Caderno de matemática 3 ESO
Segunda parte

Nome: _____

Grupo: ____

5 Sistemas de ecuacións

INTRODUCIÓN

A resolución de problemas é un dos fundamentos das Matemáticas. Á hora de resolver moitos problemas reais faise patente a necesidade dos sistemas de ecuacións.

Os alumnos deben ser capaces de recoñecer ecuacións con dúas incógnitas e obteren algunhas solucións delas. A obtención de sistemas equivalentes a un dado é prioritario, xa que permite calcular a solución do sistema dado facilmente.

Exponse ao longo da unidade os métodos de resolución de sistemas: método de substitución, método de igualación e método de redución. Débense indicar os pasos para resolver un sistema por cada un dos métodos mencionados, así como sinalar as súas similitudes e diferenzas cos outros métodos. Convén explicarlles tamén aos alumnos que a idoneidade de cada un deles depende dos coeficientes das incógnitas.

A resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións non resulta especialmente complexa no que á súa técnica se refire, pero haberá que insistir na necesidade de seguir as catro fases do método de resolución de problemas, xa vistas na unidade anterior.

RESUMO DA UNIDADE

- Un *sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas* x e y exprésase da forma:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\}$$

- *Resolver un sistema* é atopar dous números que, ao reemprazalos nas dúas ecuacións, satisfagan ambas simultaneamente. Un *sistema* é *compatible* se ten solución.
- *Método de substitución*: Despexar unha incógnita nunha ecuación e substituíla na outra. Resolver a ecuación que resulta. A outra incógnita obtense substituíndo o valor obtido en calquera ecuación. Comprobar o resultado.
- *Método de igualación*: Despexar a mesma incógnita nas dúas ecuacións. Igualar as expresións obtidas. Resolver a ecuación que resulta. A outra incógnita obtense substituíndo o valor obtido en calquera ecuación. Comprobar o resultado.
- *Método de redución*: Buscar un sistema equivalente onde os coeficientes dunha mesma incógnita sexan iguais e opostos. Restar ou sumar as ecuacións, eliminando unha incógnita e resolver a ecuación. A outra incógnita obtense substituíndo o valor obtido en calquera ecuación. Comprobar o resultado.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Identificar sistemas de ecuacións e os seus elementos.	• Sistemas de ecuacións con dúas incógnitas. • Coeficientes e termos independentes. • Solución dun sistema.	• Identificación dos elementos dun sistema de ecuacións con dúas incógnitas. • Comprobación das solucións dun sistema. • Sistemas compatibles.
2. Resolver sistemas mediante o método de substitución.	• Método de substitución.	• Resolución dun sistema polo método de substitución.
3. Resolver sistemas mediante o método de igualación.	• Método de igualación.	• Resolución dun sistema polo método de igualación.
4. Resolver sistemas mediante o método de redución.	• Método de redución.	• Resolución dun sistema polo método de redución. • Obtención de sistemas equivalentes.
5. Resolver problemas mediante sistemas de ecuacións.	• Formulación, resolución e comprobación dun sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas.	• Resolución de problemas mediante sistemas de dúas ecuacións. • Comprobación da solución.

5 OBXECTIVO 1
IDENTIFICAR SISTEMAS DE ECUACIÓNS E OS SEUS ELEMENTOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Un **sistema de dúas ecuacións lineais con dúas incógnitas** é un conxunto de dúas ecuacións das que se busca unha solución común.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = k \\ a'x + b'y = k' \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textbf{Coeficientes} \text{ das incógnitas: } a, a', b, b' \\ \textbf{Termos independentes: } k, k' \end{array}\right.$$

EXEMPLO

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - 2y = 2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Incógnitas: } x, y \\ \text{Coeficientes das incógnitas: } 1, 1, 1, -2 \\ \text{Termos independentes: } 5, 2 \end{array}\right.$$

1 **Determina as incógnitas, os coeficientes e os termos independentes destes sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y = 7 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -2x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}$

- Unha **solución** dun sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas é un par de números que verifica ambas as ecuacións.
- **Resolver un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas** é atopar as súas solucións.
- **Se un sistema ten solución**, é dicir, se se poden atopar dous números que cumpran as dúas ecuacións, dise que é **compatible**.

EXEMPLO

Comproba se o seguinte sistema de ecuacións ten como solución $x = 4$ e $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y = 5} \\ \boldsymbol{x - 2y = 2} \end{array}\right\}$$

Vexamos se a solución do enunciado verifica as dúas ecuacións do sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 4,\ y = 1} \left.\begin{array}{r} 4 + 1 = 5 \\ 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumpre a ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumpre a ecuación.} \end{array}$$

Polo tanto, $x = 4$ e $y = 1$ é unha solución do sistema. O sistema é compatible.

2 **Determina se $x = 0$ e $y = -1$ é solución destes sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 1 \\ x + 4y = 2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 4y = 2 \\ 3y = -3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 4y = -4 \end{array}\right\}$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE O MÉTODO DE SUBSTITUCIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Para resolver un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas polo método de substitución:

a) **Despexar** a incógnita nunha das dúas ecuacións.

b) **Substituír** a expresión obtida na outra ecuación.

c) **Resolver** a ecuación cunha incógnita que resulta.

d) **Substituír** o valor obtido en calquera das dúas ecuacións para obter a outra incógnita.

e) **Comprobar** que a solución obtida verifica ambas as ecuacións.

EXEMPLO

Resolve o seguinte sistema de ecuacións polo método de substitución.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\}$$

a) Eliximos para **despexar** a incógnita x da segunda ecuación.

$$x = 10 + y$$

b) **Substituímos** esta incógnita na primeira ecuación.

$$x + y = 30 \xrightarrow{x = 10 + y} (10 + y) + y = 30$$

c) **Resolvemos** a ecuación obtida.

$$\begin{aligned} (10 + y) + y &= 30 \\ 10 + y + y &= 30 \\ 10 + 2y &= 30 \\ 2y &= 30 - 10 \\ y &= \frac{20}{2} \\ \boxed{y = 10} \end{aligned}$$

d) **Substituímos** o valor $y = 10$ na primeira ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 30 \\ x + 10 &= 30 \\ \boxed{x = 20} \end{aligned}$$

e) **Comprobamos** a solución obtida. Para iso hai que substituír o par de valores (20, 10) nas dúas ecuacións.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 30 \\ x - y = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 20,\ y = 10} \left.\begin{array}{r} 20 + 10 = 30 \\ 20 - 10 = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumpre a ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumpre a ecuación.} \end{array}$$

A solución do sistema é o par de valores $x = 20$ e $y = 10$.

Polo tanto, o sistema de ecuacións ten solución, é dicir, é un sistema compatible.

1 **Resolve o sistema de ecuacións polo método de substitución.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\}$$

a) Eliximos para despexar a incógnita y na primeira ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y = 5 - x$$

b) Substituímos esta incógnita na segunda ecuación.

$$x - 2y = 2 \xrightarrow{y = 5 - x} x - 2(5 - x) = 2$$

c) Resolvemos a ecuación obtida.

$\boxed{x = }$

d) Substituímos o valor de x obtido nunha das ecuacións, por exemplo, na primeira.

$x + y = 5$

$\boxed{} + y = 2$

$\boxed{y = }$

Solución do sistema: $\boxed{x = }$ $\boxed{y = }$

e) Comprobamos a solución do sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{} + \boxed{} = 5 \\ \boxed{} + 2 \cdot \boxed{} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 2 = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

Se obtemos este resultado, os valores de x e y son correctos.

2 **Resolve os sistemas mediante o método de substitución e comproba os resultados.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 8 \\ 2x - y = 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} -x + y = 7 \\ 3x - y = 4 \end{array}\right\}$

3 **Resolve mediante o método de substitución e comproba a solución do seguinte sistema.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x-1}{5} + 2y &= 1 \\ y + \frac{3x}{2} &= 2 \end{aligned}\right\}$$

a) Sacamos común denominador.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x-1}{5} + \frac{5\cdot 2y}{5} &= \frac{5\cdot 1}{5} \\ \frac{2\cdot y}{2} + \frac{3x}{2} &= \frac{2\cdot 2}{2} \end{aligned}\right\}$$

b) Quitamos os denominadores.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x-1}{\cancel{5}} + \frac{10y}{\cancel{5}} &= \frac{5}{\cancel{5}} \\ \frac{2y}{\cancel{2}} + \frac{3x}{\cancel{2}} &= \frac{4}{\cancel{2}} \end{aligned}\right\}$$

Deste xeito obtemos:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 1 + 10y &= 5 \\ 2y + 3x &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Agora resólveo tal e como fixeches en exercicios anteriores. Non esquezas comprobar a solución.

4 **Resolve mediante o método de substitución e comproba o seguinte sistema.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-2}{3} + y &= 4 \\ x + \frac{y}{3} &= 6 \end{aligned}\right\}$$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE O MÉTODO DE IGUALACIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Para resolver un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas polo método de igualación:

a) **Despexar** a mesma incógnita nas dúas ecuacións.
b) **Igualar** as expresións obtidas.
c) **Resolver** a ecuación dunha incógnita que resulta.
d) **Substituír** o valor obtido en calquera das dúas ecuacións para obter a outra incógnita.
e) **Comprobar** a solución obtida.

EXEMPLO

Resolve o seguinte sistema de ecuacións polo método de igualación.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 11 \end{array}\right\}$$

a) Eliximos para **despexar** a incógnita y das dúas ecuacións.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 1 = y \\ 11 - 3x = y \end{array}\right\}$$

b) **Igualamos** as expresións obtidas.

$$2x + 1 = 11 - 3x$$

c) **Resolvemos** a ecuación obtida.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 11 - 3x \\ 2x + 3x &= 11 - 1 \\ 5x &= 10 \\ \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

d) **Substituímos** o valor $x = 2$ en calquera das ecuacións. Eliximos a segunda.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 11 \\ 3 \cdot 2 + y &= 11 \\ 6 + y &= 11 \\ \boxed{y = 5} \end{aligned}$$

e) **Comprobamos** a solución obtida.

Para iso hai que substituír o par de valores (2, 5) nas dúas ecuacións.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y = -1 \\ 3x + y = 11 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 2,\ y = 5} \left.\begin{array}{l} 2 \cdot 2 - 5 = -1 \\ 3 \cdot 2 + 5 = 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Cumpre a ecuación.} \\ \rightarrow \text{Cumpre a ecuación.} \end{array}$$

A solución do sistema é o par de valores $x = 2$ e $y = 5$.

Polo tanto, o sistema de ecuacións ten solución, é dicir, é un sistema compatible.

1 **Resolve o sistema mediante o método de igualación e comproba a solución.**

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 77 \\ x - y = 2 \end{array}\right\}$$

a) Despexamos a mesma incógnita nas dúas ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 77 \\ x - y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

b) Igualamos as ecuacións obtidas.

c) Resolvemos a ecuación dunha incógnita obtida.

d) Substituímos o valor dunha das incógnitas en calquera das dúas ecuacións do sistema.

e) Comprobamos a solución.

2 **Resolve os seguintes sistemas mediante o método de igualación e comproba os resultados.**

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 20 \end{array}\right\}$

3 **Resolve mediante o método de igualación e comproba a solución do seguinte sistema de ecuacións con fraccións.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 4 \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

a) Reducimos a común denominador.

$$\left.\begin{aligned} \frac{3x}{\cancel{6}} + \frac{2y}{\cancel{6}} &= \frac{24}{\cancel{6}} \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

b) Quitamos os denominadores.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 24 \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\}$$

Agora resólveo tal e como fixeches en exercicios anteriores. Non esquezas comprobar a solución.

4 **Resolve mediante o método de igualación e comproba o seguinte sistema.**

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} &= 6 \\ \frac{x}{3} + \frac{2y}{9} &= 6 \end{aligned}\right\}$$

RESOLVER SISTEMAS MEDIANTE O MÉTODO DE REDUCIÓN 5

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Para resolver un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas polo método de redución:

a) **Buscar un sistema equivalente** onde os coeficientes dunha mesma incógnita sexan iguais ou opostos.
b) **Restar** ou **sumar** as dúas ecuacións obtidas, eliminando así unha incógnita.
c) **Resolver** a ecuación que resulta.
d) **Substituír** o valor obtido en calquera das dúas ecuacións para obter a outra incógnita.
e) **Comprobar** a solución obtida.

EXEMPLO

Resolve o seguinte sistema de ecuacións polo método de redución.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ 2x + 3y &= 40 \end{aligned}\right\}$$

a) **Obtemos** un sistema equivalente.

Eliximos unha incógnita nas dúas ecuacións, neste caso x.

Multiplicamos a primeira ecuación por 2.

$$\left.\begin{aligned} 2(x + 2y = 25) \\ 2x + 3y = 40 \end{aligned}\right\}$$

Agora o sistema equivalente é:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y &= 50 \\ 2x + 3y &= 40 \end{aligned}\right\}$$

b) **Restamos** as dúas ecuacións do sistema para eliminar o x.

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -\ (2x + 3x = 40) \\ \hline \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 2x + 4y = 50 \\ -2x - 3y = -40 \\ \hline y = 10 \end{array}$$

c) **Resolvemos** a ecuación dunha incógnita que resulta.

$$\boxed{y = 10}$$

d) **Substituímos** o valor obtido nunha das dúas ecuacións do sistema, neste caso na primeira ecuación.

$$x + 2y = 25$$
$$x + 2 \cdot 10 = 25$$
$$\boxed{x = 5}$$

e) **Comprobamos** o resultado.

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 25 \\ 2x + 3y &= 40 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 5,\ y = 10} \left.\begin{aligned} 5 + 2 \cdot 10 &= 25 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 10 &= 40 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 25 &= 25 \\ 40 &= 40 \end{aligned}\right\}$$

A solución do sistema é o par de valores $x = 5$ e $y = 10$.

Polo tanto, o sistema de ecuacións ten solución, é dicir, é un sistema compatible.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5

1 **Resolve o seguinte sistema polo método de redución e comproba o resultado.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -10 \\ 4x + 5y = 140 \end{array}\right\}$$

a) Obtemos un sistema equivalente. Eliximos unha incógnita, por exemplo o *y*.

Multiplicamos a primeira ecuación por 5 e a segunda ecuación por 2.

$$\left.\begin{array}{l} 5(3x - 2y = -10) \\ 2(4x + 5y = 140) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 15x - 10y = -50 \\ 8x + 10y = 280 \end{array}\right\} \text{ Sistema equivalente.}$$

b) Sumamos as dúas ecuacións para eliminar o *y*.

$$\begin{array}{rr} & 15x - \cancel{10}y = -50 \\ + & 8x + \cancel{10}y = 280 \\ \hline & 23x \qquad = 230 \end{array}$$

c) Resolvemos a ecuación obtida.

$x =$

d) Substituímos o valor obtido en calquera das ecuacións do sistema e obtemos o valor de *y*.

e) Comprobamos a solución.

2 **Resolve polo método de redución o sistema e comproba o resultado.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 26 \\ 2x - 3y = -13 \end{array}\right\}$$

Eliximos unha incógnita:

Por que número temos que multiplicar as ecuacións para que esa incógnita desapareza ao sumalas?

$$\left.\begin{array}{l} \square\,(3x + 2y = 26) \\ \square\,(2x - 3y = -13) \end{array}\right\} \rightarrow$$

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIÓNS 5

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Para **resolver un problema** mediante un sistema de dúas ecuacións con dúas incógnitas, hai que realizar os seguintes pasos.

a) **Comprender** o problema.
b) **Formular** as ecuacións e formar o sistema de ecuacións.
c) **Resolver** o sistema de ecuacións, mediante calquera dos tres métodos.
d) **Comprobar** que a solución cumpre as condicións do enunciado.

EXEMPLO

A suma das idades de dous irmáns é 29 e, dentro de 8 anos, a idade do maior será o dobre ca a idade do menor. Cantos anos ten cada irmán?

a) Lemos o problema as veces que sexa necesario ata comprender o seu enunciado.

b) Formulamos as ecuacións e formamos o sistema.

- Eliximos as incógnitas: $x =$ idade do irmán maior
  $y =$ idade do irmán menor
- Formulamos o problema:

	HOXE		DENTRO DE 8 ANOS
Irmán maior	x	$\longrightarrow$	$x + 8$
Irmán menor	y	$\longrightarrow$	$y + 8$
	$x + y = 29$		$x + 8 = 2(y + 8)$
	As dúas idades suman 29.		*A idade do maior será o dobre da do menor.*

- Formamos o sistema de ecuacións: $\left.\begin{array}{l} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array}\right\}$

c) Resolvemos o sistema de ecuacións. Elixindo o método de substitución, despexamos x na primeira ecuación e substituímos na segunda.

$$x = 29 - y \rightarrow (29 - y) + 8 = 2(y + 8)$$
$$29 - y + 8 = 2y + 16$$
$$29 + 8 - 16 = 2y + y \rightarrow 21 = 3y \rightarrow y = 7$$

Substituímos $y = 7$ na primeira ecuación: $x + 7 = 29 \rightarrow x = 29 - 7 = 22$

Polo tanto: $x = 22$ anos ten o irmán maior.
$y = 7$ anos ten o irmán menor.

d) Comprobamos que a solución cumpre as condicións do enunciado: substituímos os valores obtidos de x e y ($x = 22$ e $y = 7$) nas dúas ecuacións.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 29 \\ x + 8 = 2(y + 8) \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 22,\ y = 7} \left.\begin{array}{l} 22 + 7 = 29 \\ 22 + 8 = 2 \cdot (7 + 8) \end{array}\right\} \rightarrow 30 = 14 + 16 \rightarrow 30 = 30$$

Polo tanto, $x = 22$ e $y = 7$ é solución do problema.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 **Un alumno realiza un exame de dez preguntas. Por cada pregunta acertada danlle 2 puntos e por cada pregunta que falla quítanlle 1 punto. Sabendo que a cualificación final foi de 8 puntos, cantos acertos e fallos tivo?**

a) Lemos ao xeito o problema.

b) Formulamos as ecuacións e formamos o sistema.

- Eliximos as incógnitas: $x =$ .....

  $y =$ .....

- Formulamos o problema:

N.º de preguntas acertadas	x	→		Puntuación de preguntas acertadas.
N.º de preguntas falladas	y	→		Puntuación de preguntas falladas.
Total de preguntas: 10	$x + y =$	→		Puntuación total: 8.
	Primeira ecuación		Segunda ecuación	

- Formamos o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} x + y = \square \\ \square \end{cases}$$

c) Agora resolvemos o sistema. Eliximos o método de resolución máis axeitado.

d) Comprobamos o resultado.

2 **Nun hotel hai 120 dormitorios dobres e individuais. Se o número total de camas é 195, cantos dormitorios hai de cada tipo?**

a) Lemos ao xeito o problema.

b) Formulamos as ecuacións e formamos o sistema.

- Eliximos as incógnitas: $x =$ .....

  $y =$ .....

- Formulamos o problema:

Dormitorios dobres	x	→		Camas en dormitorios dobres.
Dormitorios individuais	y	→		Camas en dormitorios individuais.
Total de dormitorios: 120		→		Total de camas: 195.
	Primeira ecuación		Segunda ecuación	

- Formamos o sistema de ecuacións:

$$\begin{cases} \boxed{} \\ \boxed{} \end{cases}$$

c) Eliximos un método de resolución e resolvemos o problema.

d) Comprobamos o resultado.

3 **Calcula dous números cuxa suma é 10 e a súa diferenza é 6.**

4 **Nun curral hai 25 ovellas e galiñas e contando as patas hai 80 en total.**
Cantas ovellas e galiñas son?

5 **Saleta ten moedas de 2 € e 1 €. Sabendo que ten 20 moedas e que o valor de todas é 33 €, calcula o número de moedas que ten de cada tipo.**

	MOEDAS	VALOR DAS MOEDAS	
De 1 €			
De 2 €			
Total de moedas: 20			Valor total: 33 €.

11 Funcións

INTRODUCIÓN

O concepto de función é un dos máis importantes que se tratan neste curso e, aínda que non reviste unha especial dificultade, preséntalles ás veces problemas aos alumnos.

