las ecuaciones de primer grado, comprobando la solución.**

a) $(3 - x) + 2(x - 1) = (x - 5) + 2x$

b) $(7 - 6x) - 5(x + 2) = 3(x + 2) - 2x$

c) $2(5 - x) = 19 - 3(x + 5)$

d) $7x - (5 - x) = 4 - (x + 3)$

e) $2(x - 5) - 3(1 - x) = 17$

f) $6(12x - 81) = 80x + 2$

**ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DENOMINADORES**

Para eliminar los denominadores, hay que calcular su mínimo común múltiplo (m.c.m.) y multiplicar los dos miembros de la ecuación por dicho valor.

**EJEMPLO**

**Resuelve la siguiente ecuación de primer grado:** $\frac{x-5}{3} - 2 = \frac{x+1}{2} + 1$

- Calculamos el m.c.m. (2, 3) = 6
- Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por 6:

$$\frac{6(x-5)}{3} - 6 \cdot 2 = \frac{6(x+1)}{2} + 6 \cdot 1 \qquad 2(x-5) - 12 = 3(x+1) + 6$$

- Quitamos los paréntesis: $2x - 10 - 12 = 3x + 3 + 6$
- Reducimos términos semejantes: $2x - 22 = 3x + 9$
- Transponemos términos: $2x - 3x = 9 + 22 \rightarrow -x = 31 \rightarrow x = -31$
- Comprobamos la solución: $\frac{x-5}{3} - 2 = \frac{x+1}{2} + 1 \rightarrow \frac{-31-5}{3} - 2 = \frac{-31+1}{2} + 1$

$$\frac{-36}{3} - 2 = \frac{-30}{2} + 1 \rightarrow -12 - 2 = -15 + 1 \rightarrow -14 = -14$$

**2** **Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando las soluciones.**

a) $\frac{3x-1}{5} = \frac{2x+1}{3}$

b) $\frac{x-1}{5} + \frac{x+2}{3} = \frac{x}{2} - \frac{x+4}{30}$

c) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{x+2}{5} - \frac{x-3}{2} + \frac{2x}{6}$

# 4

**3** **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores, y comprueba el resultado.**

a) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3\left(x-\frac{3}{2}\right)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{3}{2}\right)$

b) $\left(x+\frac{1}{5}\right)-\left(2x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}\left(\frac{7}{2}x+1\right)$

c) $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x-1}{6}-\frac{x}{4}$

d) $\frac{3x-1}{2}+2\left(1-\frac{x}{2}\right)=3\left(\frac{x-2}{5}\right)+3$

OBJETIVO 4

# ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Una ecuación de segundo grado con una incógnita es una ecuación que se expresa de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales y $a \neq 0$. Si los coeficientes $b$ y $c$ son distintos de cero, la ecuación se llama **completa**; en caso contrario, es **incompleta**.

## EJEMPLO

La ecuación $3x^2 - 4x + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado completa, ya que $a = 3$, $b = -4$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 + 1 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, pues $a = 3$, $b = 0$ y $c = 1$.

La ecuación $3x^2 = 0$ es una ecuación de segundo grado incompleta, porque $a = 3$, $b = 0$ y $c = 0$.

### RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

  Dependiendo del valor que tenga $c$, la ecuación tendrá una, dos o ninguna solución.

- Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x\,(ax + b) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$

## EJEMPLO

- La ecuación $2x^2 - 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = -16$.
  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$
  Luego tiene dos soluciones: $x_1 = \sqrt{8}$ y $x_2 = -\sqrt{8}$
  Comprobamos que son soluciones de la ecuación:
  Si $x = \sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$ Si $x = -\sqrt{8} \rightarrow 2 \cdot (-\sqrt{8})^2 = 2 \cdot 8 = 16$
- La ecuación $5x^2 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 5$ y $c = 0$.
  Tiene una única solución, $x = 0$.
- La ecuación $2x^2 + 16 = 0$ es incompleta, del tipo $ax^2 + c = 0$, en la que $a = 2$ y $c = 16$.
  Operando con ella, tenemos que: $2x^2 = -16 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow x = \pm\sqrt{-8}$
  Como no existe $\sqrt{-8}$, la ecuación no tiene solución.

**1** **Halla, si es posible, las soluciones de las ecuaciones y comprueba el resultado.**

a) $4x^2 - 64 = 0$

b) $4x^2 + 64 = 0$

c) $4x^2 = 0$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

**RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO COMPLETAS**

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado completa es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Según sea el valor del discriminante se pueden dar tres casos:

- PRIMER CASO. Si $b^2 - 4ac > 0$, existirán dos soluciones: $x_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ y $x_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
- SEGUNDO CASO. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una única solución, $x = \frac{-b}{2a}$.
- TERCER CASO. Si $b^2 - 4ac < 0$, la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no es un número real y la ecuación no tiene solución.

**EJEMPLO**

PRIMER CASO. En la ecuación $x^2 - 8x + 15 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -8$ y $c = 15$.

Como $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

– Para $x_1 = 5$: $x^2 - 8x + 15 = 5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 25 - 40 + 15 = 0$

– Para $x_2 = 3$: $x^2 - 8x + 15 = 3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$

SEGUNDO CASO. En la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -10$ y $c = 25$.

Como $b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0$, tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Comprobamos la solución: $x^2 - 10x + 25 = 5^2 - 10 \cdot 5 + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

TERCER CASO. En la ecuación $x^2 + 3x + 12 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.

Como $b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 9 - 48 = -39$, y no existe $\sqrt{-39}$, la ecuación no tiene solución.

**2** **Resuelve las ecuaciones de segundo grado y comprueba las soluciones.**

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 293



**3** **Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones.**

a) $(x-1)(x+6)-4(3x-4)=0$

b) $x(x-1)+6(x+1)=0$

c) $(x+5)(x-1)-2(x+1)+(x+11)=0$

d) $(x+3)(x-5)+2(x-17)=0$

# 4 OBJETIVO 5
## RESOLVER PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1.er Y 2.º GRADO

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Recuerda los cuatro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Leer** detenidamente el enunciado.
b) **Plantear** el problema, en este caso, la ecuación.
c) **Resolver** el problema, en este caso, la ecuación.
d) **Comprobar** el resultado.

**EJEMPLO**

**Halla un número tal que si a sus dos terceras partes se les resta 1, obtenemos 11.**

| ENUNCIADO | EXPRESIÓN ALGEBRAICA |
|---|---|
| El número | $x$ |
| $\frac{2}{3}$ partes del número | $\frac{2x}{3}$ |
| $\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 | $\frac{2x}{3} - 1$ |
| $\frac{2}{3}$ partes del número menos 1 **es igual** a 11 | $\frac{2x}{3} - 1 = 11$ |

Resolvemos la ecuación:

$$\frac{2x}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{2x}{3} = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Comprobamos la solución:

$$\frac{2 \cdot 18}{3} - 1 = 11 \rightarrow \frac{36}{3} - 1 = 11 \rightarrow$$
$$\rightarrow 12 - 1 = 11 \rightarrow 11 = 11$$

**1** **Calcula tres números consecutivos cuya suma vale 24.**
***(Con los números x, x + 1 y x + 2, plantea la ecuación correspondiente.)***

**2** **Halla un número tal que su mitad es 5 unidades menor que su triple. A partir de la tabla, resuelve la ecuación.**

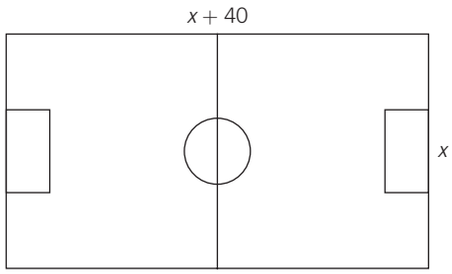
| ENUNCIADO | EXPRESIÓN ALGEBRAICA |
|---|---|
| El número | $x$ |
| Su mitad | $\frac{x}{2}$ |
| Su triple | $3x$ |
| 5 unidades menor que su triple | $3x - 5$ |
| Su mitad es 5 unidades menor que su triple | $\frac{x}{2} = 3x - 5$ |

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 295



**3** **El perímetro de un campo de fútbol es 280 m, y sabemos que mide 40 m más de largo que de ancho. Halla las dimensiones (largo y ancho).**

El perímetro de un polígono es igual a la suma de sus lados:
$P = x + (x + 40) + x + (x + 40) = 2x + 2\,(x + 40) = 280$




**4** **Pepe tiene dos años más que su hermana María y tres años más que Juan. Sumando las edades de los tres, el resultado es 40. Halla la edad que tiene cada uno.**

Llamamos $x$ = edad de Pepe, $x - 2$ = edad de María y $x - 3$ = edad de Juan

**5** **El padre de los hermanos del ejercicio anterior tiene 46 años. Sabiendo que Pepe tiene 15 años, María tiene 13 años y Juan tiene 12 años, calcula cuánto tiempo ha de pasar para que la suma de las edades de los tres iguale a la edad de su padre.**

En los problemas en los que aparecen edades actuales y futuras conviene elaborar una tabla como la siguiente.

| | EDAD ACTUAL | DENTRO DE $x$ AÑOS |
|---|---|---|
| Pepe | 15 | $15 + x$ |
| María | 13 | $13 + x$ |
| Juan | 12 | $12 + x$ |
| Padre | 46 | $46 + x$ |

Planteamos la ecuación:

$$15 + x + 13 + x + 12 + x = 46 + x$$

**6** **La madre de Pepe, María y Juan tiene 42 años. Calcula cuántos años deben pasar para que la edad de Pepe sea la mitad que la edad de su madre.**

| | EDAD ACTUAL | DENTRO DE $x$ AÑOS |
|---|---|---|
| Pepe | 15 | $15 + x$ |
| Madre | 42 | $42 + x$ |

Planteamos la ecuación:

$$15 + x = \frac{42 + x}{2}$$

# 4

**7** **La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 61. Halla de qué números se trata.**

Si representamos los números por $x$ y $x + 1$, sus cuadrados serán $x^2$ y $(x + 1)^2$.
Recuerda que el cuadrado de una suma es: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1^2$

**8** **El abuelo de Pepe, María y Juan tiene una edad tal que elevada al cuadrado es igual a 160 veces la suma de las edades de sus tres nietos. Calcula la edad del abuelo.**

Tenemos en cuenta que las edades son: Pepe, 15 años; María, 13 años, y Juan, 12 años.