Por iso, a unidade comeza explicando como determinar se unha relación entre magnitudes é función ou non, así como as distintas formas de expresar unha función: mediante texto, táboa, fórmula e gráfica, dedicando atención á análise destas últimas. É importante traballar as distintas expresións dunha función, sinalando que todas son equivalentes e expresan o mesmo. Unha vez determinado que a relación entre dúas magnitudes é unha función, o seguinte paso é diferenciar entre variable independente e dependente.

A análise das características das funcións centrará o resto da unidade. Estudaranse o dominio e o percorrido da función, a súa continuidade ou descontinuidade, intervalos onde a función crece ou decrece e a determinación dos valores onde alcanza un máximo ou un mínimo.

RESUMO DA UNIDADE

- Unha *magnitude* é unha característica que pode ser medida e expresada cun número.
- Unha *función* é unha correspondencia entre variables que asocia a cada valor dunha delas un único valor da outra.
- Unha *variable independente* é a que pode tomar calquera valor. A *variable dependente* depende do valor que tome a variable independente.
- *Dominio*: conxunto de todos os valores que pode tomar a variable independente.
- *Percorrido*: conxunto de todos os valores que pode tomar a variable dependente.
- *Gráfica dunha función*: representación do conxunto de puntos do plano que a definen.
- *Función periódica*: a súa gráfica repítese cada certo intervalo; $f(x) = f(x + T)$, sendo T o período.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Distinguir relacións funcionais entre magnitudes.	• Variables. • Relación funcional.	• Determinación da relación entre dúas variables, sinalando se é ou non funcional.
2. Coñecer as diferentes expresións dunha función.	• Expresión dunha función mediante texto, táboa, gráfica ou expresión alxébrica.	• Expresión dunha función. • Obtención dunhas expresións a partir doutras.
3. Calcular o dominio e o percorrido dunha función.	• Variable independente e variable dependente. • Dominio e percorrido dunha función.	• Obtención do percorrido e do dominio dunha función.
4. Distinguir entre funcións descontinuas e continuas.	• Función continua. • Función descontinua.	• Diferenciación de funcións continuas e descontinuas. • Resolución de problemas: ecuación, variables e representación gráfica.
5. Estudar o crecemento e o decrecemento, máximos e mínimos dunha gráfica.	• Función crecente e función decrecente. • Máximos e mínimos.	• Obtención dos intervalos de crecemento e decrecemento dunha función. • Determinación dos máximos e dos mínimos.
6. Recoñecer as funcións periódicas.	• Función periódica.	• Recoñecemento de funcións periódicas e o seu período.

11 OBXECTIVO 1
DISTINGUIR RELACIÓNS FUNCIONAIS ENTRE MAGNITUDES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Magnitude** é calquera característica que pode ser medida e o seu valor expresado mediante un número.
- Unha **relación entre dúas magnitudes** é unha forma de asociar unha serie de valores dunha delas cunha serie de valores da outra. Por exemplo:
  – O consumo de gasolina dun coche asociado á distancia percorrida.
  – O prezo do menú dun restaurante depende dos pratos elixidos.
  – O prezo das entradas de cine está relacionado co número de amigos que imos.
- Nunha relación entre magnitudes, os valores destas cambian, e por iso as magnitudes se chaman **variables**.

1 **Que características son magnitudes? Marca cunha cruz.**

a) O número de páxinas dun libro.
b) A cor da tapa dun caderno.
c) O prezo dun disco compacto.
d) A altura dun edificio.

2 **Das parellas de magnitudes, cales están relacionadas? Marca cunha cruz.**

a) A altura dos alumnos da clase e a súa nota en Matemáticas.
b) O coeficiente intelectual dunha persoa e o seu lugar de nacemento.
c) O número de entradas de cine e o seu importe.
d) A velocidade dun coche e o tempo utilizado nun traxecto.

- Se nunha relación entre dúas magnitudes, cada valor dunha delas está asociado a un único valor da outra, dise que esa correspondencia ou relación é unha **función**.
  – As magnitudes *número de quilos de laranxas* e *custo* representan unha función.
  A un certo número de quilos só lle corresponde un prezo.
  – O coeficiente intelectual dunha persoa e o seu lugar de nacemento non representan unha función.
  A un certo coeficiente pódenlle corresponder varios lugares de nacemento.
- A **variable independente (*x*)** pode tomar calquera valor, e o valor da **variable dependente (*y*)** depende do que tome a variable independente.

3 **Dos seguintes pares de magnitudes, sinala cales representan unha función. Identifica a súa variable dependente e independente.**

a) O volume dun cubo e a súa aresta.
b) A idade dunha persoa e a súa cor de ollos.
c) O importe do recibo da luz e a cantidade de electricidade que se gasta.
d) A idade dunha persoa e o seu talle de camisa.
e) O número de diagonais e o número de lados dun polígono.
f) A idade dun pai e a idade do seu fillo.

COÑECER AS DIFERENTES EXPRESIÓNS DUNHA FUNCIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

A relación entre dúas variables pódese expresar de diferentes xeitos:

- **Mediante un texto:** descrición verbal e/ou escrita que expresa a relación entre dúas variables. É o que se adoita chamar enunciado do problema.
- **Mediante unha táboa:** os valores das variables independente e dependente organízanse en forma de táboa.
- **Mediante un gráfico:** dános unha visión cualitativa da relación que existe entre as variables. Pode ser unha representación nuns eixes de coordenadas.
- **Mediante unha fórmula ou expresión alxébrica:** podemos calcular qué valor da variable dependente lle corresponde a un valor da variable independente.

EXEMPLO

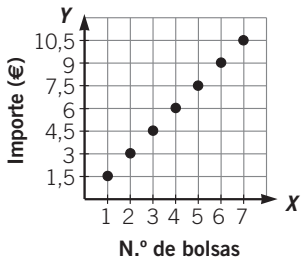
Un grupo de amigos vai ao cine e mercan bolsas de flocos de millo. Unha bolsa vale 1,50 €, dúas bolsas valen 3 € e cinco bolsas valerán 7,50 €.

Imos expresar este exemplo das catro maneiras que acabamos de ver:

- **Mediante un texto:** o importe que hai que pagar en euros é o produto de 1,50 polo número de bolsas de flocos de millo mercadas.
- **Mediante unha táboa:** o número de bolsas é a variable independente e o importe é a variable dependente.

N.º DE BOLSAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

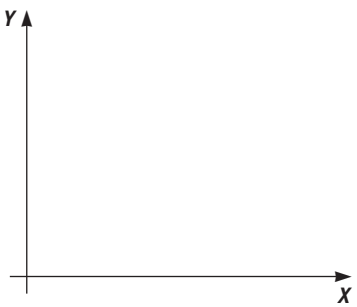
- **Mediante un gráfico:** eliximos un gráfico de puntos nun sistema de eixes de coordenadas.



- **Mediante unha fórmula:** se lle chamamos *y* ao importe en euros e *x* ao número de bolsas de flocos de millo, a fórmula será: $y = 1{,}5 \cdot x$.

1 **Unha compañía telefónica cobra no seu recibo unha cota fixa de 0,13 € en cada chamada e 0,15 € por cada minuto. Obtén a táboa, a gráfica e a fórmula que expresa a relación entre o importe do recibo de teléfono e o número de minutos.**

N.º DE MINUTOS (*x*)				
IMPORTE DO RECIBO (*y*)				



A **gráfica dunha función** é a representación do conxunto de puntos que definen esa función.

2 **A seguinte táboa expresa a relación entre o lado dun cadrado e a súa área. Obtén a gráfica e a fórmula que representa a relación entre ambas as magnitudes.**

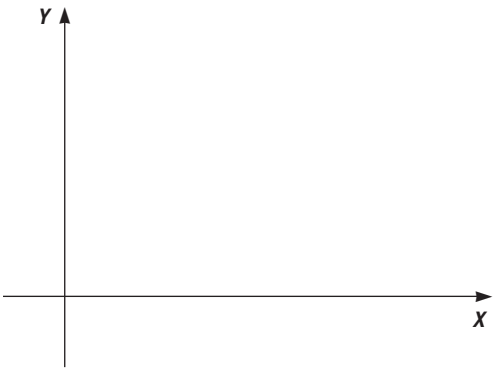
LADO	ÁREA
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100

3 **Dada a función mediante a fórmula: $y = x^2 + 1$, obtén a táboa e a gráfica.**

x	$y = f(x)$
-3	$(-3)^2 + 1 = 10$
-2	
1	
0	
1	
2	
3	

4 **Dada a función mediante a fórmula: $y = x^2 - 2$, obtén a táboa e a gráfica.**

x	$y = f(x)$



5 **Expresa, mediante unha fórmula, a relación que existe entre as seguintes magnitudes.**

a) O raio dunha circunferencia e a súa lonxitude.
b) O lado dun cadrado e a súa área.
c) O raio dunha esfera e o seu volume.

CALCULAR O DOMINIO E O PERCORRIDO DUNHA FUNCIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Unha relación entre dúas magnitudes é unha **función** se a cada valor da variable independente se lle asocia un único valor da variable dependente: $\boldsymbol{f(x) = y}$.
- O valor da **variable independente** adóitase representar por $\boldsymbol{x}$, e tamén se chama **orixinal**.
- O valor da **variable dependente** adóitase representar por $\boldsymbol{y}$, e tamén se chama **imaxe**.
- O **dominio** dunha función é o conxunto de todos os valores que pode tomar a variable x.
- O **percorrido** dunha función é o conxunto de todos os valores que toma a variable y.

EXEMPLO

Dada a función $\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$, calcula as imaxes para $\boldsymbol{x = 0}$ e $\boldsymbol{x = -1}$.

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ $\qquad$ $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$

Calcula o dominio e o percorrido da función: $\boldsymbol{f(x) = 3x - 7}$.

O dominio e o percorrido da función son o conxunto dos números reais, xa que a variable x pode tomar como valor calquera número real, e para cada un deses números reais, a variable y ten como valor tamén un número real.

1 **Dada a función que asocia a cada número enteiro a súa cuarta parte máis 5 unidades:**

a) Calcula a súa fórmula ou expresión alxébrica.

b) Calcula $f(2)$ e $f(0)$.

c) É posible encontrar a imaxe de $\frac{2}{3}$?

d) Determina o dominio.

2 **Dada a relación que asocia a cada número real o inverso da suma dese número máis 5:**

a) É unha función? Se o é, determina cal é a súa fórmula.

b) Pódese calcular $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ e $f(-5)$?

c) Determina o seu dominio e percorrido.

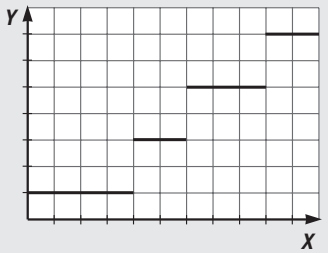
OBXECTIVO 4

DISTINGUIR ENTRE FUNCIÓNS DESCONTINUAS E CONTINUAS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

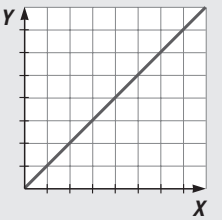
FUNCIÓN DESCONTINUA

Unha función é descontinua se non se pode debuxar dun só trazo, e os puntos onde necesitamos levantar o lapis do papel denomínanse puntos de descontinuidade.



FUNCIÓN CONTINUA

Unha función é continua se a súa gráfica pode debuxarse dun só trazo, é dicir, non presenta puntos de descontinuidade.



1 **Estuda a relación que existe entre a idade de Xoán e a paga semanal que lle dan seus pais, tendo en conta estes datos. Desde que naceu ata os 10 anos non recibiu paga semanal, desde os 10 anos ata os 12 recibiu 5 € semanais, desde os 12 anos ata os 15 recibiu 8 €, desde os 15 anos ata os 20 recibiu 10 €, e a partir dos 20 anos deixou de recibir paga semanal. Obtén a táboa que relaciona ambas as magnitudes e a gráfica. Como é a función que obtiveches, continua ou descontinua?**

2 **Un vendedor de mobles ten un soldo base de 650 € e por cada moble que vende cobra unha comisión de 100 €.**

a) Representa a gráfica que expresa o soldo en función do número de mobles vendidos.
b) É a función continua ou descontinua?

3 **Dada a función que asocia a cada número real o seu cuádruplo máis 2 unidades:**

a) Escribe a súa expresión alxébrica.
b) Representa graficamente a función.
c) É continua ou descontinua?

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

ESTUDAR O CRECEMENTO E O DECRECEMENTO, MÁXIMOS E MÍNIMOS

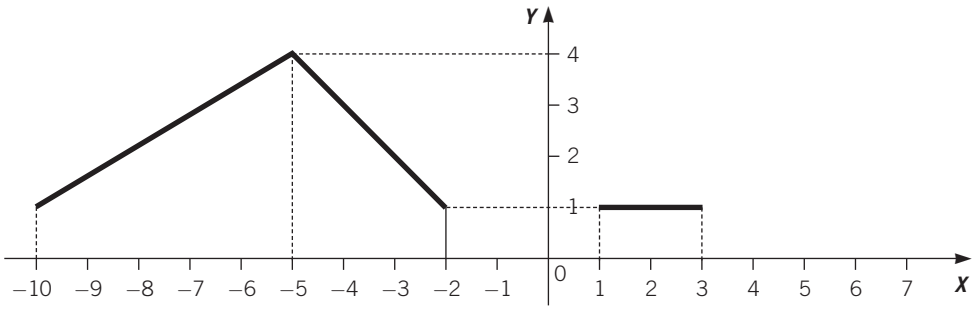
NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Dada unha función $f(x)$ e dous valores x_1 e x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Se $f(x_2) - f(x_1) > 0$, a función é **crecente** entre x_1 e x_2.
- Se $f(x_2) - f(x_1) < 0$, a función é **decrecente** entre x_1 e x_2.

EXEMPLO

Dada a seguinte función, estuda os intervalos de crecemento e decrecemento.



Sempre se empeza estudando o eixe X, de esquerda a dereita.

- No intervalo $[-10, -5]$, a función crece e a súa taxa de crecemento é:

$$\left.\begin{array}{r} f(-10) = 1 \\ f(-5) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow f(-10) - f(-5) = 4 - 1 = 3$$

- No intervalo $[-5, -2]$, a función decrece e a súa taxa de decrecemento é:

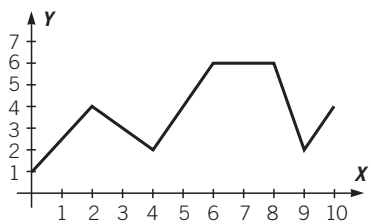
$$\left.\begin{array}{r} f(-5) = 4 \\ f(-2) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(-5) - f(-2) = 4 - 1 = 3$$

- Hai unha descontinuidade desde $x = -2$ a $x = 1$.
- No intervalo $[1, 3]$, a función non crece nin decrece, mantense constante.

1 **Representa unha función coas seguintes características.**

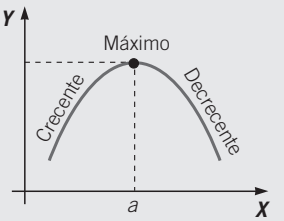
a) É crecente nos intervalos [2, 5] e [7, 9].
b) É decrecente en [5, 7].
c) É constante en [0, 2].

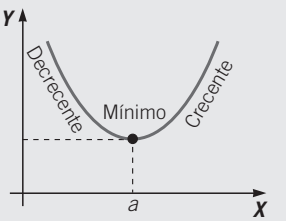
2 **Dada a función representada pola gráfica seguinte, estuda a súa continuidade e crecemento.**



ADAPTACIÓN CURRICULAR

- Unha función ten un **máximo** nun punto se, á esquerda dese punto, a función é crecente, e á dereita é decrecente.
- Unha función ten un **mínimo** nun punto se, á esquerda dese punto, é decrecente, e á dereita, crecente.





3 **Dada a función $y = x^2 - 4$, fai unha táboa de valores, represéntaa e estuda se é continua, onde é crecente e decrecente e se ten máximos e mínimos.**

4 **A seguinte táboa mostra a cantidade de medicamento en sangue que ten unha persoa despois de tomar un xarope.**

TEMPO (horas)	1	2	3	4	5	6	7
CANTIDADE (mg/dl)	90	75	60	45	30	15	0

a) Fai unha gráfica a partir da táboa.
b) A función representada, é continua?
c) É crecente ou decrecente?
d) Ten máximo ou mínimo?

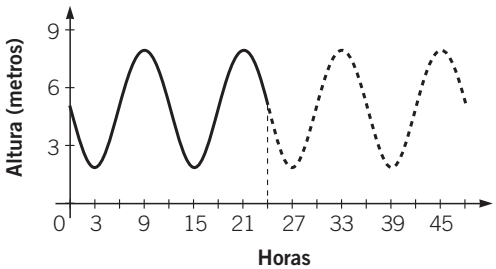
RECOÑECER AS FUNCIÓNS PERIÓDICAS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Nunha **función periódica**, a súa gráfica repítese cada certo intervalo, que se denomina período, é dicir, $f(x) = f(x + T)$, sendo T o valor do período.

EXEMPLO

Analiza como varía a profundidade da auga nunha praia ao longo do tempo.



Esta función é periódica porque se tomamos a gráfica no intervalo [3, 15], vemos que se repite exactamente igual no intervalo [15, 27] e segue repetíndose en [27, 39], e así de forma sucesiva.

Chámase período á lonxitude do intervalo que se repite:

$$\left.\begin{array}{r} [3, 15] \rightarrow \ \ 3 - 15 = 12 \\ [15, 27] \rightarrow 27 - 15 = 12 \\ [27, 39] \rightarrow 39 - 27 = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Neste caso, o período é 12.}$$

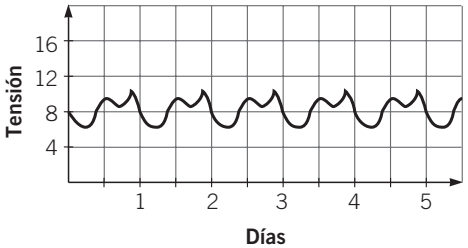
1 **Un tren sae de Vilariño ás 12 horas e diríxese a Outeiro a velocidade constante, chegando en 40 minutos. Para durante 20 minutos e, despois, sae de Outeiro con dirección a Vilariño, chegando en 50 minutos. Volve parar 10 minutos e á hora en punto volve saír cara a Outeiro.**

a) Representa graficamente esta situación (coloca no eixe de abscisas o tempo, e no eixe de ordenadas, a distancia do tren respecto a Vilariño).

b) É periódica esta función? Cal é o seu período?

2 **A cantidade de chuvia que cae nun lugar depende da súa situación e da época do ano. Inventa os datos e debuxa unha gráfica. É unha función periódica? Ten máximos e mínimos?**

3 **A gráfica mostra como varía a tensión arterial mínima dunha persoa ao longo de varios días.**

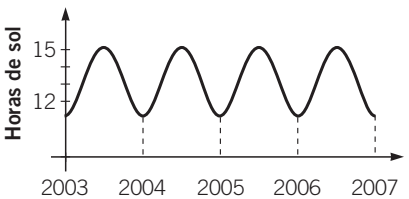


a) É unha función periódica? Se o é, indica o período.

b) En que intervalos é crecente? E decrecente?

c) Cando se dá un máximo? E un mínimo?

4 **Observa o gráfico que mostra as horas de luz solar nun lugar no mes de xaneiro durante 5 anos consecutivos.**



a) É unha función periódica?

b) Cal é o período?

c) Cales son os intervalos de crecemento?

12 Funcións de proporcionalidade

INTRODUCIÓN

A representación gráfica de funcións de proporcionalidade é unha das formas máis directas de entender e verificar a relación entre variables. Estas gráficas utilízanse no ámbito científico para interpretar e modelizar as leis que rexen algúns fenómenos.

Convén mostrarlles aos alumnos que, coñecendo estas funcións e gráficas, se poden describir fenómenos naturais e, nalgúns casos, mesmo predicilos.

É importante que os alumnos teñan clara a relación entre a expresión alxébrica dunha función de proporcionalidade e a súa representación gráfica, e que sexan capaces de obter unha calquera delas a partir da outra.

O cálculo da ecuación dunha recta presenta tamén certa dificultade dependendo dos datos, polo que hai que insistir na súa obtención, así como aprender a distinguir se dúas rectas dadas son paralelas ou secantes.