**9** **Un campo de baloncesto tiene 1.000 m² de área. Halla sus dimensiones, sabiendo que mide 30 m más de largo que de ancho.**

Planteamos y resolvemos la ecuación de segundo grado que se obtiene al sustituir en la fórmula del área del rectángulo. Hay que tener en cuenta que la solución negativa no es válida, pues no tiene sentido una medida de longitud negativa.

**10** **Si aumentamos el lado de un cuadrado en 2 m, su superficie aumenta en 16 m². Calcula lo que medía inicialmente el lado del cuadrado.**

| | ANTES | DESPUÉS |
|---|---|---|
| Lado | $x$ | $x + 2$ |
| Superficie | $x^2$ | $(x + 2)^2$ |

# 5 Sistemas de ecuaciones

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones son necesarios para plantear y solucionar numerosos problemas reales, por lo que los alumnos deben ser capaces de reconocerlos y resolverlos.

La obtención de un sistema equivalente a uno dado es fundamental, ya que permite hallar la solución del sistema planteado de una forma sencilla.

A lo largo del tema se exponen los tres métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas: sustitución, igualación y reducción. Se deben dejar claros los pasos que hay que dar para resolver un sistema por cada uno de los métodos, así como señalar sus similitudes y diferencias.

Para decidir cuál de los tres métodos es el más indicado para resolver un sistema, es preciso examinar los coeficientes de las incógnitas; en cualquier caso, la solución va a ser la misma.

Conviene resolver algún sistema por los tres métodos para que el alumno compruebe cuál de ellos es el más sencillo en cada sistema.

La resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones no es especialmente complicada, pero debemos insistir en plantear las cuatro fases ya conocidas: leer detenidamente el enunciado, plantear el sistema de ecuaciones, resolverlo por el método más adecuado y, por último, comprobar la solución.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

- Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $x$ e $y$ se expresa de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- *Resolver un sistema* es encontrar dos números tales que, al sustituirlos en las dos ecuaciones, las verifiquen. Un sistema es *compatible* si tiene solución.
- Dos sistemas son *equivalentes* si tienen la misma solución.
- *Método de sustitución:* despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra. Resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se halla sustituyendo el valor obtenido de la primera en cualquiera de las dos ecuaciones.
- *Método de igualación:* despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones. Igualar las expresiones obtenidas y resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se halla sustituyendo el valor obtenido de la primera en cualquiera de las dos ecuaciones.
- *Método de reducción:* buscar un sistema equivalente al dado, en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos. Sumar o restar las ecuaciones, eliminando así una incógnita, y resolver la ecuación que resulta. La otra incógnita se halla sustituyendo el valor obtenido de la primera en cualquiera de las dos ecuaciones.
- Las fases en la resolución de un problema son: comprender, plantear, resolver y comprobar la solución.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. | • Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.<br>• Coeficientes y términos independientes. | • Identificación de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas.<br>• Representación gráfica de sistemas, para comprobar si son o no equivalentes. |
| **2.** Resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Métodos de resolución. | • Método de sustitución.<br>• Método de igualación.<br>• Método de reducción. | • Resolución de un sistema por el método de sustitución.<br>• Resolución de un sistema por el método de igualación.<br>• Resolución de un sistema por el método de reducción. |
| **3.** Resolver problemas por sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. | • Planteamiento, resolución y comprobación de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. | • Resolución de problemas mediante sistemas de dos ecuaciones.<br>• Comprobación de la solución. |

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 5 OBJETIVO 1
## SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones que se puede representar de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- **Coeficientes** de las incógnitas: $a$, $a'$, $b$, $b'$
- **Términos independientes:** $k$, $k'$
- Una **solución** de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifican las dos ecuaciones.

**EJEMPLO**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{x + y = 3} \end{array}\right\}$$

Las incógnitas son $x$ e $y$.
Los coeficientes de las incógnitas son 2, −1, 1 y 1.
Los términos independientes son 3 y 3.

Las parejas de valores de la tabla cumplen la primera ecuación:

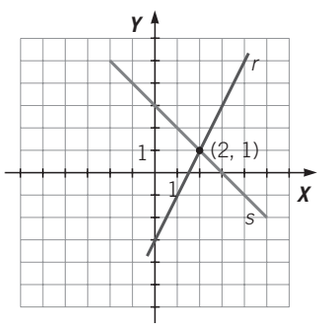
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −3 | −1 | 1 | 3 | 5 | 7 |

Las parejas de valores de la tabla cumplen la segunda ecuación:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 | −2 |

Como vemos, la pareja de valores (2, 1) cumple las dos ecuaciones, por lo que será la solución del sistema.

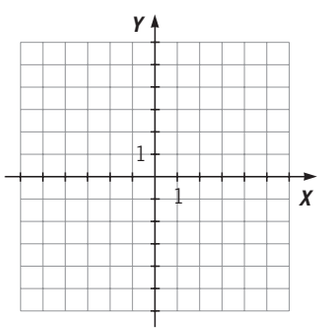
Si representamos las parejas de valores ($x$, $y$) de las tablas anteriores, obtenemos dos rectas, $r$ y $s$, que se cortan en el punto (2, 1), que es la solución del sistema.




**1** **Halla las parejas de valores que son soluciones de las ecuaciones del sistema, y determina cuál es la solución.**

**Representa las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones, comprobando que el punto en el que se cortan es la solución del sistema.**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{x + 5y = 8} \\ \mathbf{3x - 2y = 7} \end{array}\right\}$$



829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 299



Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

**EJEMPLO**

Los sistemas $\left.\begin{array}{r}3x - y = 2\\ x + y = 6\end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{r}x - y = -2\\ 2x + y = 8\end{array}\right\}$ son equivalentes, ya que tienen la misma solución: $x = 2$, $y = 4$

Si representamos gráficamente ambos sistemas, obtenemos:

Recta $r$: $3x - y = 2$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | −2 | 1 | 4 | 7 |

Recta $t$: $x - y = -2$

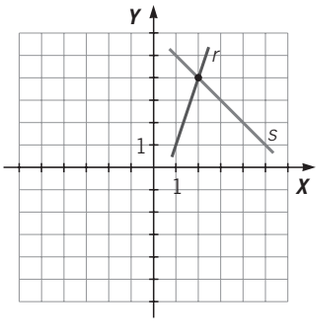
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 3 | 4 | 5 |

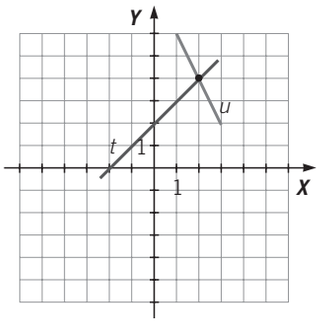
Recta $s$: $x + y = 6$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | 6 | 5 | 4 | 3 |

Recta $u$: $2x + y = 8$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | 8 | 6 | 4 | 2 |




El punto donde se cortan los dos pares de rectas es el mismo: (2, 4), que es la solución de ambos sistemas. Son sistemas equivalentes.

**2** **Representa gráficamente las dos ecuaciones de los sistemas. ¿Son equivalentes?**

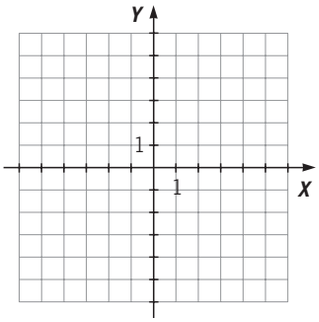
a) $\left.\begin{array}{r}x - 3y = 4\\ x + y = 0\end{array}\right\}$

Recta $r$: $x - 3y = 4$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | | | | |

Recta $s$: $x + y = 0$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | | | | |



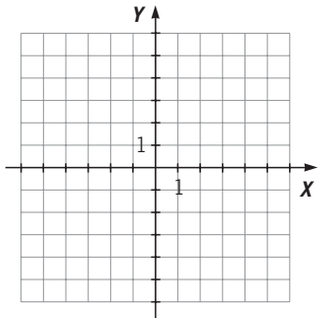

b) $\left.\begin{array}{r}5x - y = 6\\ x + y = 2\end{array}\right\}$

Recta $t$: $5x - y = 6$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | | | | |

Recta $u$: $x + y = 2$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | | | | |




ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 5 OBJETIVO 2
## RESOLVER SISTEMAS DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

- Una **solución** de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es un par de números que verifica las dos ecuaciones. Si un sistema tiene solución, se dice que es **compatible**.
- **Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas** es encontrar la solución o las soluciones de dicho sistema.

**EJEMPLO**

**Estudia si el par de números (2, 3) es solución del sistema de ecuaciones** $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\}$.

Para ver si el par de números (2, 3) es solución del sistema, hay que comprobar si cumplen o no las dos ecuaciones. Sustituyendo en ambas ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ \rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de números (2, 3) es una solución del sistema, y el sistema es compatible.

Para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas hay tres métodos de resolución:

(I) Método de **sustitución**.
(II) Método de **igualación**.
(III) Método de **reducción**.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de sustitución**:

- **Despejar** la incógnita en una de las ecuaciones.
- **Sustituir** la expresión obtenida en la otra ecuación.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

**EJEMPLO**

**Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución:** $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\}$

- **Elegimos** para despejar la incógnita $x$ de la segunda ecuación: $x = 8 - 2y$
- **Sustituimos** esta incógnita en la primera ecuación:

$$2x - y = 1 \rightarrow 2 \cdot (8 - 2y) - y = 1$$

- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita $y$ obtenida:

$$16 - 4y - y = 1 \rightarrow 16 - 5y = 1 \rightarrow -5y = 1 - 16 = -15 \rightarrow y = \frac{-15}{-5} \rightarrow y = 3$$

- **Sustituimos** el valor $y = 3$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 1 \rightarrow 2x - 3 = 1 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (2, 3) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1 \\ \rightarrow 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8 \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de valores $x = 2$, $y = 3$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 301



**1** **Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x + y = 13 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 9 \\ 2x - 9y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 0 \\ 3x - y = 14 \end{array}\right\}$

**2** **Resuelve por el método de sustitución, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x + 3}{6} + y = 2 \\ \dfrac{2x}{3} + 3y = -1 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, seguimos estos pasos.