RESUMO DA UNIDADE

- *Función de proporcionalidade directa ou función lineal*: $y = mx$. A súa gráfica é unha recta de pendente m que pasa pola orixe de coordenadas.
- *Función afín*: $y = mx + n$. A súa gráfica é unha recta de pendente m. A *ordenada na orixe* é n.
- Se a pendente dunha recta é positiva: $m > 0$, a recta é crecente; se a pendente dunha recta é negativa: $m < 0$, a recta é decrecente.
- *Ecuación dunha recta que pasa por dous puntos*: calcúlase a pendente da recta; substitúense as coordenadas dun dos puntos dados na ecuación xeral da recta, e obtense a ordenada na orixe; despois, cos valores da pendente e da ordenada, escríbese a ecuación da recta.
- *Rectas paralelas*: teñen igual pendente.
- *Rectas secantes*: teñen distinta pendente. Córtanse nun punto que se obtén gráfica ou analiticamente.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Coñecer a función de proporcionalidade directa.	• Función lineal ou de proporcionalidade directa. • Pendente dunha recta. • Representación gráfica.	• Recoñecemento e representación de funcións da forma $y = mx$. • Resolución de problemas reais representados por funcións lineais.
2. Coñecer a función afín.	• Función afín. • Pendente dunha recta. • Ordenada na orixe. • Representación gráfica.	• Recoñecemento e representación de funcións da forma $y = mx + n$. • Comparación de rectas en función da súa pendente, dependendo do crecemento e decrecemento.
3. Obter a ecuación da recta que pasa por dous puntos.	• Ecuación da recta que pasa por dous puntos.	• Cálculo da ecuación dunha recta que pasa por dous puntos, coñecidos a súa pendente e a ordenada na orixe, ou a súa pendente e un punto por onde pasa.
4. Distinguir as rectas paralelas e as rectas secantes.	• Posición relativa de dúas rectas respecto ás súas pendentes. • Punto de corte de dúas rectas secantes.	• Determinación de se dúas rectas son paralelas ou secantes, de maneira gráfica e analítica. • Cálculo do punto de corte.

COÑECER A FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDADE DIRECTA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

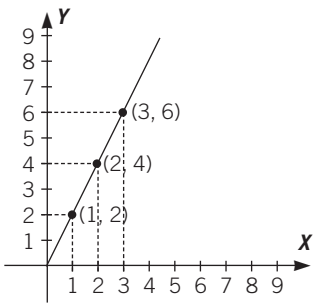
- Unha **función de proporcionalidade directa ou función lineal** exprésase da forma:
  $y = m \cdot x$, sendo m un número calquera.
- A **representación gráfica** destas funcións é unha **recta que pasa pola orixe de coordenadas**.
- A inclinación desta recta respecto do eixe de abscisas (X) vén representada polo número m, que recibe o nome de **pendente**. Canto maior sexa m, máis inclinada estará a recta respecto do eixe X, é dicir, maior será o ángulo que esta recta forma coa horizontal.
- Se entre dúas magnitudes existe unha **relación de proporcionalidade directa**, a función que representa a dita relación é unha función lineal.

EXEMPLO

Observa a táboa e determina se a relación entre as magnitudes é de proporcionalidade directa.

BOLSAS DE FLOCOS DE MILLO	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	2	4	6	8	10	12

- O número de bolsas de flocos de millo e o diñeiro que custan son magnitudes directamente proporcionais, xa que ao mercar o dobre de bolsas duplicarase o custo…
- A constante de proporcionalidade é: $m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots = 2$.
- A expresión alxébrica da función pódese expresar da forma:
  $$y = m \cdot x \rightarrow y = 2 \cdot x$$
  onde x é o número de bolsas de flocos de millo e y é o importe en euros.
- A representación gráfica desta función é unha recta que pasa pola orixe de coordenadas e ten por pendente $m = 2$.
  Para representala hai que sinalar nuns eixes de coordenadas os puntos (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)… e unilos mediante unha recta.



1 **Sinala se estes pares de valores son magnitudes directa ou inversamente proporcionais. Cales se poden representar mediante unha función lineal?**

a) Un número e o seu oposto.
b) Un número e o seu inverso.
c) Un número e o seu triplo.
d) Un número e a súa metade.
e) Un número e o dobre do seu inverso.
f) Un número e o triplo do oposto do seu inverso.
g) Un número e o dobre do inverso do oposto.
h) Un número e o inverso do seu triplo.

CALCULAR A PROBABILIDADE DUN SUCESO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

A **probabilidade dun suceso** é o número cara ao cal se aproxima a frecuencia relativa dese suceso conforme aumenta o número de repeticións dun experimento aleatorio.

EXEMPLO

Lánzase un dado de catro caras e anótanse as veces que aparece o número 1.

LANZAMENTOS	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	**0,25**	0,225	0,27

Ao obter a táboa de frecuencias relativas correspondente a este experimento, obsérvase que o número cara ao cal se aproxima a frecuencia do suceso de aparecer o número 1 é 0,25.

Polo tanto, a probabilidade de obter número 1 ao lanzar un dado de catro caras é $P = 0{,}25$.

1 **Tira unha moeda 25 veces e completa a táboa.**

	RECONTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
CARA			
CRUZ			

Son as frecuencias relativas números próximos a 0,5? Que consecuencias obtés dos teus resultados?

REGRA DE LAPLACE

Cando todos os sucesos elementais dun experimento aleatorio son equiprobables, a probabilidade dun suceso A é o cociente entre o número de casos favorables ao suceso e o número de casos posibles.

Esta expresión é a regra de Laplace: $\boldsymbol{P(A)} = \dfrac{\textbf{Casos favorables}}{\textbf{Casos posibles}}$

EXEMPLO

Lánzase un dado de seis caras ao aire. O espazo mostral é: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calcula as seguintes probabilidades.

SUCESO	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	$P = \dfrac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$
Saír número par	{2, 4, 6}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
Saír número menor ca 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
Saír número par ou menor ca 5	{1, 2, 3, 4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
Saír número par e 4	{4}	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	$P = \dfrac{1}{6}$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

2 **Fanse quinielas cun dado que ten tres caras co 1, dúas caras co X e a outra cara co 2. Se se lanza unha vez o dado, calcula aplicando a regra de Laplace.**

a) O espazo mostral: $E =$ **.....**

b) A probabilidade de obter 1.

c) A probabilidade de obter X.

d) A probabilidade de obter 2.

3 **Unha urna contén catro bólas: 1 vermella, 1 azul, 1 verde e 1 branca. Se se sacan dúas bólas á vez, calcula.**

a) O espazo mostral: $E =$ **.....**

b) A probabilidade de que unha bóla sexa branca e a outra vermella.

c) A probabilidade de que as dúas bólas sexan vermellas.

d) A probabilidade de que ningunha das dúas bólas sexa branca.

4 **Sácase unha carta dunha baralla española de 40 cartas. Calcula estas probabilidades.**

a) Un rei.

b) Ouros.

c) Un 4 ou un 6.

d) O rei de ouros.

e) Unha carta que non sexa de copas.

f) Unha figura de bastos.

g) Unha carta que non sexa figura.

h) Unha carta menor ca 5.

5 **Nunha comida hai 28 homes e 32 mulleres. Comeron carne 16 homes e 20 mulleres, e o resto comeron peixe. Fixándote na táboa, e completando os datos que faltan, se eliximos unha persoa ao azar, calcula.**

	CARNE	**PEIXE**	Suma
HOMES	16		**28**
MULLERES	20		**32**
Suma	**36**		

a) Que probabilidade hai de que sexa home?

b) Cal é a probabilidade de que comese peixe?

c) Cal é a probabilidade de que sexa home e comese peixe?

6 **Lánzanse dous dados e súmanse os puntos obtidos. Obtén.**

a) O espazo mostral: $E =$ **.....**

b) A probabilidade de que a suma sexa 3.

c) A probabilidade de que a suma sexa 7.

d) A probabilidade de que a suma sexa superior a 10.

e) A probabilidade de que a suma sexa 4 ou 5.

14 OBXECTIVO 7
APLICAR AS PROPIEDADES DA PROBABILIDADE

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **A suma das probabilidades de todos os sucesos elementais dun experimento aleatorio é 1.**
  Por exemplo: no lanzamento dun dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
  $$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$
  $$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$
- A probabilidade dun suceso é un **número comprendido entre 0 e 1**.
- **A probabilidade do suceso seguro é 1 e a probabilidade do suceso imposible é 0.**
- Sendo A e B dous sucesos do espazo mostral E:
  – Se son incompatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.
  Por exemplo, dados os sucesos incompatibles A = Saír cara número primo e B = Saír cara múltiplo de 4, a probabilidade de que ocorra un dos dous é:
  $$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$
  – Se son compatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.
  $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{3, 6\}$
  A probabilidade de que ocorra a súa unión é: $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.
- A **probabilidade do suceso contrario** de A, $\overline{A}$, é: $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.
  $A = \{3, 6\}$ e $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$
  $$P(A) = \frac{2}{6} \qquad P(\overline{A}) = \frac{4}{6}$$
  Compróbase que: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \rightarrow \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$

1 **Dunha baralla española de 40 cartas extráese unha carta ao chou. Calcula estas probabilidades.**

SUCESO	PROBABILIDADE	SUCESO	PROBABILIDADE
A = Sacar espadas	$P(A) =$	D = Sacar espadas ou sota	$P(D) =$
B = Sacar sota	$P(B) =$	E = Non sacar espadas	$P(E) =$
C = Sacar espadas e sota	$P(C) =$	F = Non sacar sota	$P(F) =$

2 **Unha urna contén 4 bólas brancas, 1 azul e 5 negras. Considérase o experimento de sacar unha bóla ao azar. Calcula estas probabilidades.**

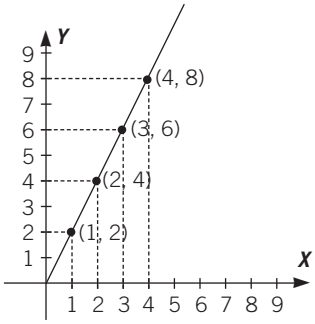
SUCESO	PROBABILIDADE	SUCESO	PROBABILIDADE
A = Saír bóla branca	$P(A) =$	D = Saír bóla que non sexa azul	$P(D) =$
B = Saír bóla azul	$P(B) =$	E = Saír bóla verde	$P(E) =$
C = Saír bóla que non sexa negra	$P(C) =$	F = Saír bóla branca ou negra	$P(F) =$

3 **A probabilidade dun suceso é 0,2. Cal é a probabilidade do suceso contrario?**

2 **Compara as funcións que representan a relación entre o número de fotocopias realizadas en varios establecementos e o seu importe. Obtén a táboa de valores, a función lineal e a gráfica correspondente.**

Establecemento 1: cada fotocopia custa 2 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 2 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$3 \cdot 2 = 6$
4	$4 \cdot 2 = 8$
...	...

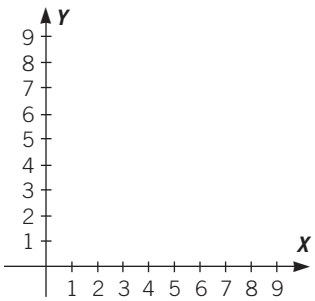


Constante de proporcionalidade $\rightarrow m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$

Función de proporcionalidade ou función lineal $\rightarrow y = 2x$

Establecemento 2: cada fotocopia custa 3 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 3 = 3$

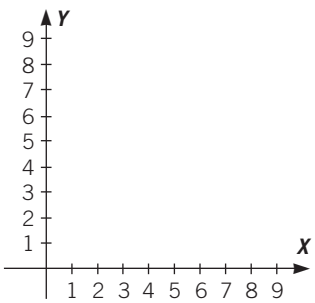


Constante de proporcionalidade $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidade ou función lineal $\rightarrow y =$

Establecemento 3: cada fotocopia custa 1,5 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$
2	$2 \cdot 1{,}5 = 3$



Constante de proporcionalidade $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidade ou función lineal $\rightarrow y =$

COÑECER A FUNCIÓN AFÍN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Unha **función afín** exprésase da forma:

$$\boldsymbol{y = m \cdot x + n}, \text{ sendo } m \text{ e } n \text{ dous números calquera.}$$

***m*: pendente da recta.**

Se $\boldsymbol{m > 0}$, a recta é **crecente**.

Se $\boldsymbol{m < 0}$, a recta é **decrecente**.

***n*: ordenada na orixe.**

- A representación gráfica destas funcións é unha recta que non pasa pola orixe de coordenadas, senón polo punto (0, *n*).
- As funcións de proporcionalidade directa ou **funcións lineais** son un caso particular das funcións afíns cando $\boldsymbol{n = 0}$.

EXEMPLO

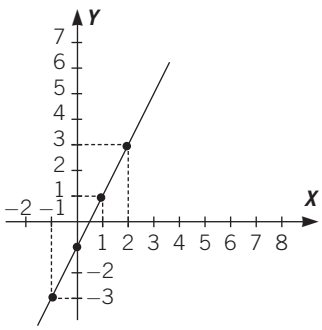
Dadas as funcións $\boldsymbol{y = 2x - 1}$ e $\boldsymbol{y = -3x + 4}$:

a) Determina a súa pendente.
b) Calcula a ordenada na orixe.
c) Represéntaas graficamente.
d) Cal delas ten maior pendente?
e) Como son as rectas, crecentes ou decrecentes?

Función 1

a) $m_1 = 2$
b) $n_1 = -1$
c)

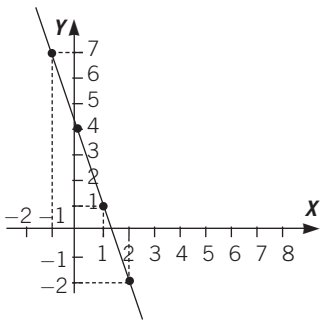
x	*y*
0	−1
1	1
2	3
−1	−3



Función 2

$m_2 = -3$
$n_2 = 4$

x	*y*
0	4
1	1
2	−2
−1	7



d) $m_1 > m_2$

e) $m_1 > 0 \rightarrow$ Crecente

$m_2 < 0 \rightarrow$ Decrecente

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

1 **Clasifica as funcións en lineais e afíns, e escribe o valor da pendente e a ordenada na orixe.**

a) $y = -0{,}7x \rightarrow$ Función lineal
$m = -0{,}7 \quad n = 0$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = -\frac{1}{3}x$

d) $y = -3{,}5x - 3$

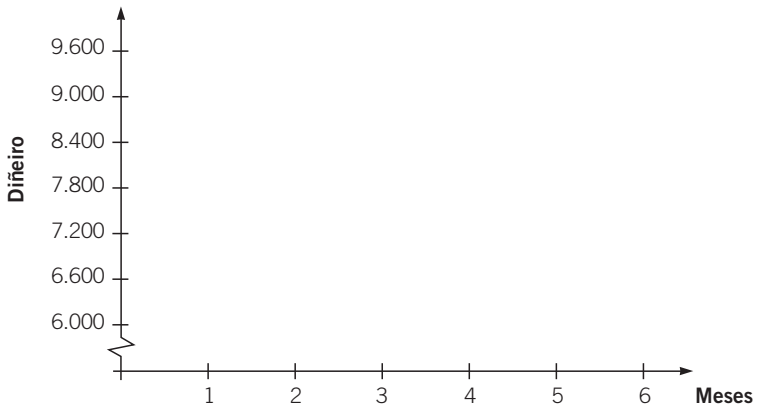
2 **Rosa pagou 6.000 € de entrada para mercar un piso e ten que aboar 600 € mensuais.**

a) Fai unha táboa que reflicta o que pagou ao cabo de 1, 2, 3, …, 6 meses.

MESES	0	1	2	3	4	5	6
DIÑEIRO							

b) Escribe unha función que exprese o diñeiro pagado en función do número de meses transcorridos.

c) Representa a gráfica da función.



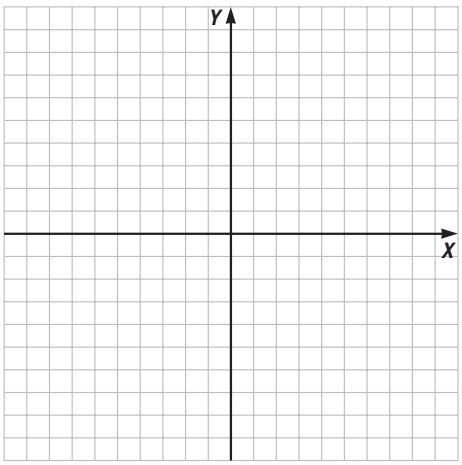
d) Cal é a pendente?

e) E a ordenada na orixe?

3 **A pendente dunha función da forma $y = mx + n$ é 3 e a súa ordenada na orixe é 2. Represéntaa.**

a) Escribe a función.

b) Calcula o valor de y para $x = -2{,}5$.



ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Obtén a táboa de valores destas funcións e represéntaas nos eixes de coordenadas.**

$y = 5x - 1$ $\quad$ $y = 3x - 1$ $\quad$ $y = x - 1$ $\quad$ $y = -x - 1$ $\quad$ $y = -3x - 1$

Función 1

x	$y = 5x - 1$
-3	$5 \cdot (-3) - 1 = -15 - 1 = -16$
-2	$5 \cdot (-2) - 1 = -10 - 1 = -11$
-1	$5 \cdot (-1) - 1 = -5 - 1 = -6$
0	$5 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$
1	$5 \cdot 1 - 1 = 5 - 1 = 4$
2	$5 \cdot 2 - 1 = 10 - 1 = 9$
3	$5 \cdot 3 - 1 = 15 - 1 = 14$

Función 2

x	$y = 3x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 3

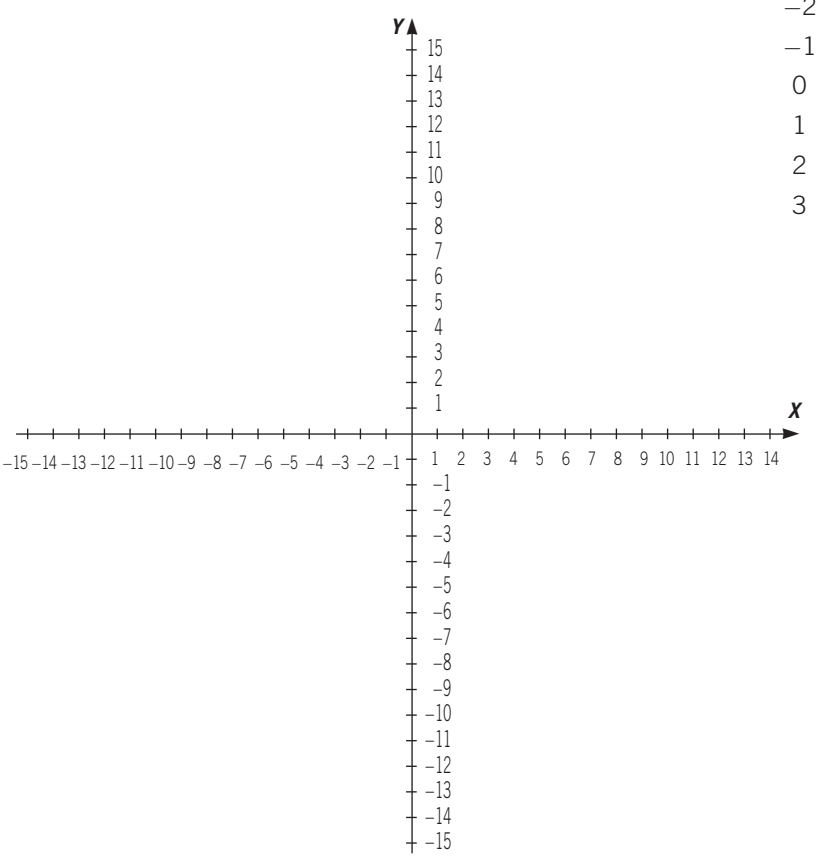
x	$y = x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 4

x	$y = -x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 5

x	$y = -3x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



Das funcións anteriores:

- **Cales son crecentes?**
- **E cales son decrecentes?**
- **Hai algunha característica na expresión das funcións: $y = 5x - 1$, $y = 3x - 1$, $y = x - 1$, $y = -x - 1$, $y = -3x - 1$ que indique cales son crecentes e decrecentes?**

OBTER A ECUACIÓN DA RECTA QUE PASA POR DOUS PUNTOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Para representar unha recta abonda con coñecer dous puntos polos que pasa.
- Para calcular a ecuación da recta $y = mx + n$ que pasa por dous puntos, coñecidas as súas coordenadas, $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$, procédese así:

1.º **Calculamos o valor da pendente** $\rightarrow m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Substituímos as coordenadas dun dos puntos na ecuación xeral da recta, e **obtemos o valor da ordenada na orixe**, ***n***:

$$y_1 = mx_1 + n \rightarrow n = y_1 - mx_1$$

ou ben:

$$y_2 = mx_2 + n \rightarrow n = y_2 - mx_2$$

3.º **Substituímos os valores obtidos** para a pendente (m) e a ordenada na orixe (n), na ecuación xeral da recta.