1.º En cada ecuación reducimos a común denominador:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{5x + 3}{6} + \dfrac{6y}{6} = \dfrac{6 \cdot 2}{6} \\ \dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y \cdot 3}{3} = -\dfrac{1 \cdot 3}{3} \end{array}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 3 + 6y = 12 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

3.º Resolvemos por sustitución el sistema resultante, comprobando la solución:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + 6y = 9 \\ 2x + 9y = -3 \end{array}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

**3** **Resuelve por el método de sustitución y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $$\left.\begin{aligned} \frac{2x+3}{2} + \frac{y}{4} &= 1 \\ \frac{5x-1}{2} - \frac{4y+39}{5} &= -1 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \frac{5x+3}{6} + \frac{y-1}{4} &= 2 \\ \frac{x-2}{5} - \frac{y+5}{10} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} \frac{3x-6}{3} - \frac{2y-3}{7} &= -1 \\ x + \frac{3y}{2} &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de igualación**:

- **Sustituir** la misma incógnita en las dos ecuaciones.
- **Igualar** las expresiones obtenidas.
- **Resolver** la ecuación con una incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

## EJEMPLO

**Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación.**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{2x - y = 3} \\ \mathbf{x + y = 12} \end{array}\right\}$$

- **Elegimos** para despejar la incógnita $y$ de las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 3 \\ y = 12 - x \end{array}\right\}$$

- **Igualamos** las expresiones obtenidas: $2x - 3 = 12 - x$
- **Resolvemos** la ecuación con la incógnita $x$ obtenida:

$$2x + x = 12 + 3 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$$

- **Sustituimos** el valor $x = 5$ en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera:

$$2x - y = 3 \rightarrow 2 \cdot 5 - y = 3 \rightarrow 10 - 3 = y \rightarrow y = 7$$

- **Comprobamos** la solución obtenida. Para ello hemos de sustituir el par de valores (5, 7) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 5 - 7 = 10 - 7 = 3 \\ 5 + 7 = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de valores $x = 5$, $y = 7$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

**4** **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución del siguiente sistema de ecuaciones con fracciones.**

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{2}} + \dfrac{\mathbf{2y+2}}{\mathbf{3}} = \mathbf{2} \\ \dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}} - \dfrac{\mathbf{y-4}}{\mathbf{6}} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

1.º Reducimos a común denominador las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{3(x+1)}{6} + \dfrac{2(2y+2)}{6} = \dfrac{12}{6} \\ \dfrac{2x}{6} - \dfrac{y-4}{6} = 0 \end{array}\right\}$$

2.º Quitamos los denominadores:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 3 + 4y + 4 = 12 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

3.º Resolvemos por igualación el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{array}\right\}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 5

**5** **Resuelve por el método de igualación, y comprueba la solución de los sistemas de ecuaciones con fracciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} + \dfrac{y+4}{3} = 1 \\ x - \dfrac{y-1}{3} = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{y+1}{5} - y = -2 \\ \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{5} = -\dfrac{1}{15} \end{array}\right\}$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el **método de reducción**:

- **Buscar un sistema equivalente** en el que los coeficientes de una misma incógnita sean iguales u opuestos.
- **Restar** o **sumar** las dos ecuaciones obtenidas, eliminando una incógnita.
- **Resolver** la ecuación con una sola incógnita que resulta.
- **Sustituir** el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener la otra incógnita.
- **Comprobar** que la solución obtenida verifica ambas ecuaciones.

## EJEMPLO

**Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción.**

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x - 2y = 1} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 18} \end{array}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**. Para ello, **elegimos** la incógnita que sea más sencilla para reducir, en este caso *x*. Multiplicamos la primera ecuación por 5:

$$5(x - 2y = 1) \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x - 10y = 5 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\}$$

- **Restamos** las dos ecuaciones del sistema para eliminar los términos con *x* y reducir el sistema:

$$\begin{array}{rrr} \cancel{5x} - 10y = & 5 \\ -(\cancel{5x} + \ \ 3y = & 18) \\ \hline -13y = & -13 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida:

$$-13y = -13 \rightarrow y = 1$$

- **Sustituimos** el valor obtenido en una de las dos ecuaciones del sistema, en la que resulta más sencilla para operar, en este caso la primera:

$$x - 2y = 1 \rightarrow x - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow x = 3$$

- **Comprobamos** el resultado. Para ello hemos de sustituir el par de valores (3, 1) en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y = 1 \\ 5x + 3y = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 1 = 1 \\ 18 = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumple la ecuación.} \end{array}$$

Por tanto, el par de valores $x = 3$, $y = 1$ es la solución del sistema, y el sistema es compatible.

**6** **Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba la solución.**

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x - 2y = 7} \\ \mathbf{2x + 3y = 9} \end{array}\right\}$$

- Obtenemos un **sistema equivalente**:

  En este caso, la variable *x* o la variable *y* no aparecen multiplicadas por 1 en ninguno de los términos de las ecuaciones, así que podemos elegir una u otra. Elegimos, por ejemplo, la variable *y*.

  Para lograr que los dos términos con variable *y* tengan el mismo coeficiente, hay que multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, de forma que:

$$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot (3x - 2y = 7) \\ 2 \cdot (2x + 3y = 9) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 9x - 6y = 21 \\ 4x + 6y = 18 \end{array}\right\}$$

- **Sumamos** las dos ecuaciones para eliminar los términos con *y*:

$$\begin{array}{rr} & \left.\begin{array}{r} 9x - \cancel{6y} = 21 \\ 4x + \cancel{6y} = 18 \end{array}\right\} \\ + & \\ \hline & 13x \qquad = 39 \end{array}$$

- **Resolvemos** la ecuación obtenida: $x = \ldots$
- **Sustituimos** este valor en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar el valor de *y*:

- **Comprobamos** la solución:

**7** **Resuelve por el método de reducción los sistemas y comprueba las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 7x + 3y = 2 \\ 5x + 2y = 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x - 3y = 3 \\ 2x + 5y = 72 \end{array}\right\}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

**8** **Resuelve los siguientes sistemas por los tres métodos. Comprueba la solución y decide cuál de los métodos es más sencillo para resolver cada sistema.**

a) $\left.\begin{array}{r} 4x - 5y = 0 \\ 3x - 4y = -1 \end{array}\right\}$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es _____

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - y = 19 \end{array}\right\}$

- Por sustitución:

- Por igualación:

- Por reducción:

En este caso, el método más adecuado es _____

829566 _ 0249-0308.qxd 27/6/08 09:21 Página 307

OBJETIVO 3

# RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES 5

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Para resolver un problema mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas hay que realizar los siguientes pasos.

1.º **Comprender** el problema.
2.º **Plantear** las ecuaciones y formar el sistema de ecuaciones.
3.º **Resolver** el sistema de ecuaciones mediante cualquiera de los tres métodos.
4.º **Comprobar** que la solución cumple las condiciones del enunciado.

## EJEMPLO

**La suma de los goles marcados por dos equipos es 30, y cuando ambos equipos hayan marcado 5 goles más, la diferencia entre ambos equipos será de 2 goles. Halla los goles marcados por cada equipo.**

1.º Lee el problema las veces que sea necesario hasta comprender su enunciado.

2.º Plantea las ecuaciones y forma el sistema:

- Elegir las incógnitas: $x =$ número de goles marcados por el equipo A
  $y =$ número de goles marcados por el equipo B
- Plantear el problema:

| | AHORA | CUANDO HAYAN MARCADO 5 GOLES MÁS |
|---|---|---|
| Equipo A → | $x$ → | $x + 5$ |
| Equipo B → | $y$ → | $y + 5$ |
| | $x + y = 30$ | $(x + 5) - (y + 5) = 2$ |

- Formar el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ (x+5) - (y+5) = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

3.º Resuelve el sistema por el método que creas más conveniente, en este caso por reducción.
Sumamos ambas ecuaciones, para eliminar los términos con $y$:

$$\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ + \quad x - y = \ \ 2 \end{array}\right\} \\ \hline 2x = 32 \end{array} \rightarrow x = 16$$

Sustituyendo en la primera ecuación: $16 + y = 30 \rightarrow y = 14$
Por tanto, el equipo A ha marcado 16 goles, y el equipo B, 14 goles.

4.º Comprobamos la solución:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 16 + 14 = 30 \\ 16 - 14 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 30 = 30 \\ 2 = 2 \end{array}\right\}$$

Ambas ecuaciones se cumplen, y la solución obtenida es correcta.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

**1** **Calcula dos números cuya suma es 15 y su diferencia es 1.**

# 5

**2** **En un corral, entre gallinas y ovejas hay 27 animales, y contando las patas hay 76 patas en total. ¿Cuántas gallinas y ovejas hay?**

**3** **En un aparcamiento hay 90 vehículos, entre coches y motos. Si salieran 40 coches y 10 motos, el número de coches igualaría el número de motos. Halla el número de coches y de motos que hay en el aparcamiento.**

**4** **Una chica compra 2 refrescos y 3 bolsas de pipas por 3,50 €, y un chico compra 3 refrescos y 5 bolsas de pipas por 5,50 €. Halla lo que cuesta cada refresco y cada bolsa de pipas.**

# 6 Semejanza

## INTRODUCCIÓN

El primer objetivo de esta unidad es repasar el teorema de Tales y usarlo para dividir un segmento en partes iguales.

Como aplicación de dicho teorema, tratamos los criterios de semejanza de los triángulos en general, y de los triángulos rectángulos en particular, aplicándolos en la resolución de casos prácticos.

En la segunda parte estudiamos las semejanzas y, sobre todo, los criterios de semejanza de polígonos, así como la relación que existe entre las áreas de figuras semejantes.

Como último objetivo de esta unidad, trabajamos con escalas numéricas y gráficas, su utilización en planos y mapas, aplicándolas al caso del plano de una vivienda.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

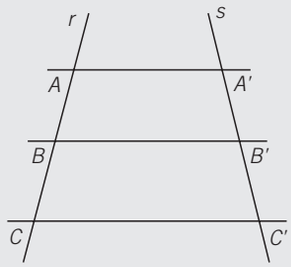
- *Teorema de Tales*: si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes *r* y *s*, los segmentos que se forman sobre *r* son proporcionales a los segmentos formados sobre *s*.
- *Criterios de semejanza de triángulos*: dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales; si tienen dos ángulos iguales, o si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.
- *Criterios de semejanza de triángulos rectángulos*: dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen dos pares de lados proporcionales, o si tienen un ángulo agudo igual.
- Dos *polígonos son semejantes* si sus ángulos homólogos son iguales, o si sus lados homólogos son proporcionales.
- El cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.
- La *escala* es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación en un plano, mapa, maqueta, etc.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Conocer y aplicar el teorema de Tales. | • Teorema de Tales. | • Cálculo de un segmento, conocidos los otros tres segmentos en los que dos rectas paralelas cortan a dos rectas cualesquiera.<br>• División de un segmento en un número de partes iguales. |
| **2.** Semejanza de triángulos. | • Criterios de semejanza de triángulos.<br>• Criterios de semejanza de triángulos rectángulos. | • Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo.<br>• Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un triángulo rectángulo. |
| **3.** Semejanzas. | • Criterios de semejanza de polígonos. | • Aplicación de los criterios de semejanza para calcular los elementos de un polígono. |
| **4.** Relación entre áreas de figuras semejantes. | • Cociente entre las superficies de dos figuras semejantes. | • Obtención de las medidas de los lados de un rectángulo, conocidos su área, y el área y los lados de un rectángulo semejante. |
| **5.** Escalas. | • Escalas numérica y gráfica. | • Cálculo de distancias o dimensiones sobre un plano, representado a escala. |

# 1 OBJETIVO 1
## CONOCER Y APLICAR EL TEOREMA DE TALES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**TEOREMA DE TALES**




Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas secantes *r* y *s*, los segmentos que se forman sobre la recta *r* son proporcionales a los segmentos formados sobre *s*.

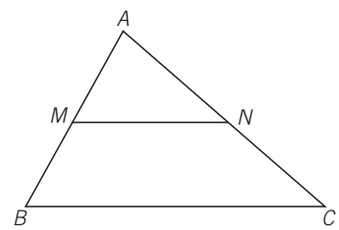
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

**EJEMPLO**

Aplicando el teorema de Tales al triángulo de la figura, en el que se ha trazado una recta paralela al lado *BC*, que corta a los otros lados en los puntos *M* y *N*, resulta:

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

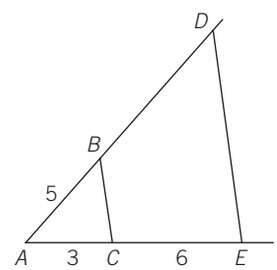
Los triángulos $\widehat{AMN}$ y $\widehat{ABC}$ están en posición de Tales.




**1** **Calcula la longitud de *BD* en la figura.**

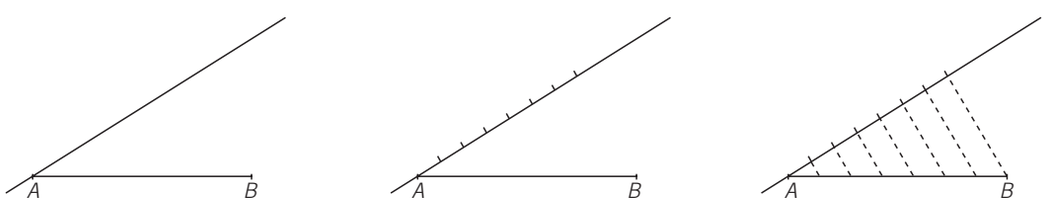
Aplicando el teorema de Tales, tenemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \rightarrow \frac{5}{3} = \frac{AD}{9} \rightarrow AD = ____$$




**EJEMPLO**

Dividimos el segmento *AB* en 7 partes iguales: sobre una recta auxiliar que pase por *A*, marcamos con una regla 7 unidades iguales, de 1 cm. Unimos la séptima marca con el extremo *B* del segmento, y trazamos rectas paralelas a esa línea discontinua desde las demás marcas.




El segmento *AB* ha quedado dividido en siete partes iguales.

**2** **Divide en 5 partes iguales el segmento *AB* de la figura.**

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 311

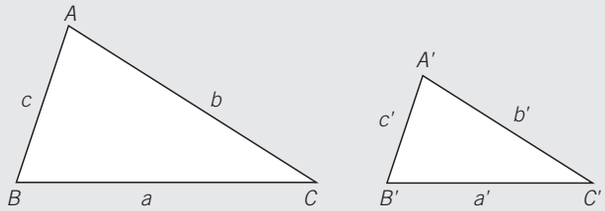
OBJETIVO 2

# SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Dos triángulos son **semejantes** si tienen sus ángulos iguales y sus lados son proporcionales.




$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}'\end{array}\right\} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Los vértices homólogos son $A$ y $A'$, $B$ y $B'$ o $C$ y $C'$.
Los lados homólogos son $a$ y $a'$, $b$ y $b'$ o $c$ y $c'$.

Razón de semejanza: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

**CRITERIOS DE SEMEJANZA**

Dos triángulos son semejantes si cumplen alguno de estos criterios.

- Tienen sus tres lados proporcionales.
- Presentan dos ángulos iguales.
- Poseen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

## EJEMPLO

**¿Son semejantes el triángulo de lados $a = 18$ cm, $b = 12$ cm y $c = 10$ cm, y el triángulo de lados $a' = 45$ cm, $b' = 30$ cm y $c' = 25$ cm?**

Veamos si los lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{18}{45} = \frac{12}{30} = \frac{10}{25} \rightarrow \frac{2 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 5} = \frac{2^2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5}{5^2} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

Se cumple el primer criterio de semejanza; por tanto, los dos triángulos son semejantes.

**1** **Comprueba si son semejantes las parejas de triángulos.**

a) $\hat{A} = 43°$, $\hat{C} = 81°$
$\hat{A}' = 43°$, $\hat{B}' = 56°$

b) $a = 10$, $b = 20$, $c = 30$
$a' = 20$, $b' = 30$, $c' = 50$

c) $\hat{A} = 30°$, $b = 3$, $c = 5$
$\hat{A}' = 30°$, $b' = 6$, $c' = 10$

d) $\hat{A} = 45°$, $b = 2$, $c = 7$
$\hat{A}' = 45°$, $b' = 4$, $c' = 5$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

**2** **Los lados de un triángulo miden 9 cm, 3 cm y 6 cm. Halla los lados de un triángulo semejante, sabiendo que la razón de semejanza vale 3.**

$$\frac{9}{a'} = \frac{3}{b'} = \frac{6}{c'} = 3 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{a'} = 3 \rightarrow a' = _____ \\ \dfrac{3}{b'} = 3 \rightarrow b' = _____ \\ \dfrac{6}{c'} = 3 \rightarrow c' = _____ \end{cases}$$

**3** **Los lados de un triángulo miden 3 cm, 1 cm y 2 cm. El perímetro de un triángulo semejante a él mide 30 cm. Halla la razón de semejanza y los lados del nuevo triángulo.**

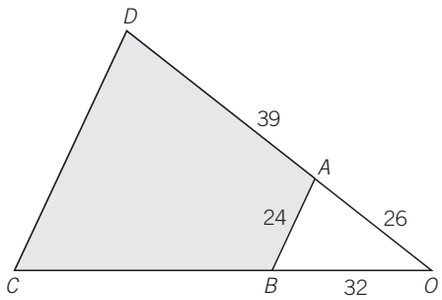
Ten en cuenta que si dos triángulos son semejantes, sus perímetros también guardan la relación de semejanza.

$$\frac{3+1+2}{30} = r \rightarrow r = \frac{6}{30} = _____$$

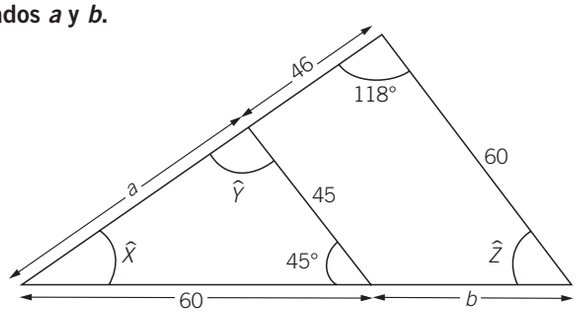
Y despejando, tenemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow a' = _____ \\ \dfrac{1}{b'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow b' = _____ \\ \dfrac{2}{c'} = \dfrac{1}{5} \rightarrow c' = _____ \end{cases}$$

**4** **El jardín de la figura tiene la forma del cuadrilátero *ABCD*, con sus lados *AB* y *CD* paralelos. Calcula lo que miden los lados *BC* y *CD*.**



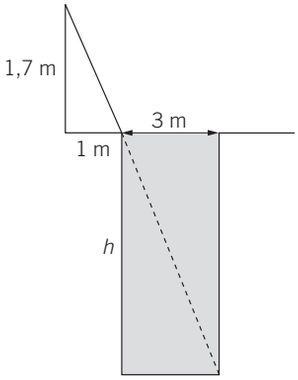

**5** **Halla los valores de los ángulos $\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$ y de los lados *a* y *b*.**



829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 313



**6** **Determina la profundidad de una piscina que mide 3 m de ancho, sabiendo que una persona que mide 1,7 m de altura, y que está situada a 1 m del borde, visualiza la esquina inferior de la piscina.**




**CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS**

En el caso de triángulos rectángulos, los criterios de semejanza anteriores se simplifican. Así, dos triángulos rectángulos son semejantes cuando cumplen uno de estos criterios.

- Si tienen dos pares de lados proporcionales.
- Si tienen un ángulo agudo igual.

**EJEMPLO**

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ABM}$ son semejantes, ya que tienen un ángulo agudo igual, $\widehat{B}$.