EXEMPLO

Calcula a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(3, 2) e *B*(4, 0).

1.º Calculamos o valor da pendente:

$$m = \frac{0 - 2}{4 - 3} = -2$$

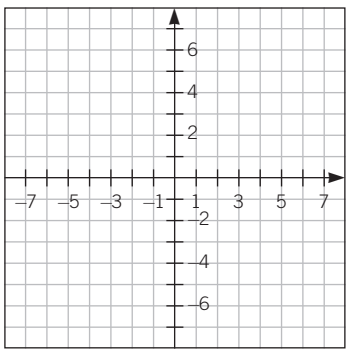
2.º Obtemos o valor da ordenada na orixe substituíndo, por exemplo, o punto A:

$$2 = -2 \cdot 3 + n \rightarrow n = 8$$

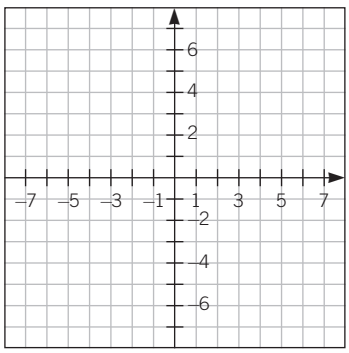
3.º Substituímos os valores obtidos:

$$y = mx + n \xrightarrow{m = -2,\ n = 8} y = -2x + 8$$

1 **Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos *A*(2, −1) e *B*(−3, −4) e represéntaa.**



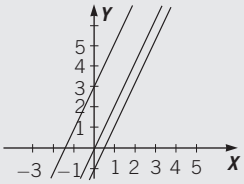
2 **Calcula a ecuación da recta que pasa polo punto *A*(2, −1) e ten de pendente *m* = −2. Fai unha táboa de valores e represéntaa.**

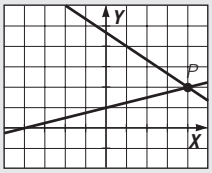


DISTINGUIR AS RECTAS PARALELAS E AS RECTAS SECANTES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **As rectas paralelas teñen a mesma pendente.**
- **As rectas secantes non teñen a mesma pendente.**
- **As rectas secantes córtanse nun punto.** Podemos calcular este punto de dúas formas:
  - **Método gráfico:** debuxamos as rectas e observamos en que punto se cortan.
  - **Método alxébrico:** resolvemos o sistema de ecuacións formado polas ecuacións das dúas rectas.





EXEMPLO

Determina se as seguintes rectas son paralelas ou secantes.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + 3 \longrightarrow m = 2 \\ y = -x + 5 \longrightarrow m = -1 \end{array}\right\} \text{As súas pendentes son distintas} \rightarrow \text{Rectas secantes}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 5 \longrightarrow m = 3 \\ y = 3x - 0{,}5 \rightarrow m = 3 \end{array}\right\} \text{As súas pendentes son iguais} \longrightarrow \text{Rectas paralelas}$$

1 **Une mediante frechas as rectas paralelas.**

$y = 5x - 2$
$y = 3x + 5$
$y = -3x + 5$
$y = -x + 2$

$y = -3x + 1$
$y = -x + 7$
$y = 3x - 2$
$y = 5x + 1$

EXEMPLO

Calcula gráfica e alxebricamente o punto de corte das rectas $y = x - 1$ e $y = -x + 3$.

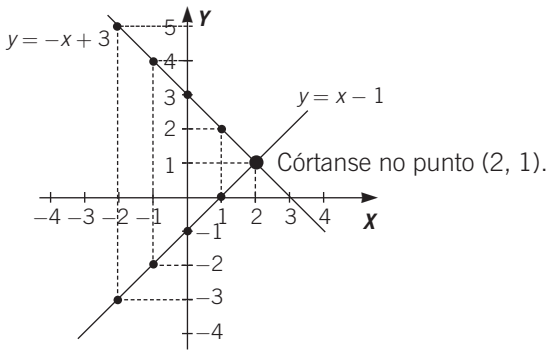
Método gráfico. Calculamos a táboa de valores de cada función e representámolas nos eixes de coordenadas.

$y = x - 1$

x	y
−2	−3
−1	−2
0	−1
1	0
2	1

$y = -x + 3$

x	y
−2	5
−1	4
0	3
1	2
2	1



Método alxébrico. Resolvemos o sistema formado polas dúas ecuacións.

$$\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = -x + 3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x - 1 = -x + 3 \\ x + x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \\ y = x - 1 = 2 - 1 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Córtanse no punto } (2, 1).$$

2 **Calcula de forma gráfica e alxébrica o punto de corte das rectas $y = 2x - 1$ e $y = 3x + 1$.**

3 **Calcula de forma gráfica e alxébrica o punto de corte das rectas $y = -7x + 2$ e $y = 3x - 1$.**

4 **Representa as seguintes funcións. Escribe a súa pendente e sinala cales son paralelas ou secantes.**

$y = -x + 1$ $\qquad$ $y = 3x + 2$ $\qquad$ $y = -x + 5$ $\qquad$ $y = x + 1$

5 **Calcula a ecuación da recta paralela a $y = 5x - 3$ e que pasa pola orixe de coordenadas.**

6 **Escribe a ecuación da recta que pasa polo punto $A(5, 0)$ e ten a mesma pendente ca a recta $y = -3x - 6$.**

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

1 Números racionais

INTRODUCIÓN

Esta unidade desenvolve conceptos e técnicas xa coñecidos doutros cursos. Non obstante, é conveniente repasar as distintas interpretacións que ofrecen as fraccións, as diferenzas de interpretación de fraccións positivas e negativas, e a diferenza entre fraccións propias e impropias.

Ao longo da unidade resolveranse operacións tales como sumas, restas, multiplicacións, divisións e obtención do común denominador de varias fraccións, que porán de manifesto a súa utilidade para resolver problemas da vida diaria. Convén facer reflexionar aos alumnos sobre a presenza das fraccións en distintos contextos.

Ademais, traballarase a relación entre os números racionais e os números decimais, aprendendo a pasar duns a outros. Practicarase a lectura e a escritura de números decimais exactos e a súa expresión en forma de fraccións decimais.

RESUMO DA UNIDADE

- Dúas fraccións $\frac{a}{b}$ e $\frac{d}{c}$ son *equivalentes* se se cumpre que $a \cdot c = b \cdot d$.
- *Fracción irredutible* é aquela que non se pode simplificar.
- Para *comparar, sumar e/ou restar fraccións,* estas deben ter igual denominador.
- O *produto de dúas fraccións* é outra fracción cuxo numerador é o produto dos numeradores, e con denominador, o produto dos denominadores.
- Para *dividir fraccións* realízase o produto cruzado dos termos de cada unha delas.
- O conxunto dos *números racionais* fórmano os números enteiros e mais os números fraccionarios.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Recoñecer as formas de representación que ten unha fracción.	• Numerador e denominador. • Representación escrita, numérica, gráfica e na recta.	• Utilización de debuxos e de expresións. • Identificación dunha fracción. • Representación dunha fracción.
2. Recoñecer e obter fraccións equivalentes a unha dada.	• Obtención de fraccións equivalentes a unha dada.	• Obtención de fraccións equivalentes. • Determinación de se dúas fraccións son equivalentes.
3. Amplificar e simplificar fraccións.	• Amplificación de fraccións. • Simplificación de fraccións. • Fracción irredutible.	• Obter fraccións equivalentes por amplificación e simplificación. • Recoñecemento da fracción irredutible.
4. Reducir fraccións a común denominador.	• Obtención do común denominador de varias fraccións. • Comparación de fraccións.	• Busca do denominador común de dúas fraccións. • Ordenación dun conxunto de fraccións.
5. Sumar, restar, multiplicar e dividir fraccións.	• Suma e resta de fraccións. • Multiplicación e división de fraccións.	• Operacións con fraccións. • Operacións combinadas.
6. Obter a forma decimal dunha fracción.	• Expresión de fraccións en forma decimal.	• Obtención da expresión decimal dunha fracción.
7. Recoñecer os diferentes tipos de números decimais.	• Decimal exacto. • Decimal periódico puro. • Decimal periódico mixto.	• Distinción dos números decimais exactos, periódicos puros e periódicos mixtos.
8. Obter fraccións a partir de números decimais.	• Expresión de números decimais como fraccións.	• Cálculo da expresión fraccionaria dun número decimal exacto ou periódico.

1 OBXECTIVO 1
RECOÑECER AS FORMAS DE REPRESENTACIÓN QUE TEN UNHA FRACCIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

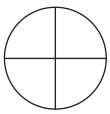
Unha fracción está composta por un **numerador** e un **denominador**.

- **Denominador** → Partes en que se divide a unidade.
- **Numerador** ⟶ Partes que tomamos da unidade.

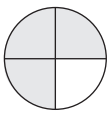
EXEMPLO

Fracción: $\frac{3}{4}$ → NUMERADOR = 3; DENOMINADOR = 4

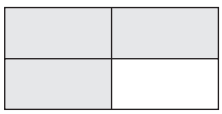
- **Denominador** → Dividimos a unidade en catro partes iguais.



- **Numerador** → Tomamos tres partes do total.



→ $\frac{3}{4}$



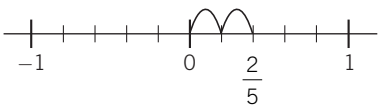
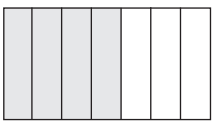
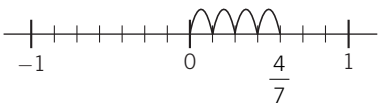
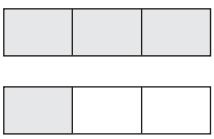
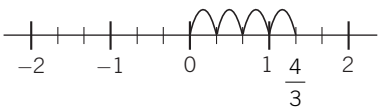
→ $\frac{3}{4}$

FORMAS DE REPRESENTACIÓN DUNHA FRACCIÓN

Unha fracción pódese representar de distintas formas:

- Representación **escrita**.
- Representación **numérica**.
- Representación **gráfica**.
- Representación na **recta numérica**.

EXEMPLO

REPRESENTACIÓN ESCRITA	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN NA RECTA NUMÉRICA
Dous quintos	$\frac{2}{5}$		
Catro sétimos	$\frac{4}{7}$		
Catro terzos	$\frac{4}{3}$		

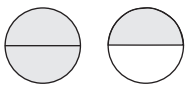
1 **Completa a seguinte táboa.**

REPRESENTACIÓN ESCRITA	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN NA RECTA NUMÉRICA
Catro quintos	$\frac{4}{5}$		
Sete quintos	$\frac{7}{5}$		

2 **Partindo do debuxo, calcula a fracción que representa e escribe como se le.**

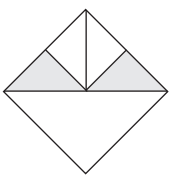
a) → $\frac{\quad}{8}$ → ..... oitavos

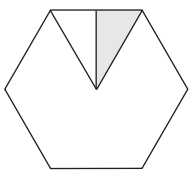
b) → $\frac{\quad}{\quad}$ → ....

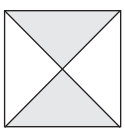
c)  → $\frac{\quad}{2}$ → ..... medios

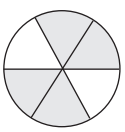
d) → $\frac{\quad}{\quad}$ → ....

3 **Cal é a resposta correcta? Arrodéaa.**

a) $\frac{2}{5}$  $\frac{2}{8}$

c) $\frac{1}{3}$  $\frac{1}{12}$

b) $\frac{2}{5}$  $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{6}$  $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$

1 OBXECTIVO 2
RECOÑECER E OBTER FRACCIÓNS EQUIVALENTES A UNHA DADA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Dúas fraccións $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** cando o produto cruzado de numeradores e denominadores é igual.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

EXEMPLO

As fraccións $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ son equivalentes, xa que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

1 **Debuxa as seguintes fraccións.**

a) $\frac{3}{6}$ ◯ c) $\frac{2}{3}$ ◯ e) $\frac{4}{8}$ ◯

b) $\frac{4}{6}$ ◯ d) $\frac{5}{10}$ ◯ f) $\frac{1}{2}$ ◯

2 **Observando o exercicio anterior vemos que algunhas fraccións, a pesar de seren diferentes, dannos o mesmo resultado. Coloca en dous grupos estas fraccións.**

Grupo 1 { Fraccións que representan a metade da torta. } [ ]

Grupo 2 { Fraccións que representan dous terzos da torta. } [ ]

3 **Calcula tres fraccións equivalentes.**

a) $\frac{9}{12} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{16}{24} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{2}{4} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $\frac{6}{12} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

4 **Calcula o número que falta para que as fraccións sexan equivalentes.**

a) $\frac{1}{5} = \frac{x}{10}$ b) $\frac{4}{3} = \frac{8}{x}$ c) $\frac{x}{30} = \frac{2}{15}$

AMPLIFICAR E SIMPLIFICAR FRACCIÓNS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

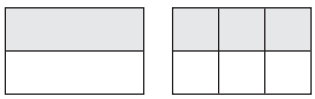
AMPLIFICACIÓN DE FRACCIÓNS

- Para obter unha fracción equivalente a outra fracción dada **multiplicamos** o numerador e o denominador da dita fracción **por un número distinto de cero**. Este método chámase amplificación.
- Observa que podemos obter tantas fraccións amplificadas como queiramos.

EXEMPLO

Obtén unha fracción equivalente e amplificada de $\frac{1}{2}$.

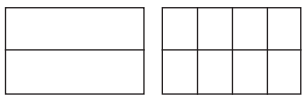
$$\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$



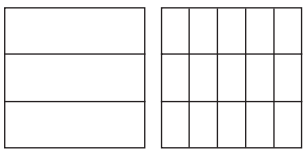
As fraccións son equivalentes, é dicir, $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ representan o mesmo número.

1 **Calcula fraccións equivalentes por amplificación.**

a) $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\cdot 4}{\cdot 4} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{1}{2} = \frac{\quad}{\quad}$



b) $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{\cdot 5}{\cdot 5} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$



2 **Calcula dúas fraccións equivalentes.**

a) $\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{1}{4} \rightarrow \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{4}{5} \rightarrow \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $\frac{9}{2} \rightarrow \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIÓNS

- **Simplificar** unha fracción é atopar outra fracción equivalente a ela dividindo numerador e denominador por un factor común.
- Observa que o proceso, ao contrario ca na amplificación, non se pode realizar indefinidamente. Remata ao atopar unha fracción que non se pode simplificar. Esta fracción chámase **fracción irredutible**.

EXEMPLO

Simplifica as seguintes fraccións.

$\mathbf{\frac{5}{10}} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{10}$ e $\frac{1}{2}$ son equivalentes

$\mathbf{\frac{20}{30}} = \frac{20:10}{30:10} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{20}{30}$ e $\frac{2}{3}$ son equivalentes

3 **Amplifica e simplifica a seguinte fracción.**

$\mathbf{\frac{2}{4}}$

Amplificar: $\frac{2}{4} = \frac{2\cdot}{4\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$

Simplificar: $\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{\quad}{\quad}$

$\frac{2}{4} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

4 **Fai o mesmo con estas fraccións.**

a) $\frac{6}{21}$

Amplificar: $\frac{6}{21} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$

Simplificar: $\frac{6}{21} = \frac{:}{:} = \frac{\quad}{\quad}$

$\frac{6}{21} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{12}{20}$

Amplificar: $\frac{12}{20} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$

Simplificar: $\frac{12}{20} = \frac{:}{:} = \frac{\quad}{\quad}$

$\frac{12}{20} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

REDUCIR FRACCIÓNS A COMÚN DENOMINADOR

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

COMPARAR FRACCIÓNS

- Que fracción é maior, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$?

  Representamos as fraccións cun debuxo e vémolo facilmente:

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

- O debuxo, con todo, non sempre é tan claro. Polo tanto, imos aprender a facelo creando unha fracción equivalente de cada fracción, con **común denominador**, é dicir, temos que conseguir que o denominador das dúas fraccións sexa o mesmo.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

6 é o común denominador.

- Agora, en lugar de comparar $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$, comparamos $\frac{3}{6}$ con $\frac{2}{6}$.
- Como o denominador é común, comparamos os numeradores de $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$ para sabermos cal das fraccións é maior:

$$\frac{3}{6} > \frac{2}{6}\text{; polo tanto, } \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

- Lembra que, dadas dúas fraccións con igual denominador, é maior a que ten maior numerador.

1 **Ordena estas fraccións.**

$$\frac{4}{3} = \frac{\cdot 10}{\cdot 10} = \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{\cdot 15}{\cdot 15} = \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\quad}{\quad}$$

COMÚN DENOMINADOR

$$\frac{\quad}{30} > \frac{\quad}{30} > \frac{\quad}{30} > \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{\quad}{\quad} > \frac{\quad}{\quad} > \frac{\quad}{\quad} > \frac{\quad}{\quad}$$

BUSCAR O DENOMINADOR COMÚN

Queremos comparar as seguintes fraccións: $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$.

- Cales son os denominadores? ...10..., ...3... e ...5...
- O **común denominador** será un número maior ca 10, 3 e 5, pero que teña 10, 3 e 5 como divisores, por exemplo:

  a) O número 12 é maior ca 10, 3 e 5, pero ¿tenos a todos eles como divisores?

  $$12 = 3 \cdot 4$$
  $$12 = 10 \cdot ?$$
  $$12 = 5 \cdot ?$$

  Non ten a 10 nin a 5 como divisores, só a 3. Polo tanto, 12 non serve.

  b) O número 15 é tamén maior ca 10, 3 e 5. Pero vexamos o que pasa cando o utilizamos:

  $$15 = 10 \cdot ?$$
  $$15 = 3 \cdot 5$$
  $$15 = 5 \cdot 3$$

  Tampouco serve 15, xa que non ten a 10 como divisor.

  c) Probamos co número 30.

  $$30 = 10 \cdot 3$$
  $$30 = 5 \cdot 6$$
  $$30 = 3 \cdot 10$$

  O número 30 serve como común denominador, aínda que non é o único. Se continuásemos buscando atopariamos máis: 60, 90, …

- Imos calcular fraccións equivalentes ás dadas, con denominador común 30:

$\frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{21}{30}$ Que número hai que multiplicar para que o denominador sexa 30 se partimos de 10? $10 \cdot ? = 30$

$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{20}{30}$ Que número hai que multiplicar para que o denominador sexa 30 se partimos de 3? $3 \cdot ? = 30$

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{18}{30}$ Que número hai que multiplicar para que o denominador sexa 30 se partimos de 5? $5 \cdot ? = 30$

Polo tanto: $\frac{7}{10}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{21}{30}, \frac{20}{30}, \frac{18}{30}$

Agora ordenamos as fraccións de maior a menor:

$$\frac{21}{30} > \frac{20}{30} > \frac{18}{30} \longrightarrow \frac{7}{10} > \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

2 **Ordena as seguintes fraccións: $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$ e $\frac{3}{4}$.**

- Fixámonos nos denominadores: ....., ..., ..., ..., ...
- Queremos atopar un número que conteña todos os denominadores como divisores.

  O número máis axeitado é 12.

$$\frac{7}{12} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{12}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{\cdot 2}{\cdot 2} = \frac{}{12}$$ *Como se calcula este número? 12 : 6 = 2*

$$\frac{2}{3} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{12}$$ *Como se calcula este número? 12 : 3 =*

$$\frac{5}{2} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\cdot}{\cdot} = \frac{}{}$$

- Agora ordenamos de maior a menor:

REDUCIR FRACCIÓNS A COMÚN DENOMINADOR

Reduce a común denominador estas fraccións: $\frac{7}{15}$ e $\frac{8}{9}$.

Calculamos o m.c.m. dos denominadores.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{r} 15 = 3 \cdot 5 \\ 9 = 3^2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{m.c.m. } (15, 9) = 3^2 \cdot 5 = 45$$

O m.c.m. dos denominadores é o novo denominador das fraccións.

$$\frac{7}{15} \rightarrow 45 : 15 = 3 \rightarrow 7 \cdot 3 = 21 \rightarrow \frac{21}{45} \qquad \frac{8}{9} \rightarrow 45 : 9 = 5 \rightarrow 8 \cdot 5 = 40 \rightarrow \frac{40}{45}$$

3 **Completa a táboa.**

FRACCIÓNS	REDUCIDAS A COMÚN DENOMINADOR	ORDENADAS DE MENOR A MAIOR
$\frac{7}{4}, \frac{3}{5}, \frac{5}{6}$		
$\frac{47}{12}, \frac{23}{15}, \frac{7}{24}$		

ADAPTACIÓN CURRICULAR

SUMAR, RESTAR, MULTIPLICAR E DIVIDIR FRACCIÓNS

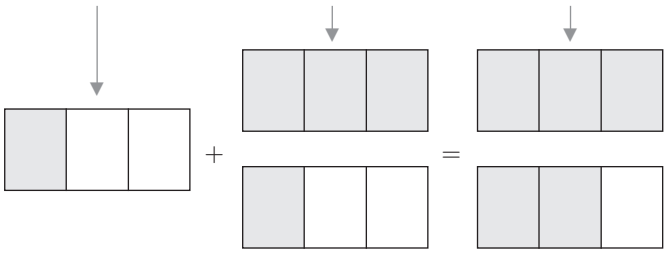
NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

SUMA (OU RESTA) DE FRACCIÓNS CON IGUAL DENOMINADOR

A suma (ou resta) de fraccións con igual denominador é outra fracción co mesmo denominador e cuxo numerador é a suma (ou resta) dos numeradores.

EXEMPLO

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$



Un terzo máis catro terzos son cinco terzos.

SUMA (OU RESTA) DE FRACCIÓNS CON DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar (ou restar) fraccións con distinto denominador, reducimos primeiro a denominador común e, despois, sumamos (ou restamos) os seus numeradores.

EXEMPLO

Fai esta suma de fraccións: $\frac{1}{3} + \frac{6}{5}$.

Para sumar as fraccións hai que obter fraccións equivalentes co mesmo denominador.

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{15} \qquad \frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{18}{15}$$

Interésanos obter o mínimo común denominador de 3 e de 5, neste caso 15.

Agora sumamos as fraccións con igual denominador:

$$\frac{1}{3} + \frac{6}{5} = \frac{5}{15} + \frac{18}{15} = \frac{23}{15}$$

1 **Realiza as seguintes operacións.**

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = __$

b) $\frac{10}{7} - \frac{2}{3} = __ - __ = __$ $\qquad \frac{10}{7} = \frac{\cdot}{\cdot} = __$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{\cdot}{\cdot} = __$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIÓNS

O produto de dúas fraccións é outra fracción cuxo numerador é o produto dos numeradores e o denominador é o produto dos denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

EXEMPLO

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{12}{10}$$

2 **Realiza as multiplicacións de fraccións.**

a) $\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{4} =$

b) $\frac{10}{11} \cdot \frac{13}{9} =$

c) $\frac{6}{8} \cdot \frac{4}{3} =$

d) $\frac{5}{4} \cdot \frac{8}{20} =$

e) $\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{15} =$

f) $\frac{7}{8} \cdot \frac{11}{9} =$

g) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} =$

h) $\frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3} =$

DIVISIÓN DE FRACCIÓNS

A división de dúas fraccións é outra fracción cuxo numerador é o produto do numerador da primeira polo denominador da segunda fracción, e cuxo denominador é o produto do denominador da primeira fracción polo numerador da segunda:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

EXEMPLO

$$\frac{11}{2} : \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{55}{6}$$

3 **Realiza as seguintes divisións de fraccións.**

a) $\frac{8}{3} : \frac{4}{5} =$

b) $\frac{9}{5} : \frac{5}{7} =$

c) $\frac{4}{5} : \frac{1}{7} =$

d) $\frac{5}{2} : \frac{1}{10} =$

e) $\frac{8}{3} : \frac{16}{18} =$

f) $\frac{2}{7} : \frac{4}{3} =$

g) $\frac{6}{4} : \frac{3}{8} =$

h) $\frac{18}{5} : \frac{5}{2} =$

Lembra que, cando se realizan **operacións combinadas**, é dicir, sumas, restas, multiplicacións e divisións á vez:

- Fanse primeiro as **operacións das parénteses**.
- Despois resólvense as **multiplicacións e as divisións**, de esquerda a dereita.
- Por último, opéranse as **sumas e as restas**, na mesma orde.

EXEMPLO

$$\mathbf{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+\frac{3}{4}:\frac{1}{5}-\frac{5}{4}}$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\oplus\frac{3}{4}:\frac{1}{5}\ominus\frac{5}{4}$$

Neste caso, a operación queda divida en tres BLOQUES.

$$\underset{A}{\boxed{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}}+\underset{B}{\boxed{\frac{3}{4}:\frac{1}{5}}}-\underset{C}{\boxed{\frac{5}{4}}}$$

Realizamos as operacións de cada bloque antes de sumar ou restar:

A: Facemos a multiplicación.
B: Facemos a división.
C: Non se pode operar.

$$\boxed{\frac{15}{4}}+\boxed{\frac{15}{4}}-\boxed{\frac{5}{4}}$$

Agora realizamos as sumas e as restas: Solución $=\frac{25}{4}$

4 **Realiza estas operacións:** $\mathbf{\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)}$.

- Temos dous bloques cos que debemos operar por separado:

$$\underset{A}{\boxed{\frac{7}{3}}}-\underset{B}{\boxed{\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)}}\rightarrow\begin{cases}\text{A: } \frac{7}{3} & \text{Non se pode operar.}\\ \text{B: } \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right) & \text{Temos que operar por partes, volvendo dividir en bloques a operación.}\end{cases}$$

- Como non hai sumas ou restas fóra das parénteses, ten prioridade o produto:

$$\underset{I}{\boxed{\frac{5}{2}}}\cdot\underset{II}{\boxed{\left(\frac{2}{3}+1\right)}}\rightarrow\begin{cases}\text{I: Non se pode operar.}\\ \text{II: Realizamos a suma: } \frac{2}{3}+1=\frac{2}{3}+\frac{\ }{3}=\frac{\ }{3}\\ \qquad 1=\frac{\cdot 3}{\cdot 3}=\frac{\ }{3}\end{cases}\rightarrow\frac{5}{2}\cdot\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$$

$$\frac{7}{3}-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{7}{3}-\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }-\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$$

Común denominador

OBTER A FORMA DECIMAL DUNHA FRACCIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Para **obter a forma decimal** dunha fracción ou número racional **divídese o numerador entre o denominador**.

EXEMPLO

$\frac{3}{4} \longrightarrow$

```
30 | 4
20   0,75
 0
```

FORMA FRACCIONARIA: $\frac{3}{4} \longrightarrow$ FORMA DECIMAL: 0,75

$\frac{14}{11} \longrightarrow$

```
14 | 11
30   1,2727...
 80
  30
   80
    3
```

FORMA FRACCIONARIA: $\frac{14}{11} \longrightarrow$ FORMA DECIMAL: $1{,}2727\ldots = 1{,}\widehat{27}$

$\frac{13}{6} \longrightarrow$

```
13 | 6
10   2,166...
 40
  40
   4
```

FORMA FRACCIONARIA: $\frac{13}{6} \longrightarrow$ FORMA DECIMAL: $2{,}166\ldots = 2{,}1\widehat{6}$

1 **Expresa en forma decimal estas fraccións e ordénaas.**

a) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{9}{5}$ e) $\frac{37}{30}$

b) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{31}{25}$ f) $\frac{17}{6}$

..... < ..... < ..... < ..... < ..... < ..... → ..... < ..... < ..... < ..... < ..... < .....

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 OBXECTIVO 7
RECOÑECER OS DIFERENTES TIPOS DE NÚMEROS DECIMAIS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Ao dividir o numerador entre o denominador dunha fracción para obter a súa expresión decimal poden darse estes casos.

- **Se o resto é cero:**
  – Cando o cociente non ten parte decimal, temos un **número enteiro**.
  – Cando o cociente ten parte decimal, dicimos que é un **decimal exacto**.
- **Se o resto non é cero:** as cifras do cociente repítense, a expresión decimal ten infinitas cifras. Obtense un **decimal periódico**.
  – Cando a parte que se repite comeza desde a coma, chámase **decimal periódico puro**.
  – Cando a parte que se repite non comeza desde a coma, chámase **decimal periódico mixto**.

EXEMPLO

$\frac{3}{4} = 0{,}75 \rightarrow$ Decimal exacto

$\frac{14}{11} = 1{,}\widehat{27} \rightarrow$ Decimal periódico puro

$\frac{13}{6} = 2{,}1\widehat{6} \rightarrow$ Decimal periódico mixto

1 **Completa a táboa, clasificando a expresión decimal das fraccións en exactas, periódicas puras ou periódicas mixtas.**

FORMA FRACCIONARIA	FORMA DECIMAL	DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO
$\frac{5}{3}$	$1{,}\widehat{6}$	Non	Si	Non
$\frac{7}{6}$				
$\frac{9}{5}$				
$\frac{31}{25}$				
$\frac{37}{30}$				
$\frac{17}{6}$				

2 **Escribe en cada número as cifras necesarias para completar dez cifras decimais.**

a) 1,347347…
b) 2,7474…
c) 4,357357…
d) 0,1313…
e) 3,2666…
f) 0,25373737…
g) 1,222…
h) 43,5111…

OBTER FRACCIÓNS A PARTIR DE NÚMEROS DECIMAIS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Todo número decimal exacto ou periódico pode expresarse en forma de fracción. Para iso hai que multiplicalo pola potencia de 10 axeitada e realizar unha serie de operacións ata obter unha fracción.

NÚMEROS DECIMAIS EXACTOS

- Chamámoslle x a 0,32.
- Multiplicamos pola unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais ten o número.
- Simplificamos, se é posible.

0,32

$x = 0{,}32$

$100x = 100 \cdot 0{,}32$

$100x = 32$

$x = \frac{32}{100}$

$x = \frac{8}{25}$

$0{,}32 = \frac{8}{25}$

1 **Completa a operación.**

0,14

$x = 0{,}14$

$100x = 100 \cdot 0{,}14$

$100x =$

$x = \frac{\quad}{100}$

$x =$ ____

0,14 = ____

2 **Calcula a forma fraccionaria deste número decimal.**

Por que multiplicamos por 10 e non por 100?

0,3

$x = 0{,}3$

$10x = 10 \cdot 0{,}3$

$x =$ ____

0,3 = ____

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Expresa estes números decimais como fracción.**

a)

0,101

$x = 0{,}101$

Por que valor multiplicamos?

$x =$ ——

0,101 = ——

b)

0,24

$x =$ ——

0,24 = ——

c)

0,7

$x =$ ——

0,7 = ——

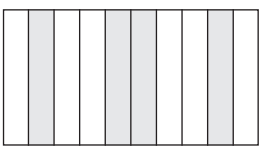
d)

0,44

$x =$ ——

0,44 = ——

4 **Expresa mediante un número decimal a parte gris da figura.**



Escribimos de forma fraccionaria a parte gris da figura. —— → Pasamos a forma decimal.

NÚMEROS DECIMAIS PERIÓDICOS PUROS

Queremos obter a forma fraccionaria do número decimal $2{,}333\ldots = 2{,}\widehat{3}$.

- Se 2,333… non tivese infinitas cifras decimais, poderiamos obter a forma fraccionaria coma no caso dos números decimais exactos.

- Polo tanto, non podemos actuar deste xeito.

$$2{,}333\ldots$$

$$x = 2{,}333\ldots$$

$$10x = 10 \cdot 2{,}333\ldots$$

$$10x = 23{,}333\ldots$$

$$x = \frac{23{,}333\ldots}{10}$$

$$\cancel{2{,}333\ldots = \frac{23{,}333\ldots}{10}}$$

- Temos que eliminar as infinitas cifras decimais.

$$2{,}333\ldots$$

Multiplicamos pola unidade seguida de tantos ceros como cifras ten o período.

$$x = 2{,}333\ldots$$

$$10x = 10 \cdot 2{,}333\ldots$$

$$10x = 23{,}333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 10x = 23{,}\cancel{333}\ldots \\ -x = -2{,}\cancel{333}\ldots \\ \hline 9x = 21 \end{array}$$

Realizando esta resta eliminamos a parte decimal.

Simplificamos.

$$x = \frac{21}{9}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$2{,}\widehat{3} = \frac{7}{3}$$

- Sempre hai que simplificar, se se pode, a fracción resultante.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

5 **Completa as seguintes operacións.**

a) $5,\overset{\frown}{7} = 5,777\ldots$

$x = 5,777\ldots$

$10x =$

$10x =$

$$\begin{array}{r} 10x = \\ -x = -5,777\ldots \\ \hline 9x = \end{array}$$

$x = ___$ → $5,\overset{\frown}{7} = ___$

b) $45,\overset{\frown}{8} = 45,888\ldots$

$x = 45,888\ldots$

$= 10 \cdot 45,888\ldots$

$= 458,888\ldots$

$$\begin{array}{r} = 458,\cancel{888}\ldots \\ -x = -45,\cancel{888}\ldots \\ \hline = \end{array}$$

$x = ___$ → $45,\overset{\frown}{8} = ___$

c) $7,\overset{\frown}{3}$

$x =$

$$\begin{array}{r} -x = \\ \hline = \end{array}$$

$x = ___$ → $7,\overset{\frown}{3} = ___$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

6 **Calcula a forma fraccionaria dos números decimais.**

a)

15,474747…

$x = 15{,}474747\ldots$

Multiplicamos por 100.

$100x = 100 \cdot 15{,}474747\ldots$

$100x =$

$100x =$

$-x = -15{,}474747\ldots$

$99x =$

$x =$ ——

$15{,}\widehat{47} =$ —

b)

$24{,}\widehat{35}$

$x = 24{,}353535\ldots$

$x =$ ——

$24{,}\widehat{35} =$ —

c)

103,251251…

$x = 103{,}251251\ldots$

$x =$ ——

$103{,}\widehat{251} =$ —

ADAPTACIÓN CURRICULAR

NÚMEROS DECIMAIS PERIÓDICOS MIXTOS

Queremos obter a forma fraccionaria do número decimal $2{,}1333\ldots = 2{,}1\widehat{3}$.

- Se actuamos coma no caso dos decimais puros, temos que:

$$x = 2{,}1333\ldots$$

$$10x = 10 \cdot 2{,}1333\ldots$$

$$10x = 21{,}333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 10x = 21{,}\cancel{333}\ldots \\ -x = -2{,}1\cancel{33}\ldots \\ \hline 9x = 19{,}2 \end{array}$$

$$x = \frac{19{,}2}{9}$$ Non obtemos unha fracción.

- Hai que utilizar outro procedemento.

$$2{,}1333\ldots$$

Multiplicamos pola unidade seguida de tantos ceros como cifras ten a súa parte periódica e non periódica.

$$x = 2{,}1333\ldots$$

$$100x = 100 \cdot 2{,}1333\ldots$$

$$100x = 213{,}333\ldots$$

Multiplicamos pola unidade seguida de tantos ceros como cifras ten a súa parte decimal non periódica.

$$10x = 21{,}333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 100x = 213{,}\cancel{333}\ldots \\ -10x = -21{,}\cancel{333}\ldots \\ \hline 90x = 192 \end{array}$$

Realizando esta resta eliminamos os decimais.

$$x = \frac{192}{90}$$

Simplificamos.

$$x = \frac{32}{15}$$

$$2{,}1\widehat{3} = \frac{32}{15}$$

7 **Expresa estes números decimais en forma de fracción.**

a) $5,3\widehat{7} = 5,3777\ldots$

$x = 5,3777\ldots$

$100x = 100 \cdot 5,3777\ldots$

$100x =$

$10x =$

$100x =$

$-10x = -53,777\ldots$

$90x =$

$x =$ ——

$5,3\widehat{7} =$ —

b) $45,2\widehat{8} = 45,2888\ldots$

$x = 45,2888\ldots$

$x =$ ——

$45,2\widehat{8} =$ —

c) $0,7\widehat{3}$

$x =$

$x =$ ——

$0,7\widehat{3} =$ —

ADAPTACIÓN CURRICULAR

8 **Completa a seguinte operación.**

3,57474…

Multiplicamos por 1.000.

$x = 3{,}57474\ldots$

$1.000x = 1.000 \cdot 3{,}57474\ldots$

$1.000x = 3.574{,}7474\ldots$

$10x = 35{,}7474\ldots$

$$\begin{array}{r} 1.000x = 3.574{,}7474\ldots \\ -10x = \quad 35{,}7474\ldots \\ \hline 990x = \end{array}$$

$x =$ ——

$3{,}5\overset{\frown}{74} =$ —

9 **Expresa como unha fracción.**

5,24545…

$x =$

_____

$x =$ ——

$5{,}2\overset{\frown}{45} =$ —

Hai números decimais que non se poden expresar como unha fracción.

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ $\pi = 3{,}1415\ldots$ $\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$

Estes números reciben o nome de **números irracionais**.

10 **Clasifica os seguintes números.**

a) 0,14 b) 4,37777… c) $3{,}\overset{\frown}{4}$ d) 2,44 e) 43,2727… f) $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

DECIMAL EXACTO	DECIMAL PERIÓDICO PURO	DECIMAL PERIÓDICO MIXTO	IRRACIONAL

2 Números reais

INTRODUCIÓN

Os alumnos traballaron en cursos anteriores coas potencias, e coñecen o significado das potencias de expoñente natural e das partes que as compón.

Comezarase a unidade repasando as operacións con potencias: multiplicación, división, potencia dunha potencia e as súas operacións combinadas.

A continuación, introducirase o caso de potencias de expoñente negativo. Sinalarase que estas potencias cumpren as mesmas propiedades ca as potencias con expoñente natural, e xa que logo, as regras das operacións son as mesmas.

A parte que lles pode presentar maior dificultade aos alumnos é a notación científica das potencias. A súa utilidade radica na posibilidade de expresar números moi grandes e moi pequenos mediante potencias de 10.

É fundamental conseguir que os alumnos alcancen o maior grao de comprensión posible á hora de identificar e traballar cos distintos tipos de números que aparecen na unidade; polo tanto, deben aprender a distinguir os diferentes números decimais: exacto, periódico puro, periódico mixto e irracional.

RESUMO DA UNIDADE

- Un número *a*, chamado *base*, elevado a un *expoñente n* é: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot n$ veces $\cdot \ldots$
- *Produto de potencias da mesma base*: escríbese a base e súmanse os expoñentes.
- *División de potencias da mesma base*: escríbese a base e réstanse os expoñentes.
- *Potencia dunha potencia*: escríbese a base e multiplícanse os expoñentes.
- Un *número a elevado a un expoñente negativo* $-n$ é igual ao inverso da potencia de base *a* e expoñente *n*: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Para *sumar ou restar en notación científica* redúcense os números á orde de magnitude do maior e súmanse ou réstanse as partes enteiras ou decimais.
- Para *multiplicar ou dividir en notación científica* multiplícanse ou divídense os decimais entre si e as potencias de 10, despois ponse o resultado en notación científica.
- Os *números irracionais* son os números con infinitos decimais non periódicos.
- O conxunto dos *números reais* fórmano os números racionais e os irracionais.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Realizar operacións con potencias.	• Potencias: base e expoñente. • Multiplicación de potencias da mesma base. • División de potencias da mesma base. • Potencia dunha potencia. • Potencias de expoñente negativo.	• Expresión do produto de varios factores iguais como potencia. • Produto e división de potencias da mesma base. • Potencia dunha potencia. • Utilización das regras das operacións combinadas con potencias. • Definición de potencia de expoñente negativo.
2. Expresar números en notación científica.	• Notación científica dun número decimal. • Orde de magnitude.	• Paso dun número en notación decimal a científica, e viceversa. • Comparación de números escritos en notación científica.
3. Realizar sumas e restas en notación científica.	• Suma e resta de números en notación científica.	• Distinción da orde de magnitude dun número en notación científica. • Redución a unha mesma orde de magnitude para sumar e restar.
4. Realizar multiplicacións e divisións en notación científica.	• Multiplicación e división en notación científica.	• Multiplicación e división de números decimais e potencias de 10.