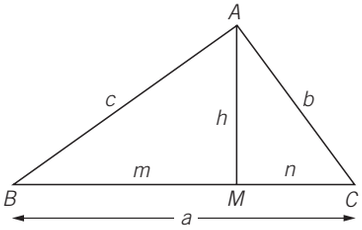
$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$$

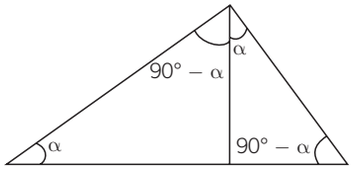
Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AMC}$ son semejantes, porque tienen un ángulo agudo igual, $\widehat{C}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

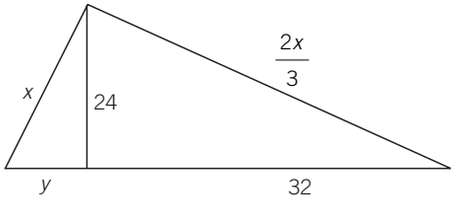
Los triángulos $\widehat{AMB}$ y $\widehat{AMC}$ son semejantes, pues tienen sus tres ángulos iguales.

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$




**7** **Calcula lo que miden los lados indicados con incógnitas.**




**8** **Un padre y su hijo están esperando en la parada del autobús. La sombra del padre mide 1,2 m, y la del hijo mide 1,07 m. Sabiendo que el hijo mide 1,65 m, calcula la estatura del padre.**

# 6 OBJETIVO 3
## SEMEJANZAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

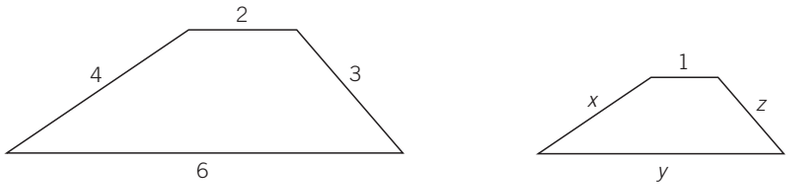
Las **semejanzas** transforman una figura dada en otra figura con la misma forma y distinto tamaño.
Las semejanzas se diferencian de las traslaciones y los giros en que no son movimientos.

Dos **polígonos** son **semejantes** si:

- Sus ángulos homólogos son iguales.
- Los lados homólogos son proporcionales, siendo el cociente entre un lado y su lado homólogo igual a la razón de semejanza.

**EJEMPLO**

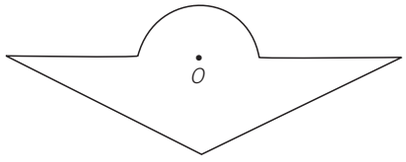
**Halla la longitud de los lados de la segunda figura para que sea semejante a la primera.**




Como las dos figuras son semejantes, existe una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados:

$\frac{2}{1} = \frac{4}{x} = \frac{6}{y} = \frac{3}{z}$ $\quad 2 = \frac{4}{x} \rightarrow x =$ _____ $\quad 2 = \frac{6}{y} \rightarrow y =$ _____ $\quad 2 = \frac{3}{z} \rightarrow z =$ _____

**1** **Construye una figura semejante a la siguiente, de manera que la razón de semejanza entre ambas sea $\frac{1}{2}$, tomando como referencia el punto *O*.**




**2** **Los lados de un triángulo miden 3, 5 y 7 cm. El perímetro de un triángulo semejante a él mide 45 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza? Calcula los lados del nuevo triángulo.**

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 315

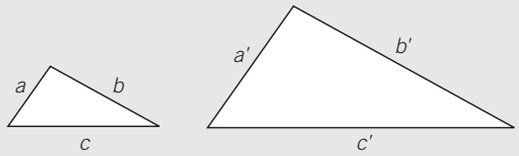
OBJETIVO 4

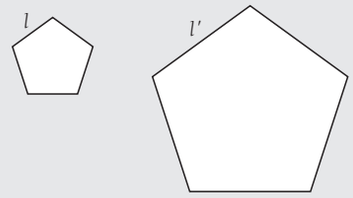
# RELACIÓN ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMEJANTES



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

El cociente entre las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de **semejanza**.




$\frac{a}{a'} = r =$ razón de semejanza $\rightarrow \frac{S}{S'} = r^2$

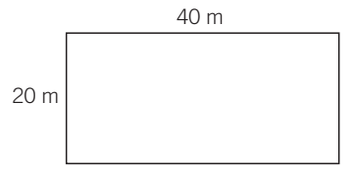
$\frac{l}{l'} = r =$ razón de semejanza $\rightarrow \frac{S}{S'} = r^2$

## EJEMPLO

**Un agricultor ha cercado su huerta con una valla de alambre, que tiene la forma y dimensiones de la figura.**

**a) ¿Cuántos metros de valla necesitaría para cercar una huerta semejante, con la mitad de superficie que la anterior?**

**b) ¿Y si quisiera vallar una huerta semejante, que fuera tres veces mayor?**

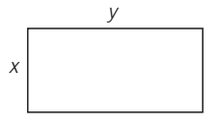



a) La huerta inicial tiene esta superficie: $S = 20 \cdot 40 = 800$ m$^2$. Como la nueva huerta tiene la mitad de superficie que la anterior, medirá: $\frac{800}{2} = 400$ m$^2$. Aplicando la relación entre ambas superficies obtendremos la razón de semejanza: $\frac{800}{400} = r^2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

Así, la nueva huerta medirá:

$$\frac{20}{x} = \sqrt{2} \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \sqrt{2} \rightarrow y = \frac{40}{\sqrt{2}} = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \text{ m}$$



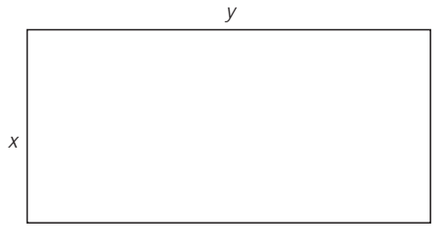

b) Como la nueva huerta tiene una superficie que es tres veces mayor que la primera, tendrá: $3 \cdot 800 = 2.400$ m$^2$. Aplicando la relación entre ambas superficies obtendremos la razón de semejanza:

$$\frac{800}{2.400} = r^2 \rightarrow \frac{1}{3} = r^2 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

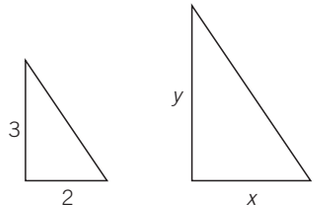
Así, la nueva huerta medirá:

$$\frac{20}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\frac{40}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{40 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$




**1** **Sabiendo que la relación de semejanza entre los dos triángulos de la figura es de $\frac{1}{4}$, halla el área del segundo triángulo.**




ADAPTACIÓN CURRICULAR

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 316

# 6 OBJETIVO 5
# ESCALAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

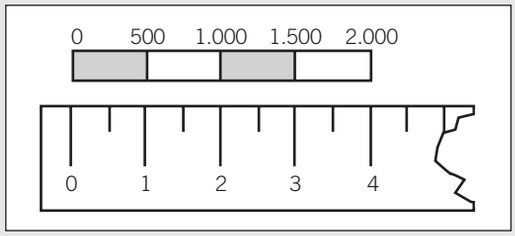
La **escala** es la razón de semejanza entre el objeto original y su representación, que puede ser un plano, un mapa, una maqueta, etc.

La escala puede venir representada en forma numérica o gráfica.

Escala numérica: 1 : 500

En ambos casos, 1 unidad sobre el plano representa 500 unidades en la realidad.

Escala gráfica:




## EJEMPLO

**Calcula las dimensiones de las habitaciones del piso al que le corresponde el siguiente plano, representado a escala 1 : 200.**

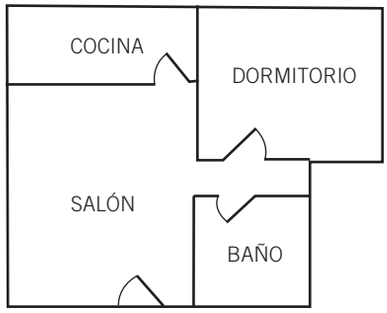
Midiendo con la regla graduada las diferentes habitaciones, obtenemos:

*Salón:*
2,5 cm · 3 cm → 500 cm · 600 cm = 5 m · 6 m

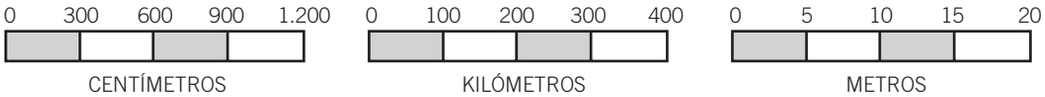
*Cocina:*
2,5 cm · 1 cm → 500 cm · 200 cm = 5 m · 2 m

*Dormitorio:*
2,5 cm · 2 cm → 500 cm · 400 cm = 5 m · 4 m

*Baño:*
1,5 cm · 1,5 cm → 300 cm · 300 cm = 3 m · 3 m




**1** **Mide con la regla y escribe la escala numérica correspondiente a las escalas gráficas.**




**2** **Dibuja las escalas gráficas correspondientes a las siguientes escalas numéricas.**

a) 1 : 500 b) 1 : 6.000 c) 1 : 100.000

**3** **En un mapa de carreteras a escala 1 : 5.000.000 medimos la distancia que hay en línea recta entre dos ciudades, siendo de 4,5 cm. ¿Qué distancia en kilómetros habrá en la realidad?**

# 7 Trigonometría

## INTRODUCCIÓN

En esta unidad se pretende que los alumnos adquieran los conocimientos básicos en trigonometría, que serán necesarios en cursos posteriores, sobre todo para alumnos de las opciones de Ciencias, Tecnología o Biosanitarias.

En la unidad se trabaja con tres funciones: seno, coseno y tangente, dejando para cursos posteriores sus funciones inversas: cosecante, secante y cotangente, así como las relaciones que se deducen de ellas.

Se aplican dichas funciones en la resolución de triángulos, sean rectángulos o no (cálculo de la altura), y por último, se estudia la conversión de grados en radianes.