REALIZAR OPERACIÓNS CON POTENCIAS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

POTENCIA

- Un número *a*, chamado base, elevado a un expoñente natural *n* é igual ao resultado de multiplicar *a* por si mesmo *n* veces:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

a^n → ***n*: expoñente** (indica cantas veces se multiplica a base).
a^n → ***a*: base**

- Lese: «*a* elevado a *n*».

EXEMPLO

$\mathbf{6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3}$ → Lese: «seis elevado a tres».

1 **Completa.**

a) $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = \square$ «.....»

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = \square$ «.....»

c) $= 13^5$ «.....»

d) $= \square$ «sete elevado a catro»

e) $= \square$ «nove elevado a cinco»

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS

- Como as potencias son multiplicacións, aplicando a definición de potencia temos que:

$$3^4 \cdot 3^3 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3^7$$

$$5^2 \cdot 5^4 = \overbrace{5 \cdot 5} \cdot \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^{⑥} \leftarrow \textbf{expoñente}$$

- As potencias deben ter a **mesma base** para poder sumar os expoñentes.

$3^2 \cdot 5^4 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \rightarrow$ Non se pode pór co mesmo expoñente.

- A fórmula xeral para **multiplicar potencias da mesma base** é:

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

2 **Realiza as seguintes operacións.**

a) $10^2 \cdot 10^5 =$

b) $7^4 \cdot 7^2 = 7^{\bigcirc}$

c) $11^3 \cdot 11^2 \cdot 11 =$

d) $3^2 \cdot 3^6 =$

e) $3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^5 =$

f) $\square \cdot 3^5 = 3^7$

g) $11^3 \cdot 11^3 =$

h) $19^5 \cdot 19^7 =$

i) $2^2 \cdot \square = 2^5$

DIVISIÓN DE POTENCIAS

- Para dividir potencias con igual base, réstanse os expoñentes: $\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$.
- Ten en conta que a división entre potencias de distinta base non se pode realizar, e debe quedar indicada.

EXEMPLO

$$\mathbf{7^5 : 7^2} = \frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot 7\cdot 7\cdot 7}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}} = 7\cdot 7\cdot 7 = 7^3$$

3 **Calcula estas operacións.**

a) $5^6 : 5^4 = \dfrac{5^6}{5^4} = \underline{\qquad\qquad} = 5\cdot 5 = \square$

b) $3^7 : 3^4 = \underline{\quad} = \dfrac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = \square\cdot\square\cdot\square = \square$

c) $11^5 : 11^3 =$

d) $13^6 : 13^2 =$

e) $7^3 : 7^2 =$

4 **Realiza as divisións.**

a) $3^5 : 3^4 = \square$

b) $\square : 7^2 = 7^5$

c) $4^6 : \square = 4^3$

d) $12^7 : 12^4 = \square$

e) $5^7 : \square = 5^2$

f) $6^2 : 6^5 = \square$

- Hai operacións que combinan a multiplicación e a división. Nestes casos, realizamos as operacións, paso a paso.

$$\frac{3^2\cdot 3^5\cdot 3}{3^6} = \frac{3^8}{3^6} = 3^2$$

$$\frac{5^6\cdot 5^3}{5^2\cdot 5^3} = \frac{5^9}{5^5} = 5^4$$

- Lembra que só podemos operar con potencias da mesma base.

$$\frac{7^2\cdot 7^3\cdot 5^2}{7^2\cdot 7} = \frac{7^5\cdot 5^2}{7^3} = 7^2\cdot 5^2$$

5 **Completa as seguintes operacións.**

a) $(2^5\cdot 2^4) : (2^3\cdot 2^2) = \underline{\qquad\qquad} = \dfrac{2^{\bigcirc}}{2^{\bigcirc}} = \square$

b) $(11^5\cdot 11^2\cdot 11^3) : (11^4\cdot 11) =$

c) $(10^5 : 10^2)\cdot 10^5 = \underline{\quad}\cdot\square = \square$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

POTENCIA DUNHA POTENCIA

- Se elevamos unha potencia a outra potencia, o resultado é unha potencia coa mesma base e cuxo expoñente é o produto dos expoñentes:

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

EXEMPLO

$(7^2)^3 = (7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6$

$(5^4)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

6 **Completa as seguintes operacións.**

a) $(7^3)^4 = 7^{\bigcirc}$

b) $(3^3)^{\bigcirc} = 3^{15}$

c) $(6^2)^{\bigcirc} = 6^{12}$

d) $(9^3)^{\bigcirc} = 9^{15}$

e) $(4^2)^{\bigcirc} = 4^8$

f) $(2^5)^2 = 2^{\bigcirc}$

g) $(5^3)^4 = 5^{\bigcirc}$

h) $(10^2)^3 = 10^{\bigcirc}$

- Hai operacións combinadas que presentan as tres operacións estudadas ata o momento.
- Antes de comezar o seu estudo vexamos as regras para operar:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
multiplicación	**división**	**potencia dunha potencia**

EXEMPLO

$$(2^5 \cdot 2^4) : (2^2)^3 = \frac{2^5 \cdot 2^4}{(2^2)^3} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3$$

7 **Realiza as operacións.**

a) $(3^5 : 3^2)^3 = \left(\frac{\quad}{\quad}\right)^3 = (\quad)^3 =$

b) $(5^7 : 5^3) \cdot (5^6 : 5^2) = \frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad}$

c) $(10^3)^4 : (10^2 \cdot 10^3) =$

d) $(4^2)^3 \cdot (4^5)^2 =$

e) $(6^5 : 6^2) \cdot (6^3)^4 =$

f) $(7^2 : 7) \cdot (7^3)^2 =$

POTENCIA DUNHA FRACCIÓN

Para elevar unha fracción a unha potencia elévanse o numerador e o denominador á dita potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

EXEMPLO

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

8 **Opera.**

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^7 =$

b) $\left(\frac{6}{10}\right)^3 =$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 =$

d) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 =$

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 =$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 =$

9 **Completa o exercicio e resólveo:** $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}$.

- Vexamos o número de bloques en que queda dividida a operación.
  Neste caso temos dous bloques separados polo signo –.

$$\underset{A}{\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^2}} - \underset{B}{\boxed{\frac{3}{4}}}$$

- Realizamos as operacións de cada bloque:

A: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = ___$ B: $\frac{3}{4}$ Neste bloque non podemos operar.

$$___ - \frac{3}{4} = ___ - ___$$

- Temos que resolver a resta, pero para iso necesitamos o denominador común.
  O denominador común é:

$___ = ___$ $___ = ___$

- Agora si podemos restar: Solución = ——

ADAPTACIÓN CURRICULAR

10 **Calcula, dando prioridade ás operacións das parénteses.**

a) $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5}\right) =$

b) $\left(\frac{3}{5} - 1\right) : \frac{1}{2} =$

c) $\left(1 - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{3} + 2\right) =$

d) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) =$

POTENCIA DE EXPOÑENTE NEGATIVO

- Ao efectuar unha división de potencias, o resultado pode ser unha potencia de expoñente negativo:

$$7^3 : 7^5 = \frac{7^3}{7^5} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$$

- É dicir, un número enteiro elevado a unha potencia negativa é unha fracción.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

- En xeral, as potencias de expoñente negativo defínense como: $\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$.
- As potencias de expoñente negativo cumpren as mesmas propiedades ca as potencias de expoñente natural.

11 **Opera con expoñentes negativos.**

a) $5^2 \cdot 3^{-2} = 5^2 \cdot \frac{1}{3^{\bigcirc}} = \frac{5^2}{3^{\bigcirc}} = \frac{25}{\square}$

b) $5^2 \cdot 5^{-7} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot \frac{1}{\square} \cdot 5^3 = \frac{5^2 \cdot 5^3}{\square} =$

c) $6^3 \cdot 2^{-4} = 6^3 \cdot \frac{1}{\square} = (2 \cdot 3)^3 \cdot \frac{1}{\square} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{\square} = \square$

$\boxed{6 = 2 \cdot 3}$

d) $7^3 \cdot 7^2 \cdot 7^{-4} = \square \cdot \square \cdot \frac{1}{\square} =$ _____

e) $4^3 \cdot 2^{-3} \cdot 8 = 4^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 8 = (2 \cdot 2)^3 \cdot \frac{\square}{\square} \cdot 2^3 =$ ___ =

$\boxed{4 = 2 \cdot 2}$

$\boxed{8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3}$

12 **Expresa en forma de potencia da base indicada en cada caso.**

OPERACIÓN	BASE	RESULTADO
$9^{-7} \cdot 9^{11}$	3	
$4^6 : 8^{-3}$	2	
$(25^9)^{-3}$	5	
$(16^{-5} : 4^3)^{-2}$	2	
$(49^{-3})^4 : 7^{-6}$	7	

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 OBXECTIVO 2
EXPRESAR NÚMEROS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- A expresión dun número en **notación científica** consiste en representalo como un número enteiro ou un número decimal, cunha soa cifra enteira, multiplicado por unha potencia de 10 (positiva ou negativa).

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}001$$

- Chamámoslle **orde de magnitude** dun número expresado en notación científica ao expoñente da potencia de 10.

EXEMPLO

Expresa en notación científica o número 3.220.000.

Desprazamos a coma seis lugares á esquerda e multiplicamos por 10^6.

NOTACIÓN DECIMAL — NOTACIÓN CIENTÍFICA

$$3.220.000 = \boxed{3{,}22} \cdot 10^6$$

PARTE DECIMAL — POTENCIA DE 10

Determina a orde de magnitude do número anterior.

A orde de magnitude é 6, xa que o expoñente da potencia de 10 é 6.

1 **Realiza as operacións.**

a) $10^3 =$ $\qquad =$

b) $10^4 =$ $\qquad =$

c) $10^5 =$ $\qquad =$

d) $10^{-4} = \dfrac{1}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = 0{,}0...$

e) $10^{-6} =$ $\qquad =$

f) $10^{-3} =$

2 **Escribe en forma decimal estes números expresados en notación científica.**

a) $3{,}2 \cdot 10^4 = 3{,}2 \cdot 10.000 =$

b) $3{,}2 \cdot 10^{-2} = 3{,}2 \cdot \dfrac{1}{\qquad} =$

3 **Escribe, con todas as súas cifras, estes números escritos en notación científica.**

a) $2{,}51 \cdot 10^6 =$

b) $9{,}32 \cdot 10^{-8} =$

c) $1{,}01 \cdot 10^{-3} =$

d) $1{,}15 \cdot 10^4 =$

e) $3{,}76 \cdot 10^{12} =$

4 **Cal destes números é maior?**

$7{,}1 \cdot 10^{-3}$ → 0,0071

$4{,}2 \cdot 10^{-2}$ → 0,

$1{,}2 \cdot 10^{-4}$ → 0,

O maior número é:

5 **Os seguintes números non están correctamente escritos en notación científica. Escríbeos da forma axeitada.**

NÚMERO	EXPRESIÓN CORRECTA
$12{,}3 \cdot 10^{15}$	
$0{,}6 \cdot 10^{-9}$	
$325 \cdot 10^{3}$	
$0{,}002 \cdot 10^{-2}$	
$6.012 \cdot 10^{4}$	
$1{,}3 \cdot 10^{3}$	

6 **Expresa en notación científica.**

a) Mil trescentos corenta billóns.

b) Duascentas cincuenta milésimas.

c) Trinta e sete.

d) Corenta e tres billóns.

e) Seiscentos oitenta mil.

f) Tres billonésimas.

7 **Indica a orde de magnitude de cada un destes números.**

a) $1{,}3 \cdot 10^{3}$

b) $6 \cdot 10^{-4}$

c) $3{,}2 \cdot 10^{7}$

d) $8 \cdot 10^{-5}$

e) $2{,}6 \cdot 10^{4}$

f) $1{,}9 \cdot 10^{2}$

2 OBXECTIVO 3
REALIZAR SUMAS E RESTAS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Realizar cálculos con números escritos en notación científica é moi fácil: abonda con operar, por un lado, cos números que aparecen antes da potencia de 10 e, por outro, coas potencias.

SUMAR E RESTAR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para sumar (ou restar) números en notación científica redúcense á orde de magnitude do maior e, despois, súmanse (ou réstanse) os números decimais e mantense a mesma potencia de 10.

EXEMPLO

Realiza as seguintes operacións.

$\mathbf{3{,}5 \cdot 10^3 + 5{,}2 \cdot 10^3} = (3{,}5 + 5{,}2) \cdot 10^3 = 8{,}7 \cdot 10^3$

Se os expoñentes das potencias son iguais, súmanse os números decimais e déixase a mesma potencia de base 10.

$\mathbf{3{,}5 \cdot 10^4 + 5{,}2 \cdot 10^3} = 3{,}5 \cdot 10^4 + 0{,}52 \cdot 10^4 =$

Se os expoñentes das potencias son diferentes, redúcese ao maior.

$= (3{,}5 + 0{,}52) \cdot 10^4 = 4{,}02 \cdot 10^4$

Despois súmanse os números decimais e déixase a potencia de base 10.

1 Completa estas sumas e restas.

a) $17.000 + 3{,}2 \cdot 10^3 - 232 \cdot 10^2 =$

$= 17 \cdot 10^3 + 3{,}2 \cdot 10^3 - \square \cdot 10^3 = (\square + \square - \square) \cdot 10^3 =$

b) $0{,}00035 + 5{,}7 \cdot 10^{-4} - 7{,}2 \cdot 10^{-3} =$

$= \square \cdot 10^{\bigcirc} + \square \cdot 10^{\bigcirc} - \square \cdot 10^{\bigcirc} = (\square + \square - \square) \cdot 10^{\bigcirc} =$

Deben ter o mesmo expoñente.

c) $1{,}9 \cdot 10^5 + 3{,}2 \cdot 10^7 =$

d) $6 \cdot 10^{-4} - 4{,}5 \cdot 10^{-2} =$

2 Realiza as operacións en notación científica.

a) $37{,}3 \cdot 10^6 - \square = 8{,}4 \cdot 10^5$

b) $9{,}32 \cdot 10^{-3} + \square = 5{,}6 \cdot 10^{-2}$

c) $1{,}15 \cdot 10^4 + \square = 3 \cdot 10^5$

d) $3{,}6 \cdot 10^{12} - \square = 2 \cdot 10^{12}$

REALIZAR MULTIPLICACIÓNS E DIVISIÓNS EN NOTACIÓN CIENTÍFICA 2

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

MULTIPLICAR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para multiplicar números en notación científica multiplícanse os números decimais e as potencias de 10. É dicir, obtense un número cuxa parte decimal é igual ao produto dos números decimais, e cuxa potencia de 10 ten un expoñente que é igual á suma dos expoñentes de cada unha delas.

EXEMPLO

$3.457 \cdot (4,3 \cdot 10^4)$ → Pasamos a notación científica → $= (3,457 \cdot 10^3) \cdot (4,3 \cdot 10^4) =$

→ Multiplicamos os números e as potencias de 10 → $= (3,457 \cdot 4,3) \cdot 10^3 \cdot 10^4 =$

→ Escribimos o resultado → $= 14,8651 \cdot 10^7 =$

→ Pasamos a notación científica → $= 1,48651 \cdot 10^8$

1 Completa seguindo o modelo anterior.

a) $13.500.000 \cdot (3,5 \cdot 10^5)$ → Pasamos a notación científica → $= (1,35 \cdot 10^{\bigcirc}) \cdot (3,5 \cdot 10^5) =$

→ Operamos → $= (1,35 \cdot 3,5) \cdot 10^{\bigcirc} \cdot 10^5 =$

→ $=$

b) $(4,5 \cdot 10^5) \cdot 0,032$ → $= (4,5 \cdot 10^5) \cdot (3,2 \cdot 10^{\bigcirc}) =$

→ $=$ $=$

→ Pasamos a notación científica → $=$

c) $0,00013 \cdot 0,002$ → $=$ $=$

→ $=$ $=$

→ Pasamos a notación científica → $=$

2 Efectúa en notación científica.

a) $(34 \cdot 10^3) \cdot (25,2 \cdot 10^{-2}) =$

b) $(8,06 \cdot 10^9) \cdot (0,65 \cdot 10^7) =$

c) $(37,3 \cdot 10^{-2}) \cdot (0,01 \cdot 10^2) =$

d) $(0,00000009) \cdot (1,5 \cdot 10^{-6}) =$

e) $(33,57) \cdot (4,3 \cdot 10^{-4}) =$

f) $(3 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{11}) =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

DIVIDIR EN NOTACIÓN CIENTÍFICA

Para dividir números en notación científica divídense os números decimais e as potencias de 10. É dicir, o número decimal é igual á división dos números decimais e a potencia de 10 ten un expoñente que é igual á resta dos expoñentes de cada unha delas.

EXEMPLO

14.000.000 : (3,2 · 10⁶) $\xrightarrow{\text{Pasamos a notación científica}}$ $= (1{,}4 \cdot 10^7) : (3{,}2 \cdot 10^6)$

$\xrightarrow{\text{Dividimos as partes enteiras ou decimais e as potencias de 10}}$ $= \dfrac{(1{,}4 \cdot 10^7)}{(3{,}2 \cdot 10^6)} = \dfrac{1{,}4}{3{,}2} \cdot \dfrac{10^7}{10^6}$

$\xrightarrow{\text{Escribimos en notación científica}}$ $= 0{,}4375 \cdot 10^1$

$\xrightarrow{\text{Pasamos a notación decimal}}$ $= 4{,}375$

3 **Completa a seguinte operación.**

$13.500.000 : (4{,}3 \cdot 10^5)$ $\xrightarrow{\text{Pasamos a notación científica}}$ $= (1{,}35 \cdot \square) : (\qquad\qquad) =$

$\xrightarrow{\text{Pasamos a fracción}}$ $= \dfrac{\square \cdot 10^{\bigcirc}}{\square \cdot 10^{\bigcirc}} =$

$\longrightarrow$ $= \qquad \cdot 10^5 =$

$\xrightarrow{\text{Pasamos a notación científica}}$ $=$

4 **Realiza as operacións en notación científica.**

a) $(0{,}75 \cdot 10^7) : (0{,}3 \cdot 10^3) =$

b) $(13.650.000.000) : (6{,}5 \cdot 10^{15}) =$

c) $(14.310 \cdot 10^3) : (5{,}4 \cdot 10^5) =$

d) $(9 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^4) =$

e) $(20.100 \cdot 10^3) : (6{,}7 \cdot 10^5) =$

f) $(6 \cdot 10^4) : (3 \cdot 10^2) =$

g) $(15.320) : (20 \cdot 10^4) =$

h) $(6 \cdot 10^{-7}) : (1{,}2 \cdot 10^5) =$

6 Proporcionalidade numérica

INTRODUCIÓN

É moi importante que os alumnos sexan capaces de discernir se dúas magnitudes son proporcionais. Ás veces cometen o erro de pensar que, se ao aumentar unha magnitude, a outra tamén o fai, son directamente proporcionais, sen distinguir se ese aumento é proporcional. Convén insistir na necesidade dunha lectura detallada dos problemas para identificar a relación entre as magnitudes que interveñen.

Trátase, en primeiro lugar, a proporcionalidade directa e as súas aplicacións: reparticións directamente proporcionais, porcentaxes e regra de tres simple directa.

A parte final da unidade dedícase á proporcionalidade inversa e ás súas aplicacións: reparticións inversamente proporcionais e regra de tres inversa.

RESUMO DA UNIDADE

- Dúas *magnitudes* son *directamente proporcionais* cando a razón entre dúas cantidades correspondentes é constante: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$.
- Dúas *magnitudes* son *inversamente proporcionais* se se cumpre que: $x \cdot y = k$.
- A *regra de tres* é un procedemento para coñecer unha cantidade que forma proporción con outras cantidades coñecidas de dúas ou máis magnitudes.
- As *porcentaxes* ou *tantos por cento* expresan a cantidade dunha magnitude que corresponde a 100 unidades da outra magnitude.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Recoñecer magnitudes directamente proporcionais.	• Magnitudes directamente proporcionais. • Constante de proporcionalidade.	• Distinción de magnitudes directamente proporcionais. • Realización de táboas de proporcionalidade directa.
2. Aplicar a regra de tres simple directa.	• Regra de tres simple directa.	• Resolución de problemas aplicando a regra de tres simple directa.
3. Calcular porcentaxes.	• Porcentaxes.	• Expresión de cantidades en tantos por cento. • Utilización das porcentaxes para resolver problemas. • Resolución de problemas con aumentos ou diminucións porcentuais.
4. Realizar reparticións directamente proporcionais.	• Reparticións directamente proporcionais.	• Resolución de problemas utilizando as reparticións directamente proporcionais.
5. Recoñecer magnitudes inversamente proporcionais.	• Magnitudes inversamente proporcionais.	• Distinción de magnitudes inversamente proporcionais.
6. Aplicar a regra de tres simple inversa.	• Regra de tres simple inversa.	• Resolución de problemas aplicando a regra de tres simple inversa.
7. Realizar reparticións inversamente proporcionais.	• Reparticións inversamente proporcionais.	• Resolución de problemas utilizando as reparticións inversamente proporcionais.

6 OBXECTIVO 1
RECOÑECER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONAIS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando a razón entre dúas cantidades correspondentes de ambas é constante:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$$

- Esta constante k denomínase **constante de proporcionalidade directa**.

EXEMPLO

Se cada quilo de mazás vale 40 céntimos, investiga a relación que existe entre o peso de mazás e o prezo.

Para iso, formamos unha táboa de dúas filas: nunha delas representamos as cantidades dunha magnitude, e na outra, as cantidades da outra magnitude.

PESO (en quilos)	1	2	3	4	5
PREZO (en céntimos)	40	80	120	160	200

Todas as divisións entre o prezo das mazás e o seu peso dan o mesmo resultado:

$$\frac{40}{1} = 40 \qquad \frac{80}{2} = 40 \qquad \frac{120}{3} = 40 \qquad \frac{160}{4} = 40 \qquad \frac{200}{5} = 40$$

$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = \frac{200}{5} = 40 = k$$

É dicir, o peso das mazás e o seu prezo son magnitudes directamente proporcionais.

A constante de proporcionalidade é, neste caso, $k = 40$.

A táboa representada denomínase táboa de proporcionalidade.

1 **Para facer unha tortilla utilízanse 4 ovos. Determina a relación entre estas magnitudes.**

a) Completa a táboa.

OVOS	8	16	20		32
TORTILLA	2	4	5	6	

b) Comproba o resultado de todas as divisións entre cantidades correspondentes.

$$\frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{16}{4} = 4 \qquad \frac{20}{5} = 4 \qquad \frac{\square}{6} = \square \qquad \frac{32}{\square} = \square$$

c) Son magnitudes directamente proporcionais? $\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{\square}{6} = \frac{32}{\square} = \square$

d) Determina a constante de proporcionalidade, k.

2 **Completa as táboas seguintes para que sexan táboas de proporcionalidade directa.**

2	4		8	40
6		15		

0	0,25	3		8
	1,25		12	

EXEMPLO

Considera un coche que non circula a velocidade constante, é dicir, vai freando e acelerando segundo o tráfico, de forma que se obteñan os seguintes datos.

HORAS TRANSCORRIDAS	1	2	3	4
QUILÓMETROS PERCORRIDOS	3	7	15	19

Realizamos todas as divisións entre as dúas magnitudes:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{7}{2} = 3{,}5 \qquad \frac{15}{3} = 5 \qquad \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Podemos observar que estas divisións non dan o mesmo resultado. Polo tanto, as magnitudes das horas transcorridas e os quilómetros percorridos non son directamente proporcionais.

3 **Por cada ventá instalada cóbrannos 500 €, pero se instalamos máis de 10 ventás cóbrannos 450 € por cada unha. Comproba se estas magnitudes son directamente proporcionais.**

a) Completa a táboa cos datos numéricos que faltan.

NÚMERO DE VENTÁS	2	4	7	10	11	20
PREZO	1.000	2.000		5.000	4.950	9.000

b) Calcula o resultado das razóns entre cantidades correspondentes.

$$\frac{1.000}{2} = \square \qquad \frac{2.000}{4} = \square \qquad \frac{\square}{7} = \square$$

$$\frac{5.000}{10} = \square \qquad \frac{4.950}{11} = \square \qquad \frac{9.000}{20} = \square$$

c) Son magnitudes directamente proporcionais?

4 **Estuda se as seguintes magnitudes son directamente proporcionais.**

a) O lado dun cadrado e o seu perímetro.
b) O volume que ocupa un líquido e o seu peso.
c) O número de fotocopias e o seu prezo.

5 **Observa a táboa seguinte. Comproba que as magnitudes *M* e *M′* son directamente proporcionais, e calcula *y* e *y′*.**

MAGNITUDE *M*	4	6	7	9	10
MAGNITUDE *M′*	12	18	21	*y*	*y′*

6 OBXECTIVO 2
APLICAR A REGRA DE TRES SIMPLE DIRECTA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

A **regra de tres simple directa** é un procedemento para coñecer unha cantidade que forma proporción con outras cantidades coñecidas de dúas magnitudes directamente proporcionais.

EXEMPLO

Se unha ducia de laranxas custa 3 €, canto custan 4 laranxas?

Como a cantidade de laranxas e o seu prezo son magnitudes directamente proporcionais, podemos expresar esta relación do seguinte xeito.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Se 12 laranxas} \xrightarrow{\text{custan}} 3\ € \\ \text{4 laranxas} \xrightarrow{\text{custarán}} x\ € \end{array}\right\} \rightarrow \frac{12}{4} = \frac{3}{x}$$

Agora despexamos o x:

$$\frac{12}{4} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{12x}{4} = 3 \rightarrow 12x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{12} = 1$$

As 4 laranxas custan 1 €.

1 **Nunha panadaría pagaron 42 € por 70 barras de pan. Canto terían que pagar se mercasen 85 barras?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Se } \boxed{} \text{ barras} \xrightarrow{\text{custan}} \boxed{}\ € \\ \boxed{} \text{ barras} \xrightarrow{\text{custarán}} \boxed{}\ € \end{array}\right\} \rightarrow ____ = ____$$

Despexamos o x:

As 85 barras custan $\boxed{}$ €.

2 **Se 4 dólares son 3 euros, cantos euros son 4,5 dólares?**

$$\left.\begin{array}{r} \text{Se } \boxed{} \text{ dólares} \xrightarrow{\text{son}} \boxed{} \text{ euros} \\ \boxed{} \text{ dólares} \xrightarrow{\text{serán}} \boxed{} \text{ euros} \end{array}\right\} \rightarrow ____ = ____$$

Despexamos o x:

Os 4,5 dólares son $\boxed{}$ euros.

CALCULAR PORCENTAXES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

As **porcentaxes** ou **tantos por cento** expresan a razón entre dúas magnitudes directamente proporcionais e indícannos a cantidade dunha delas correspondente a 100 unidades da outra.

EXEMPLO

Se o 17 % dun terreo é 23,46 m², cantos metros cadrados representan o total do terreo?

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\%} & 17 & \longrightarrow 100 \\ \textbf{m}^2 & 23{,}46 & \longrightarrow x \end{array}\right\}$$

Como é unha relación de proporcionalidade directa, temos que: $\dfrac{17}{23{,}46} = \dfrac{100}{x}$.

Despexamos o x: $17x = 100 \cdot 23{,}46$ $\qquad x = \dfrac{2.346}{17} = 138$

Total do terreo é 138 m².

1 **Un depósito de 3.000 litros de capacidade contén 1.025 litros. Que tanto por cento é?**

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\%} & 100 & \longrightarrow x \\ \textbf{Litros} & 3.000 & \longrightarrow 1.025 \end{array}\right\}$$

Como é unha relación de proporcionalidade directa: $\dfrac{100}{3.000} = \dfrac{x}{1.025}$.

Despexamos o x:

Cos 1.025 litros o depósito está ao ..... %.

2 **En época de seca, un encoro con capacidade máxima de 200 hectómetros cúbicos estaba ao 45 %. Que capacidade de auga contiña nese momento?**

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{Capacidade} & x & \longrightarrow 200 \\ \textbf{\%} & 45 & \longrightarrow 100 \end{array}\right\}$$

Como é unha relación de proporcionalidade directa: $\dfrac{x}{45} = \dfrac{200}{100}$.

Despexamos o x:

A capacidade de auga é ..... hectómetros cúbicos.

3 **A un produto que vale 30 € aplícaselle un 20 % de desconto. Canto custa o produto?**

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{\%} & 100 & \longrightarrow 20 \\ \textbf{Euros} & 30 & \longrightarrow x \end{array}\right\}$$

REALIZAR REPARTICIÓNS DIRECTAMENTE PROPORCIONAIS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Para realizar a repartición dunha cantidade n de forma directamente proporcional a unhas cantidades a, b, c…:

- **Súmanse as cantidades** que hai que repartir: $a + b + c + ...$
- **Divídese a cantidade *n* entre esa suma**. Este cociente é a constante de proporcionalidade.
- Para calcular cada parte abonda con **multiplicar cada cantidade *a*, *b*, *c*… por esa constante**.

1 **A Unión Europea concedeu unha subvención de 15.000 € para tres localidades. A localidade *A* ten 1.800 habitantes; a *B*, 700, e a *C*, 500. Como debe repartirse o diñeiro?**

$A + B + C = 1.800 + 700 + 500 = 3.000$

- **Localidade *A***

	Total	***A***	***B***	***C***
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{3.000}{15.000} = \frac{1.800}{x}$$

Despexamos o x:

$$3.000x = 1.800 \cdot 15.000 \rightarrow 3.000x = 27.000.000 \rightarrow x = \frac{27.000.000}{3.000} = 9.000$$

$x =$ [ ] €

- **Localidade *B***

	Total	***A***	***B***	***C***
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

$$\frac{3.000}{15.000} = \frac{700}{y}$$

Despexamos o y:

$y =$ [ ] €

- **Localidade *C***

	Total	***A***	***B***	***C***
Habitantes	3.000	1.800	700	500
Euros	15.000	x	y	z

_____ = _____

Despexamos o z:

$z =$ [ ] €

2 **Cibrán e Breixo abren unha cartilla de aforros no banco. Cibrán ingresa 400 € e Breixo ingresa 800 €. Ao cabo duns anos devólvenlles 1.380 €. Como os teñen que repartir?**

Cibrán + Breixo = 400 + 800 = 1.200

	Total	**Cibrán**	**Breixo**
Diñeiro investido	1.200	400	800
Diñeiro gañado	1.380	x	y

_____ = _____ _____ = _____

Despexamos o x: Despexamos o y:

$x =$ ☐ $y =$ ☐

3 **Tres socios dun negocio achegan 30.000, 20.000 e 10.000 €, respectivamente. Obtéñense uns beneficios de 102.000 €. Canto lle corresponde a cada un?**

	Total	**Socio 1**	**Socio 2**	**Socio 3**
Diñeiro investido	☐	30.000	20.000	10.000
Beneficios	102.000	x	y	z

_____ = _____ _____ = _____ _____ = _____

Despexamos o x: Despexamos o y: Despexamos o z:

$x =$ ☐ $y =$ ☐ $z =$ ☐

4 **Un pai reparte o premio dunha quiniela entre os seus tres fillos de 18, 22 e 25 anos para axudarlles na súa formación universitaria, de forma directamente proporcional ás súas idades. Se o menor obtén 12.000 €, calcula:**

a) Canto diñeiro repartiu o pai?

b) Canto lle correspondeu a cada fillo?

	Total	**Fillo 1**	**Fillo 2**	**Fillo 3**
Anos	☐	18	22	25
Diñeiro	☐	☐	☐	☐

6 OBXECTIVO 5
RECOÑECER MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** se o produto de dous valores correspondentes de ambas é constante:

$$a \cdot a' = b \cdot b' = k$$

Esta constante k denomínase **constante de proporcionalidade inversa**.

EXEMPLO

30 obreiros tardan 120 horas en pintar unha fachada. Se fosen 20 obreiros tardarían 180 horas, e se fosen 15 obreiros, 240 horas. Que relación hai entre estas magnitudes?

OBREIROS	30	20	15
HORAS	120	180	240

$30 \cdot 120 = 3.600$ $\quad 20 \cdot 180 = 3.600$ $\quad 15 \cdot 240 = 3.600$ $\quad k = 3.600$

Como os produtos que obtemos son iguais, as magnitudes de número de obreiros e número de horas son inversamente proporcionais.

1 **Tardamos 3 horas en facer o percorrido que hai da casa ao colexio a unha velocidade de 12 km/h. Se fósemos a 15 km/h tardariamos 2,4 horas, e se fósemos a 4 km/h, 9 horas. Comproba se estas magnitudes son inversamente proporcionais.**

VELOCIDADE (km/h)	12	15	4
TEMPO (horas)	3	2,4	9

2 **Para construír unha nave en 60 días son necesarias 30 persoas. Se pasados 24 días se incorporan 12 persoas máis, en cantos días terminarán?**

APLICAR A REGRA DE TRES SIMPLE INVERSA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

A **regra de tres simple inversa** é un procedemento para coñecer unha cantidade que forma proporción con outras cantidades coñecidas de dúas magnitudes inversamente proporcionais.

EXEMPLO

Se 4 traballadores tardan 10 días en facer un traballo, canto tardarán 3 traballadores?

$$\left.\begin{array}{r} \text{Se 4 traballadores} \xrightarrow{\text{tardan}} 10 \text{ días} \\ \text{3 traballadores} \xrightarrow{\text{tardarán}} x \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{4}{3} = \frac{x}{10}$$

$$4 \cdot 10 = 3 \cdot x \rightarrow 40 = 3x \rightarrow x = \frac{40}{3} = 13{,}3 \text{ días}$$

Os 3 traballadores tardarán algo máis de 13 días.

1 **Nun depósito hai auga para 20 persoas durante 30 días. Para canto tempo durará a auga se fosen 22 persoas?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \boxed{20} \text{ persoas} \xrightarrow{\text{teñen para}} \boxed{30} \text{ días} \\ \boxed{} \text{ persoas} \xrightarrow{\text{terán para}} \boxed{} \text{ días} \end{array}\right\} \rightarrow ____ = ____$$

Despexamos o *x*:

As 22 persoas terán auga para $\boxed{}$ días.

2 **Coa auga dun depósito énchense 60 envases de 5 litros cada un. Cantas botellas de tres cuartos de litro (0,75 ℓ) cada unha se encherían coa auga do depósito?**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \boxed{5} \text{ litros} \xrightarrow{\text{enchen}} \boxed{60} \text{ envases} \\ \boxed{} \text{ litros} \xrightarrow{\text{encherían}} \boxed{} \text{ botellas} \end{array}\right\} \rightarrow ____ = ____$$

Despexamos o *x*:

Encheríanse $\boxed{}$ botellas de tres cuartos de litro.

6 OBXECTIVO 7
REALIZAR REPARTICIÓNS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Repartir unha cantidade n de forma **inversamente proporcional** a outras cantidades a, b, c…
  é equivalente a **repartila de forma directamente proporcional aos inversos das cantidades a, b, c…**
- Cada parte obtense dividindo a constante de proporcionalidade $R = \dfrac{n}{1/a + 1/b + 1/c + \ldots}$
  entre a súa cantidade correspondente a, b, c…

EXEMPLO

O premio dunha carreira é de 550 € e repartirase entre os tres primeiros corredores que acaben a proba de forma inversamente proporcional á orde de chegada, é dicir, inversamente proporcional a 1, 2 e 3. Que cantidade lle corresponde a cada corredor?

Postos

$$\left.\begin{array}{l} 1 \xrightarrow{\text{Inverso}} \dfrac{1}{1} = 1 \\ 2 \xrightarrow{\text{Inverso}} \dfrac{1}{2} \\ 3 \xrightarrow{\text{Inverso}} \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sumamos os inversos}} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{11}{6}$$

Dividimos a cantidade, 550 €, entre a suma dos inversos: $550 : \dfrac{11}{6} = \dfrac{550 \cdot 6}{11} = 300$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ao 1.º correspóndelle } \dfrac{300}{1} = 300 \text{ €} \\ \text{Ao 2.º correspóndelle } \dfrac{300}{2} = 150 \text{ €} \\ \text{Ao 3.º correspóndelle } \dfrac{300}{3} = 100 \text{ €} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Comprobamos}} 300 + 150 + 100 = 550 \text{ €}$$

1 **Un pai acode cos seus dous fillos a unha feira e na tómbola gaña 50 caramelos que os reparte de forma inversamente proporcional ás súas idades, que son 9 e 6 anos. Cantos caramelos lle dá a cada un?**

Idades

$$\left.\begin{array}{l} 9 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square \\ 6 \xrightarrow{\text{Inverso}} \square \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sumamos os inversos}} \square + \square = \square$$

Dividimos a cantidade, 50, entre a suma dos inversos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ao fillo de 9 anos correspóndenlle } \square \\ \text{Ao fillo de 3 anos correspóndenlle } \square \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Comprobamos}} \square + \square = 50$$

2 **Reparte 50 en partes inversamente proporcionais aos números 2, 2 e 3.**

Números

2 —Inverso→ ☐

2 —Inverso→ ☐

3 —Inverso→ ☐

—Sumamos os inversos→ ☐ + ☐ + ☐ = ☐

Dividimos a cantidade, 50, entre a suma dos inversos:

A 2 correspóndelle ☐

A 2 correspóndelle ☐

A 3 correspóndelle ☐

—Comprobamos→ ☐ + ☐ + ☐ = 50

3 **O custo da matrícula dunha academia de música é menor cantos máis notables se obtiveron no curso anterior. Tres amigos, Pedro, Sara e Antía, obtiveron 2, 3 e 5 notables, respectivamente, e entre os tres pagaron 310 €. Canto lle custou a matrícula a cada un?**

Notables

2 —Inverso→ ☐

3 —Inverso→ ☐

5 —Inverso→ ☐

—Sumamos os inversos→ ☐ + ☐ + ☐ = ☐

Dividimos a cantidade, 310, entre a suma dos inversos:

A Pedro correspóndelle ☐

A Sara correspóndelle ☐

A Antía correspóndelle ☐

—Comprobamos→ ☐ + ☐ + ☐ = 310

4 **Os tres camareiros dunha cafetaría, Ana, Brais e Roi, estiveron enfermos durante 3, 6 e 9 días do mes de xullo, respectivamente. Durante este mes recibiron 275 € de propina que hai que repartir de forma inversamente proporcional aos días non traballados. Cantos euros lles corresponden a cada un de eles?**

Días

3 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ ☐

6 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ ☐

9 $\xrightarrow{\text{Inverso}}$ ☐

$\xrightarrow{\text{Sumamos os inversos}}$ ☐ + ☐ + ☐ = ☐

Dividimos a cantidade, 275 €, entre a suma dos inversos:

A Ana correspóndelle ☐

A Brais correspóndelle ☐

A Roi correspóndelle ☐

$\xrightarrow{\text{Comprobamos}}$ ☐ + ☐ + ☐ = 275

7 Progresións

INTRODUCIÓN

As sucesións aparecen en diversos campos, tales como a medicina (evolución dun cultivo bacteriano), xenética (distribución dos caracteres), informática (utilización de algoritmos recursivos) e economía (cálculo do xuro simple e composto). Por iso, o máis importante ao comezar a unidade será a definición de sucesións numéricas como un conxunto ordenado de números, así como atopar a súa regra de formación, traballando o concepto de termo xeral con distintos casos.

Os alumnos encontran ás veces problemas á hora de calcular o termo xeral dunha sucesión, aínda que nas progresións aritméticas e xeométricas a forma de obtelo é máis sinxela ca en sucesións doutros tipos.

Convén establecer as similitudes e as diferenzas entre as progresións aritméticas e xeométricas, deixar claro o proceso de formación, a obtención do termo xeral, o xeito de deducir a fórmula da suma dos n termos dunha progresión aritmética e do produto dos n primeiros termos dunha progresión xeométrica.