## RESUMEN DE LA UNIDAD

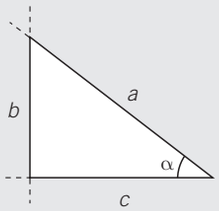
- Definiciones de *seno*, *coseno* y *tangente*.
- Cálculo de dichas razones para ángulos notables: 30°, 45° y 60°.
- Signos del *seno*, *coseno* y *tangente* para ángulos en distintos cuadrantes de la *circunferencia goniométrica*.
- *Razones trigonométricas* de ángulos: complementarios, suplementarios, opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360°.
- Relación fundamental y expresión de la tangente.
- Resolución de triángulos rectángulos y cálculo de la altura en triángulos no rectángulos.
- Conversión de *grados sexagesimales* a *radianes*.

| OBJETIVOS | CONTENIDOS | PROCEDIMIENTOS |
|---|---|---|
| **1.** Razones trigonométricas. | • Definiciones de seno, coseno y tangente. | • Seno, coseno y tangente de triángulos rectángulos. |
| **2.** Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º y 60º. | • Seno, coseno y tangente de los ángulos de 30º, 45º y 60º. | • Cálculo de las razones de ángulos notables. |
| **3.** Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. | • Seno, coseno y tangente de ángulos de cualquiera de los cuatro cuadrantes. | • Deducción del signo del seno, el coseno y la tangente en cada uno de los cuatro cuadrantes. |
| **4.** Razones de ángulos complementarios y suplementarios. | • Seno, coseno y tangente de ángulos complementarios.<br>• Seno, coseno y tangente de ángulos suplementarios. | • Cálculo del seno, el coseno y la tangente de ángulos complementarios y suplementarios. |
| **5.** Razones trigonométricas de ángulos de distintos cuadrantes. | • Seno, coseno y tangente de ángulos opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360º. | • Cálculo del seno, el coseno y la tangente de ángulos opuestos, que difieren en 90°, que difieren en 180° y mayores de 360º. |
| **6.** Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo. | • Relación fundamental de la trigonometría. Tangente en función de seno y coseno. | • Obtención de dos razones trigonométricas, conocida la tercera. |
| **7.** Aplicaciones de las razones trigonométricas. | • Cálculo de lados y ángulos de un triángulo rectángulo, conocidos algunos de ellos.<br>• Obtención de la altura de un triángulo no rectángulo. | • Aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas para hallar los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo. |
| **8.** Medida de ángulos en radianes. | • Definición de radián. | • Conversión de ángulos notables expresados en grados a radianes. |

# 7 OBJETIVO 1
## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

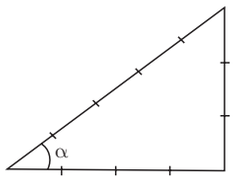
Dado un triángulo rectángulo, definimos las **razones trigonométricas** de uno de sus ángulos agudos $\alpha$:




| seno | coseno | tangente |
|---|---|---|
| $sen\ \alpha = \frac{b}{a}$ | $cos\ \alpha = \frac{c}{a}$ | $tg\ \alpha = \frac{b}{c}$ |
| (cateto opuesto dividido entre hipotenusa) | (cateto contiguo dividido entre hipotenusa) | (cateto opuesto dividido entre cateto contiguo) |

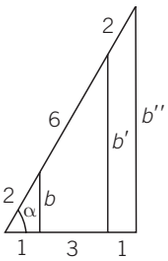
**EJEMPLO**

**Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ en el triángulo de la figura.**




$sen\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ $\quad$ $cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ $\quad$ $tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$

**1** **Completa las igualdades y comprueba que las razones trigonométricas son independientes del tamaño del triángulo elegido.**




Aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los tres triángulos de menor a mayor tamaño, hallamos $b$, $b'$ y $b''$:

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$b' = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 16} = 4\sqrt{3}$$

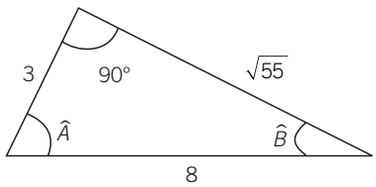
$$b'' = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3}$$

$sen\ \alpha = \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $sen\ \alpha = \frac{b'}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} =$ _____ $\quad$ $sen\ \alpha = \frac{b''}{10} = \frac{5\sqrt{3}}{10} =$ _____

$cos\ \alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $cos\ \alpha = \frac{c'}{a'} =$ _____ $=$ _____ $\quad$ $cos\ \alpha = \frac{c''}{a''} =$ _____ $=$ _____

$tg\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\quad$ $tg\ \alpha = \frac{b'}{c'} = \frac{4\sqrt{3}}{4} =$ _____ $\quad$ $tg\ \alpha = \frac{b''}{c''} =$ _____ $=$ _____

**2** **Halla las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$.**



829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 319

OBJETIVO 2

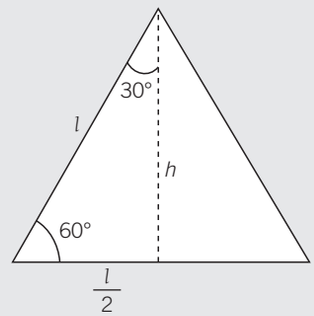
# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS DE 30°, 45° Y 60° 7

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60° se deducen a partir de un triángulo equilátero de lado $l$.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos su altura:

$$h^2 = l^2 - (l/2)^2 = l^2 - l^2/4 = 3l^2/4 \rightarrow h = l \cdot \sqrt{3}/2$$




Las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

$$sen\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l/2} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

**1** **Deduce las razones trigonométricas del ángulo de 30° a partir del triángulo equilátero anterior.**

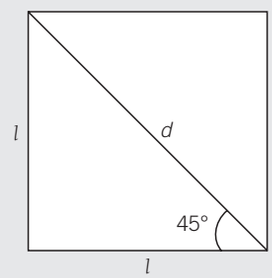
Las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$sen\ 30° = \frac{l/2}{l} = \frac{1}{2};\ cos\ 30° = \frac{l \cdot \sqrt{3}/2}{l} = _____;\ tg\ 30° = \frac{l/2}{l \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = _____$$

Las razones trigonométricas del ángulo de 45º se deducen a partir de un cuadrado y su diagonal.

Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la diagonal:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \rightarrow d = l \cdot \sqrt{2}$$




Las razones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$sen\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad cos\ 45° = \frac{l}{l \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad tg\ 45° = \frac{l}{l} = 1$$

**2** **Completa la tabla con las razones trigonométricas de ángulos notables.**

| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***sen*** | 0 | — | — | — | 1 | 0 | –1 | 0 |
| ***cos*** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | — | $\frac{1}{2}$ | 0 | –1 | 0 | 1 |
| ***tg*** | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | no existe | 0 | no existe | 0 |

ADAPTACIÓN CURRICULAR

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 320

# 7 OBJETIVO 3
## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

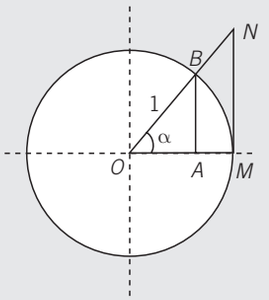
La circunferencia goniométrica o círculo unitario es una circunferencia de radio la unidad.

Sobre dicha circunferencia, el valor del seno coincide con el segmento *AB* y el coseno con el segmento *OA*.

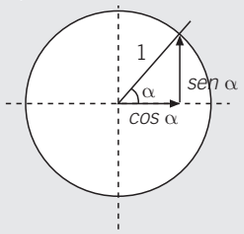
$$sen\ \alpha = \frac{AB}{1} = AB \qquad cos\ \alpha = \frac{OA}{1} = OA$$

La tangente coincide con el segmento *MN*, que es tangente a la circunferencia, ya que:

$$tg\ \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{MN}{OM} = \frac{MN}{1} = MN$$

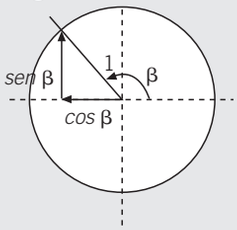



En el primer cuadrante:



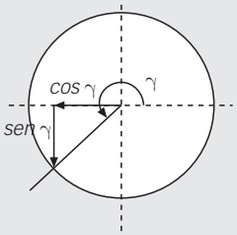

$sen\ \alpha > 0$
$cos\ \alpha > 0$
$tg\ \alpha > 0$

En el segundo cuadrante:



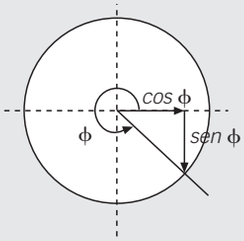

$sen\ \beta > 0$
$cos\ \beta < 0$
$tg\ \beta < 0$

En el tercer cuadrante:




$sen\ \gamma < 0$
$cos\ \gamma < 0$
$tg\ \gamma > 0$

En el cuarto cuadrante:

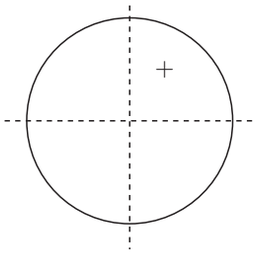



$sen\ \phi < 0$
$cos\ \phi > 0$
$tg\ \phi < 0$

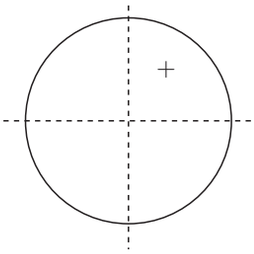
**1** **Completa la siguiente tabla con los signos que correspondan a las razones trigonométricas indicadas.**

| | 40° | 70° | 110° | 210° | 300° |
|---|---|---|---|---|---|
| ***sen*** | + | | | | |
| ***cos*** | + | | | | |
| ***tg*** | + | | | | |

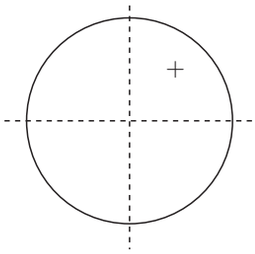
**2** **Escribe, para cada cuadrante, el signo del seno, el coseno y la tangente.**




seno




coseno




tangente

829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 321

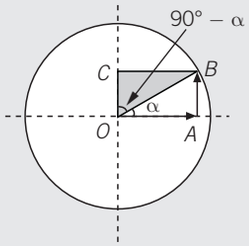
OBJETIVO 4

# RAZONES DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS



NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Ángulos **complementarios** son aquellos cuya suma vale 90°.




El cateto opuesto al ángulo de $90° - \alpha$ ($BC$) es igual al cateto contiguo a $\alpha$ ($OA$): $\boldsymbol{sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $90° - \alpha$ ($OC$) es igual al cateto opuesto a $\alpha$ ($AB$): $\boldsymbol{cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (90° - \alpha)} = \frac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \boldsymbol{\frac{1}{tg\ \alpha}}$$

## EJEMPLO

**Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 60°$, sabiendo que las razones del ángulo de 30° ($60° = 90° - 30°$) son:**

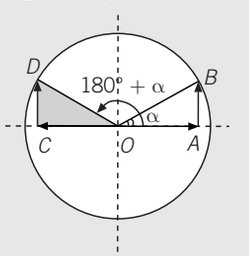
$$\boldsymbol{sen\ 30° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$sen\ 60° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = sen\ 30° = \frac{1}{2} \qquad tg\ 60° = \frac{1}{tg\ 30°} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

**1** **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 75°, sabiendo que las razones de 15° son:**

$sen\ 15° = 0{,}259$ $\qquad$ $cos\ 15° = 0{,}966$ $\qquad$ $tg\ 15° = 0{,}268$

Ángulos **suplementarios** son aquellos cuya suma vale 180°.




El cateto opuesto al ángulo de $180° - \alpha$ ($CD$) es igual al cateto opuesto a $\alpha$ ($AB$): $\boldsymbol{sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $180° - \alpha$ ($OC$) es el contrario del cateto contiguo a $\alpha$ ($OA$): $\boldsymbol{cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha}$

$$\boldsymbol{tg\ (180° - \alpha)} = \frac{sen\ (180° - \alpha)}{cos\ (180° - \alpha)} = \frac{sen\ \alpha}{-cos\ \alpha} = \boldsymbol{-tg\ \alpha}$$

## EJEMPLO

**Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, sabiendo que las razones del ángulo de 60° ($120° = 180° - 60°$) son:**

$$\boldsymbol{sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boldsymbol{cos\ 60° = \frac{1}{2}} \qquad \boldsymbol{tg\ 60° = \sqrt{3}}$$

$$sen\ 120° = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 120° = -cos\ 60° = -\frac{1}{2} \qquad tg\ 120° = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$$

**2** **Calcula las razones trigonométricas del ángulo de 155°, sabiendo que las razones de 25° son:**

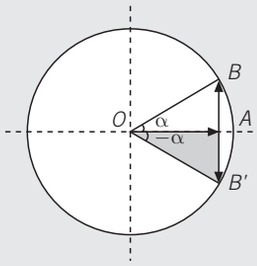
$sen\ 25° = 0{,}423$ $\qquad$ $cos\ 25° = 0{,}906$ $\qquad$ $tg\ 25° = 0{,}466$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

# 7 OBJETIVO 5
## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Los **ángulos opuestos** son los que miden igual, pero tienen distinto signo.




El cateto opuesto al ángulo $-\alpha$ ($AB'$) es el contrario al cateto opuesto a $\alpha$ ($AB$): $\boldsymbol{sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha}$

El cateto contiguo al ángulo $-\alpha$ ($OA$) es igual al cateto contiguo a $\alpha$ ($OA$): $\boldsymbol{cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha}$

$$\boldsymbol{tg\,(-\alpha)} = \frac{-sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \boldsymbol{-tg\,\alpha}$$

**EJEMPLO**

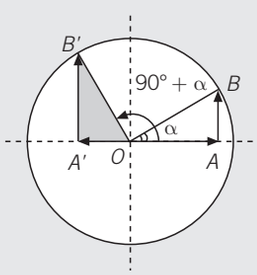
**Obtén las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = -20°$, sabiendo que las razones del ángulo de 20° son:**

$\boldsymbol{sen\,20° = 0{,}342}$ $\boldsymbol{cos\,20° = 0{,}940}$ $\boldsymbol{tg\,20° = 0{,}364}$

$sen\,(-20°) = -sen\,20° = -0{,}342$ $cos\,(-20°) = cos\,20° = 0{,}940$ $tg\,(-20°) = -tg\,20° = -0{,}364$

**1** **Halla las razones trigonométricas del ángulo de −45° (encuentra en la tabla del objetivo 2 las razones del ángulo de 45°).**

**ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 90°**




El cateto opuesto al ángulo de $90° + \alpha$ ($A'B'$) es el contrario al cateto contiguo a $\alpha$ ($OA$): $\boldsymbol{sen\,(90° + \alpha) = cos\,\alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $90° + \alpha$ ($OA'$) es igual al contrario del cateto opuesto a $\alpha$ ($AB$): $\boldsymbol{cos\,(90° + \alpha) = -sen\,\alpha}$

$$\boldsymbol{tg\,(90° + \alpha)} = \frac{sen\,(90° + \alpha)}{cos\,(90° + \alpha)} = \frac{cos\,\alpha}{-sen\,\alpha} = \boldsymbol{-\frac{1}{tg\,\alpha}}$$

**EJEMPLO**

**Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 120°$, conociendo las razones del ángulo de 30°.**

$$sen\,120° = cos\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

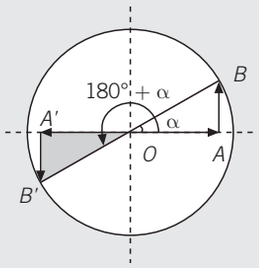
$$cos\,120° = -sen\,30° = -\frac{1}{2}$$

$$tg\,120° = -\frac{1}{tg\,30°} = -\frac{1}{1/\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

**2** **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 100°, sabiendo que 100° = 90° + 10°.**

$sen\,10° = 0{,}174$ $cos\,10° = 0{,}985$ $tg\,10° = 0{,}176$

**ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°**




El cateto opuesto al ángulo de $180° + \alpha$ ($A'B'$) es el contrario al cateto opuesto a $\alpha$ ($AB$): $\boldsymbol{sen\,(180° + \alpha) = -sen\,\alpha}$

El cateto contiguo al ángulo de $180° + \alpha$ ($OA'$) es igual al contrario del cateto contiguo a $\alpha$ ($OA$): $\boldsymbol{cos\,(180° + \alpha) = -cos\,\alpha}$

$$\boldsymbol{tg\,(180° + \alpha)} = \frac{sen\,(180° + \alpha)}{cos\,(180° + \alpha)} = \frac{-sen\,\alpha}{-cos\,\alpha} = \boldsymbol{tg\,\alpha}$$

**EJEMPLO**

**Halla las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 240°$, conociendo las razones del ángulo de 60°.**

$sen\,240° = -sen\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $cos\,240° = -cos\,60° = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $tg\,240° = tg\,60° = \sqrt{3}$

**3** **Halla las razones trigonométricas del ángulo de 250°, sabiendo que:**

$sen\,70° = 0{,}940$ $\qquad$ $cos\,70° = 0{,}342$ $\qquad$ $tg\,70° = 2{,}747$

Ten en cuenta que $250° = 180° + 70°$.

**RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 90°: Reducción al primer cuadrante**

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo superior a 90° se pueden expresar en función de las razones de otro ángulo perteneciente al primer cuadrante.

1.er caso: para ángulos del segundo cuadrante.

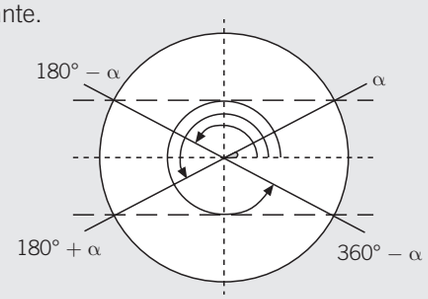
$\beta = 180° - \alpha$

2.º caso: para ángulos del tercer cuadrante.

$\gamma = 180° + \alpha$

3.er caso: para ángulos del cuarto cuadrante.

$\varepsilon = 360° - \alpha$




**4** **Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) 135°

Como 135° pertenece al segundo cuadrante, resulta que 135° = 180° − _____

$sen\,135° =$ _____ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\,135° =$ _____ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\,135° =$ _____ $= -1$

b) 210°

Como 210° es mayor de 180°, pertenece al tercer cuadrante, pues 210° = 180° + _____

$sen\,210° =$ _____ $= -\frac{1}{2}$

$cos\,210° =$ _____ $= \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$tg\,210° =$ _____ $= \frac{\sqrt{3}}{3}$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

c) 330°

Como 330° pertenece al cuarto cuadrante, resulta que 330° = 360° − 30°.

$sen\ 330° = _____ = -\frac{1}{2}$

$cos\ 330° = _____ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330° = _____ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) 420°

¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de 420°? Si hacemos 420° = 360° + 60°, vemos que está situado en el primer cuadrante.

$sen\ 420° = sen\ 60° = _____$

$cos\ 420° = cos\ 60° = _____$

$tg\ 420° = tg\ 60° = _____$

**RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 360°**

Si el ángulo es mayor de 360°, hay que hallar su ángulo equivalente, restando el número entero de veces que contiene a 360. Sus razones trigonométricas son iguales que las del ángulo equivalente resultante.

**EJEMPLO**

**Determina las razones trigonométricas del ángulo $\alpha = 1.470°$.**

Dividimos 1.470 entre 360:

$1.470 = 360 \cdot 4 + 30$ dividendo = divisor · cociente + resto

$sen\ 1.470° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$ $cos\ 1.470° = cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg\ 1.470° = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**5** **Halla las razones trigonométricas de los ángulos.**

a) 840°

Divide 840 entre 360 y expresa:

$840 = 360 \cdot _____ + _____$

$sen\ 840° = sen\ _____ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos\ 840° = cos\ _____ = _____$

$tg\ 840° = tg\ _____ = -\sqrt{3}$

b) 3.915°

Divide 3.915 entre 360 y expresa:

$3.915 = 360 \cdot _____ + _____$

$sen\ 3.915° = sen\ _____ = _____$

$cos\ 3.915° = cos\ _____ = _____$

$tg\ 3.915° = tg\ _____ = _____$

c) 1.320°

Divide 1.320 entre 360 y expresa:

$1.320 = 360 \cdot _____ + _____$

$sen\ 1.320° = sen\ _____ = _____$

$cos\ 1.320° = cos\ _____ = _____$

$tg\ 1.320° = tg\ _____ = \sqrt{3}$

d) 780°

Divide 780 entre 360 y expresa:

$780 = 360 \cdot _____ + _____$

$sen\ 780° = sen\ _____ = _____$

$cos\ 780° = cos\ _____ = _____$

$tg\ 780° = tg\ _____ = _____$

OBJETIVO 6

# RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO 7

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA: $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$**

Esta relación se obtiene al aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo, junto con la relación que se deduce de la definición de tangente:

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

Conociendo una de las razones trigonométricas de un ángulo, podemos calcular las restantes razones.

## EJEMPLO

**Sabiendo que $cos\,\alpha = \frac{4}{5}$, calcula el seno y la tangente de dicho ángulo.**

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \qquad tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

**1** **Sabiendo que $sen\,\alpha = 0{,}78$; halla $cos\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

**2** **Dado $cos\,\alpha = 0{,}32$; obtén $sen\,\alpha$ y $tg\,\alpha$.**

## EJEMPLO

**Dado $tg\,\alpha = 2$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.**

Llamamos $sen\,\alpha = x$ y $cos\,\alpha = y$. Las relaciones entre las razones trigonométricas son:

$$\frac{x}{y} = 2 \rightarrow x = 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow (2y)^2 + y^2 = 1 \rightarrow 4y^2 + y^2 = 1 \rightarrow 5y^2 = 1 \rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0{,}2} = 0{,}447$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0{,}447 = 0{,}894 = sen\,\alpha$$

$$y = cos\,\alpha = 0{,}447$$

**3** **Sabiendo que $tg\,\alpha = 5$, calcula $sen\,\alpha$ y $cos\,\alpha$.**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

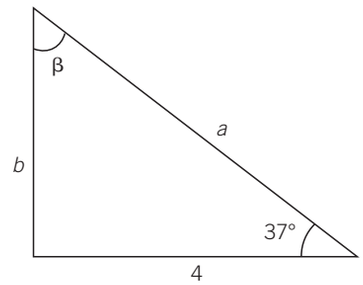
829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 326

# 7 OBJETIVO 7
## APLICACIONES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

**EJEMPLO**

**Calcula lo que miden los lados *a* y *b*, y el ángulo β del triángulo de la figura.**




Como los tres ángulos de un triángulo suman 180°, tenemos que:

$$180° = 90° + 37° + \beta \rightarrow \beta = 180° - 127° = 53°$$

Para calcular el otro cateto, *b*, aplicamos la definición de *tg* 37° y usamos la calculadora para hallar *tg* 37°:

$$tg\,37° = \frac{b}{4} \rightarrow b = 4 \cdot 0{,}75 = 3$$

Para hallar la hipotenusa *a* podemos utilizar tres métodos:

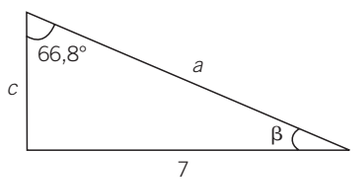
1.º Aplicar el teorema de Pitágoras.
2.º Utilizar la definición de *sen* 37°.
3.º Usar la definición de *cos* 37°.

Vamos a usar el segundo método:

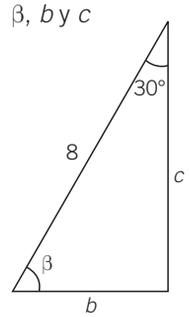
$$sen\,37° = \frac{3}{a} \rightarrow a = \frac{3}{0{,}6} = 5$$

**1** **Calcula, en cada triángulo, los lados y ángulos que se indican.**

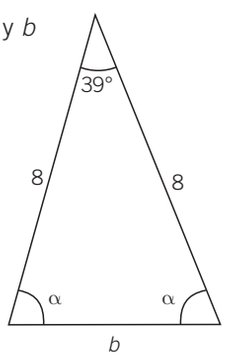
a) β, *a* y *c*



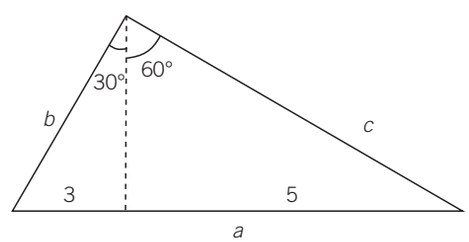

c) β, *b* y *c*




b) α y *b*

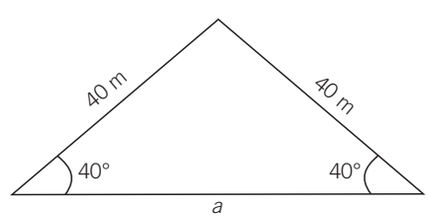



d) *a*, *b* y *c*




**2** **Halla el área del siguiente triángulo.**

Trazamos la altura y, fijándonos en uno de los dos triángulos que se forman, hallamos *h* y la mitad de la base, $\frac{a}{2}$.

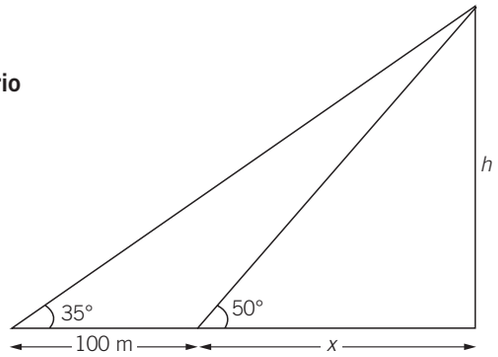


829566 _ 0309-0362.qxd 27/6/08 11:55 Página 327



## EJEMPLO

**Desde un punto vemos el extremo superior del campanario de la iglesia bajo un ángulo de 50º. Si nos alejamos 100 m, lo vemos bajo un ángulo de 35º. Halla la altura del campanario y la distancia a la que nos encontramos inicialmente.**




Este tipo de problemas se resuelven utilizando las tangentes de los dos ángulos:

$$tg\,50° = \frac{h}{x} \rightarrow h = 1{,}192x$$

$$tg\,35° = \frac{h}{100 + x} \rightarrow h = 0{,}7(100 + x)$$

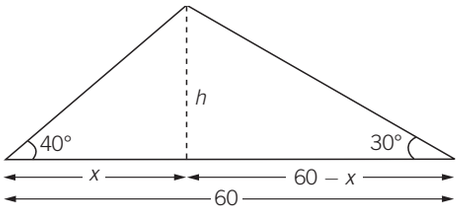
Igualando ambas, resulta:

$$1{,}192\,x = 0{,}7(100 + x) = 70 + 0{,}7x \rightarrow 0{,}492x = 70 \rightarrow x = 142{,}3 \text{ m}$$

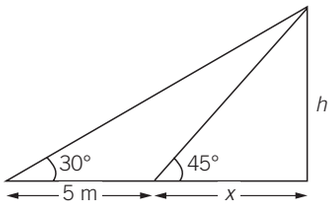
Sustituyendo en la primera de las ecuaciones, tenemos que la altura del campanario es:

$$h = 1{,}192x = 1{,}192 \cdot 142{,}3 = 169{,}6 \text{ m}$$

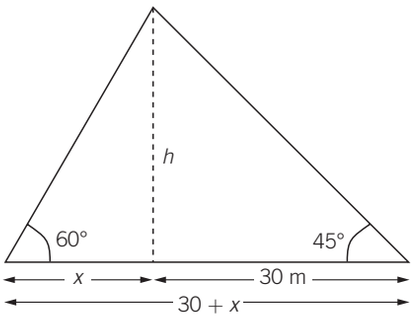
**3** **Calcula la altura *h* y las distancias *x* y 60 − *x* de la figura. Utiliza las tangentes de los ángulos de 40° y 30°.**




**4** **Halla los valores de *h* y *x*.**




**5** **Determina la altura del árbol que, visto desde dos posiciones, distantes 30 m entre sí, forma la siguiente figura.**




ADAPTACIÓN CURRICULAR

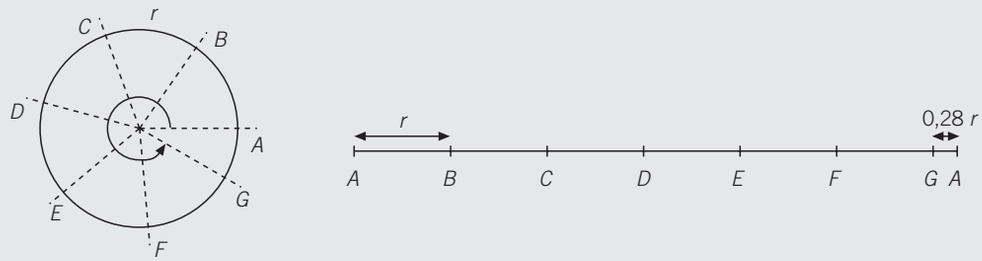
# 7 OBJETIVO 8
## MEDIDA DE ÁNGULOS EN RADIANES

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

Un **radián** es el ángulo cuyo arco tiene igual longitud que el radio de una circunferencia.
Como la longitud de cualquier circunferencia es $2\pi r$, la equivalencia entre grados y radianes es:

**360° = 2π radianes**

Podemos comprobar gráficamente esta equivalencia, ya que $2\pi = 6{,}28$, que es el número de secciones en las que se cumple que el arco es igual al radio en el que podemos dividir la circunferencia.




**EJEMPLO**

**Expresa en radianes los ángulos de 90°, 180° y 270°.**

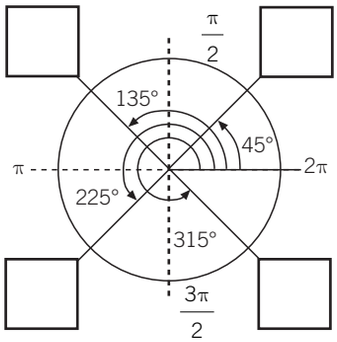
Convertimos los grados en radianes aplicando una regla de tres:

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 90° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{90 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 180° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{180 \cdot 2\pi}{360} = \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 270° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{270 \cdot 2\pi}{360} = \frac{3 \cdot 2\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

**1** **Convierte en radianes los ángulos de la tabla.**

| 0° | 30° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | $\frac{\pi}{2}$ | | | $\pi$ | | | $\frac{3\pi}{2}$ | | | $2\pi$ |

$$\left.\begin{array}{l} 360° \text{ —— } 2\pi \text{ radianes} \\ 30° \text{ —— } x \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 2\pi}{360} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

**2** **Convierte en radianes los ángulos correspondientes a cada casilla.**