O manexo axeitado e reflexivo das fórmulas da suma e do produto de n termos trabállase ao longo da unidade con distintos exemplos, e debe asegurarse que os alumnos non as aplican de maneira automática, sen parar a pensar.

RESUMO DA UNIDADE

- Unha *sucesión* de números reais a_1, a_2, a_3… é un conxunto ordenado de números reais. Cada un dos números reais da sucesión denomínase *termo*.
- Nalgunhas sucesións pódese expresar o *termo xeral* mediante unha fórmula. O valor dun termo da sucesión pódese calcular ao substituír n polo dito valor.
- Unha *progresión aritmética* é unha sucesión de números tal que cada un deles (menos o primeiro) é igual ao anterior máis un número fixo, chamado diferenza da progresión (d).
- O *termo xeral dunha progresión aritmética* é: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
- A *suma de n termos dunha progresión aritmética* é: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.
- Unha *progresión xeométrica* é unha sucesión de números tal que cada un deles (menos o primeiro) é igual ao anterior multiplicado por un número fixo, chamado razón da progresión (r).
- O *termo xeral dunha progresión xeométrica* é: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
- O *produto de n termos dunha progresión xeométrica* é: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Recoñecer sucesións e calcular os seus termos.	• Termos dunha sucesión. • Termo xeral. • Sucesións recorrentes.	• Identificación dunha sucesión. • Obtención do termo xeral.
2. Determinar se unha progresión é aritmética e calcular os seus elementos.	• Progresión aritmética: diferenza. • Termo xeral. • Suma de n termos dunha progresión aritmética.	• Identificación dunha progresión aritmética. • Obtención do termo xeral dunha progresión aritmética. • Cálculo da suma de n termos dunha progresión aritmética.
3. Determinar se unha progresión é xeométrica e calcular os seus elementos.	• Progresión xeométrica: razón. • Termo xeral. • Produto de n termos dunha progresión xeométrica.	• Identificación dunha progresión xeométrica. • Obtención do termo xeral dunha progresión xeométrica. • Cálculo do produto de n termos dunha progresión xeométrica.

OBXECTIVO 1

RECOÑECER SUCESIÓNS E CALCULAR OS SEUS TERMOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

SUCESIÓN

Unha **sucesión** é un conxunto ordenado de números reais: a_1, a_2, a_3, a_4…

Cada un dos números que forman a sucesión é un **termo**.

EXEMPLO

3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, … é unha sucesión.

O primeiro termo desta sucesión é: $a_1 = 3$

O segundo termo desta sucesión é: $a_2 = 2$

O terceiro termo desta sucesión é: $a_3 = 1$

O cuarto termo desta sucesión é: $a_4 = 2$

1 **Dada a sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …, escribe os seus 10 primeiros termos.**

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$a_6 =$ $a_7 =$ $a_8 =$ $a_9 =$ $a_{10} =$

2 **Escribe, para a sucesión 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, …, os termos a_1, a_4, a_7, a_8 e a_{10}.**

$a_1 =$ $a_4 =$ $a_7 =$ $a_8 =$ $a_{10} =$

3 **Dada a sucesión: 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, …, como son todos os termos que ocupan as posicións pares? E os termos que ocupan as posicións impares?**
Escribe os termos a_{18} e a_{23}.

$a_2, a_4, a_6, \ldots =$ $a_{18} =$

$a_1, a_3, a_5, \ldots =$ $a_{23} =$

4 **Escribe os 3 termos que seguen na sucesión: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, …**

5 **Escribe os 4 termos que seguen na sucesión: 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, …**

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

Existen sucesións que seguen unha regra definida na súa formación, é dicir, unha orde lóxica que nos axuda a obter o seguinte termo. Cando isto ocorre pódese determinar unha fórmula que permite calcular calquera termo a partir do lugar que ocupa na sucesión.

A esta fórmula chámaselle **termo xeral**.

EXEMPLO

Na sucesión 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, … podemos observar que, nas posicións pares, o valor é 2; con todo, nas posicións impares vanse alternando os valores 3 e 1:

3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, …

Cando n é par, o seu valor é 2:

$a_2 = 2$
$a_4 = 2$
$a_6 = 2$
$a_8 = 2$

Cando n é impar, o seu valor é 3 ou 1:

$a_1 = 3$
$a_3 = 1$
$a_5 = 3$
$a_7 = 1$

EXEMPLO

Calcula o termo xeral da sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, …

Nesta sucesión, para pasar dun termo ao seguinte súmase 2:

$a_1 = 2 = \longrightarrow 1 \cdot 2$
$a_2 = 4 = 2 + 2 = \longrightarrow 2 \cdot 2$
$a_3 = 6 = 2 + 2 + 2 = \longrightarrow 3 \cdot 2$
$a_4 = 8 = 2 + 2 + 2 + 2 = \longrightarrow 4 \cdot 2$

$\downarrow$

$a_9 = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \cdot 2$

$\downarrow$

$a_n = n \cdot 2$

A fórmula $a_n = 2n$ chámase termo xeral da sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12, … e representa a sucesión de todos os números pares.

Coñecido o termo xeral, pódese calcular calquera termo da sucesión, sabendo a posición que ocupa. Así, para calcular o termo que ocupa a posición 71, abonda con substituír n por 71:

$$a_{71} = 2 \cdot 71 = 142$$

6 **Para a sucesión do exemplo anterior, calcula os termos que ocupan a posición 12, 18 e 21.**

$a_{12} =$

$a_{18} =$

$a_{21} =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **Sexa $a_n = 4n + 1$ o termo xeral dunha sucesión. Calcula o termo a_{25}.**

8 **Escribe os 5 primeiros termos das seguintes sucesións.**

a) $a_n = 6n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

b) $a_n = 4 + 7n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

c) $a_n = 5^n$

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

9 **Escribe unha fórmula que exprese o termo xeral dunha sucesión, e calcula o valor dos termos 13, 25 e 64 desa sucesión.**

EXEMPLO

Calcula o termo xeral da sucesión: 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...

Esta sucesión vai alternando os valores 1 e 0, de forma que non podemos obter un único termo xeral. Polo tanto, escribiremos un termo xeral para os termos pares e outro para os termos impares:

$a_n = 1$, se n é impar.

$a_n = 0$, se n é par.

10 **Calcula o termo xeral da sucesión: 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...**

DETERMINAR SE UNHA PROGRESIÓN É ARITMÉTICA E CALCULAR OS ELEMENTOS 7

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Unha **progresión aritmética** é unha sucesión de números tal que cada un deles (menos o primeiro) é igual ao anterior máis un número fixo chamado **diferenza** da progresión, que se representa por ***d***.

O **termo xeral** dunha progresión aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

EXEMPLO

Dada a sucesión 3, 8, 13, 18, 23, 28, …, vemos que é unha progresión aritmética porque cada termo se obtén sumándolle 5 unidades ao anterior, é dicir, a diferenza é $d = 5$.

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 8 = 3 + 5 \longrightarrow a_2 = 3 + 1 \cdot 5$

$a_3 = 13 = 8 + 5 = 3 + 5 + 5 \longrightarrow a_3 = 3 + 2 \cdot 5$

$a_4 = 18 = 13 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_4 = 3 + 3 \cdot 5$

$a_5 = 23 = 18 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_5 = 3 + 4 \cdot 5$

$a_6 = 28 = 23 + 5 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \longrightarrow a_6 = 3 + 5 \cdot 5$

O termo xeral é: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 2$.

1 **A seguinte sucesión é aritmética: 10, 8, 6, 4, 2, 0, –2, … Calcula a diferenza e o termo xeral.**

A sucesión é aritmética, porque cada termo se obtén sumándolle ao anterior .....

Polo tanto, a diferenza é $d =$ .....

Calculamos o termo xeral:

$a_1 = 10 \longrightarrow a_1 = 10$

$a_2 = 8 = 10 - 2 \longrightarrow a_2 = 10 + 1 \cdot (-2)$

$a_3 = 6 = 10 - 2 - 2 \longrightarrow a_3 = 10 + 2 \cdot (-2)$

$a_4 = 4 = 10 - 2 - 2 - \ldots\ldots \longrightarrow a_4 = 10 + \square \cdot (-2)$

$a_5 = 2 = 10 - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots \longrightarrow a_5 = 10 + \square \cdot (-2)$

$a_6 = 0 = 10 - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots \longrightarrow a_6 = 10 + \square \cdot (-2)$

$a_7 = -2 = 10 - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots - \ldots\ldots \longrightarrow a_7 = 10 + \square \cdot (-2)$

O termo xeral é:

$a_n = \square$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 **Considera a sucesión: 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5, ... Calcula a diferenza e o termo xeral.**

A sucesión é aritmética, porque cada termo se obtén sumándolle ao anterior .....

Polo tanto, a diferenza é $d =$ .....

Calculamos o termo xeral:

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 4{,}5 = 3 + 1{,}5 \longrightarrow a_2 = 3 + 1{,}5$

$a_3 = 6 \quad = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_3 = 3 + 2 \cdot 1{,}5$

$a_4 = 7{,}5 = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_4 = 3 + 3 \cdot 1{,}5$

$a_5 = 9 \quad = 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \longrightarrow a_5 = 3 + 4 \cdot 1{,}5$

$a_6 = 3 + 5 \cdot 1{,}5$

$a_7 = \boxed{}$

O termo xeral é:

$a_n = \boxed{}$

3 **Considera a sucesión: 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...**

a) É unha progresión aritmética? Se é así, cal é a súa diferenza?

b) Calcula o seu termo xeral.

c) Calcula o termo 42.

4 **Dada a sucesión: $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, \ldots$**

a) Comproba que é unha progresión aritmética.

b) Calcula o seu termo xeral.

c) Calcula os termos 25 e 76.

5 **Escribe unha progresión aritmética que ten como primeiro termo $a_1 = 6$ e a diferenza é 4.**

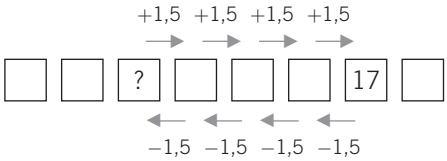
6, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, ...

EXEMPLO

Cal é o terceiro termo dunha sucesión aritmética onde o termo 7 é 17 e a diferenza é 1,5?

Pódese proceder de dúas formas:

1.ª FORMA: Como a diferenza é 1,5, avanzamos cara atrás restando 1,5, ata obter o valor do terceiro termo:



2.ª FORMA: Como coñecemos a fórmula xeral das progresións aritméticas, aplicámola ao termo 7 para calcular o termo 1:

Fórmula xeral: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Fórmula aplicada ao termo 7: $a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 1{,}5$

$17 = a_1 + 6 \cdot 1{,}5$

$a_1 = 8$

Coñecendo o primeiro termo, sumamos a diferenza, $d = 1{,}5$, ata obter o termo 3:

$a_1 = 8$

$a_2 = 8 + 1{,}5 = 9{,}5$

$a_3 = 9{,}5 + 1{,}5 = 11$

6 **Cal é o quinto termo dunha sucesión cuxo termo 24 é 233 e a diferenza é 1,2?**

☐ ☐ ☐ ☐ ? 233

Hai demasiada distancia entre os dous termos para utilizar a primeira forma; polo tanto, a segunda forma é máis efectiva.

☐ ☐ ☐ ☐ ? 233

$a_{24} = a_1 + 23 \cdot d$

$233 = a_1 + 23 \cdot 1{,}2$

$233 = a_1 + \square$

$233 - \square = a_1$

$\square = a_1$

$a_5 = a_1 + 4 \cdot d$

$a_5 = \square + 4 \cdot 1{,}2$

$a_5 = \square$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EXEMPLO

Dada unha sucesión aritmética onde $a_4 = 12$ e $a_{27} = 104$, calcula a diferenza e o primeiro termo.

- Formulamos un sistema de ecuacións:

$$\left.\begin{array}{r} a_4 = a_1 + 3 \cdot d \\ 12 = a_1 + 3 \cdot d \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} a_{27} = a + 26 \cdot d \\ 104 = a_1 + 26 \cdot d \end{array}\right\}$$

- Igualamos as dúas ecuacións, despexando a_1 en cada unha delas:

$$\begin{array}{r} 12 = a_1 + 3 \cdot d \\ 104 = a_1 + 26 \cdot d \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 12 - 3d = a_1 \\ 104 - 26d = a_1 \end{array}\right\} 12 - 3d = 104 - 26d$$

- Despexamos o d:

$$\begin{aligned} -3d + 26d &= 104 - 12 \\ 23d &= 92 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

- Substituímos o valor de d en calquera das ecuacións para obter a_1:

$$12 = a_1 + 3 \cdot d \xrightarrow{d = 4} 12 = a_1 + 3 \cdot 4 \rightarrow a_1 = 0$$

7 **Nunha progresión aritmética, $a_6 = 17$ e $a_9 = 23$. Calcula a_1 e o termo xeral.**

8 **Nunha progresión aritmética, $a_5 = 10$ e $a_{15} = 40$. Calcula a_1 e o termo xeral.**

A **suma dos *n* primeiros termos** dunha progresión aritmética calcúlase coa fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

EXEMPLO

Sexa a progresión aritmética formada polos números: 3, 8, 13, 18, 23, …

- Sumamos os 5 termos: $S_5 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23$
- Ordenámolos de atrás cara adiante: $S_5 = 23 + 18 + 13 + 8 + 3$
- Sumamos as dúas expresións obtidas:

$$\begin{array}{rl} S_5 = & 3 + 8 + 13 + 18 + 23 \\ + \quad S_5 = & 23 + 18 + 13 + 8 + 3 \\ \hline 2S_5 = & 26 + 26 + 26 + 26 + 26 \end{array}$$

$$2S_5 = 5 \cdot 26 \rightarrow S_5 = \frac{5 \cdot 26}{2}$$

- Aplicamos a fórmula xeral: $S_5 = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot 5}{2}$
- Igualamos ambas as expresións: $\dfrac{5 \cdot 26}{2} = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot 5}{2} \longrightarrow a_1 + a_5 = 26$
- Comprobamos o resultado: $a_1 = 3,\ a_5 = 23 \rightarrow a_1 + a_5 = 3 + 23 = 26$

EXEMPLO

Calcula a suma dos 20 primeiros termos da progresión aritmética: 3, 7, 11, 15, 19, ...

- Calculamos o termo xeral:
  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ $\qquad a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$
- Obtemos o termo a_{20}: $a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot 4 = 79$
- Aplicamos a fórmula xeral:

9 **Nunha progresión aritmética, $a_4 = 21$ e $d = -2$.**

a) Calcula a_1 e o termo xeral.

b) Suma os 30 primeiros termos.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

DETERMINAR SE UNHA PROGRESIÓN É XEOMÉTRICA E CALCULAR OS ELEMENTOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Unha **progresión xeométrica** é unha sucesión de números tal que cada un deles (menos o primeiro) é igual ao anterior multiplicado por un número fixo chamado **razón**, que se representa por ***r***.

O **termo xeral** dunha progresión xeométrica é:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

EXEMPLO

Dada a sucesión 5, 10, 20, 40, 80, 160, …, vemos que é unha progresión xeométrica porque cada termo se obtén multiplicando o anterior por 2 unidades, é dicir, a razón é $r = 2$.

$a_1 = 5 \longrightarrow a_1 = 5$

$a_2 = 10 = 5 \cdot 2 \longrightarrow a_2 = 5 \cdot 2$

$a_3 = 20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_3 = 5 \cdot 2^2$

$a_4 = 40 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_4 = 5 \cdot 2^3$

$a_5 = 80 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_5 = 5 \cdot 2^4$

$a_6 = 160 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \longrightarrow a_6 = 5 \cdot 2^5$

O termo xeral é: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

1 **A seguinte sucesión é xeométrica: 3, 15, 75, 375, 1.875, 9.375, … Calcula a razón e o termo xeral.**

A sucesión é xeométrica, porque cada termo se obtén multiplicando o anterior por **……**

Polo tanto, a razón é $r =$ **……**

Calculamos o termo xeral:

$a_1 = 3 \longrightarrow a_1 = 3$

$a_2 = 15 = 3 \cdot 5 \longrightarrow a_2 = 3 \cdot 5$

$a_3 = 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_3 = 3 \cdot 5^2$

$a_4 = 375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_4 = 3 \cdot 5^3$

$a_5 = 1.875 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_5 = 3 \cdot 5^4$

$a_6 = 9.375 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \longrightarrow a_6 = 3 \cdot 5^5$

O termo xeral é:

$a_n = \boxed{}$

2 **Escribe os 6 primeiros termos da progresión xeométrica con $a_1 = 2$ e $r = 6$.**

O termo xeral é: $a_n =$

Os 6 primeiros termos son:

$a_1 = 2$ $\qquad a_2 =$ $\qquad a_3 =$

$a_4 =$ $\qquad a_5 =$ $\qquad a_6 =$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

O **produto dos *n* primeiros termos** dunha progresión xeométrica é:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

EXEMPLO

Sexa a progresión xeométrica formada polos números: 5, 10, 20, 40, 80, …

- Multiplicamos os 5 termos: $P_5 = 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80$
- Ordenamos de atrás cara adiante: $P_5 = 80 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 5$
- Multiplicamos as dúas expresións obtidas:

$$\begin{array}{rl} P_5 = & 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 80 \\ \times \quad P_5 = & 80 \cdot 40 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 5 \\ \hline P_5 \cdot P_5 = & 400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400 \cdot 400 \end{array}$$

$$P_5^2 = 400^5 \rightarrow P_5 = \sqrt{400^5}$$

- Aplicamos a fórmula xeral: $P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(5 \cdot 80)^5} = \sqrt{400^5} = 3.200.000$

3 **Para a progresión xeométrica: 3, 15, 75, 375, …, calcula o produto dos 4 primeiros termos.**

- Multiplicamos os 4 primeiros termos: $P_4 = 3 \cdot 15 \cdot 75 \cdot 375$
- Ordenamos de atrás cara adiante: $P_4 =$
- Multiplicamos as dúas expresións obtidas:

$$\begin{array}{rl} P_4 = & \\ \times \quad P_4 = & \\ \hline P_4^2 = & \end{array}$$

- Aplicamos a fórmula xeral:

4 **Calcula o produto dos 5 primeiros termos da progresión xeométrica: 16, 8, 4, 2, 1, …**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EXEMPLO

Calcula o produto dos 5 primeiros termos da progresión xeométrica: 5, 10, 20, 40, 80, ...

- Calculamos o termo xeral:

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ $\qquad a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

- Obtemos o termo a_5: $\qquad a_5 = 5 \cdot 2^{5-1} = 80$
- Aplicamos a fórmula xeral: $\qquad P_5 = \sqrt{(5 \cdot 80)^5} = 3.200.000$

5 **Nunha sucesión onde o primeiro termo é 10 e a razón 15, calcula.**

- O termo xeral.

  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} =$

- Os termos a_4 e a_7.

  $a_4 = a_1 \cdot r^{n-1} = 10 \cdot 15^{4-1} =$ .....

  $a_7 =$ .....

- O produto dos 7 primeiros termos.

  $P_7 = \sqrt{(10 \cdot a_7)^7} =$ .....

6 **Dada unha progresión xeométrica en que $a_1 = 3$ e $r = 5$, calcula.**

a) O termo xeral.

b) O termo 7.

c) O produto dos 4 primeiros termos.

7 **Se nunha progresión xeométrica $a_4 = 12$ e a razón $r = 3$:**

a) Calcula a_1 e o termo xeral.

b) Calcula o produto dos 20 primeiros termos.

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

10 Movementos e semellanzas

INTRODUCIÓN

Esta unidade ten unha compoñente gráfica moi importante, polo que convén comezar a unidade achegando exemplos reais, sobre todo en contextos de tipo artístico, para que os alumnos poidan asimilar os conceptos de movementos e semellanzas que se explican.

A exposición iníciase coa definición dun vector e os seus elementos: módulo, dirección e sentido. Despois, calcularanse as súas compoñentes e módulo nun sistema de coordenadas.

A continuación estudaranse os movementos no plano, que son transformacións que conservan as distancias e os ángulos: translacións, xiros e simetrías, respecto a un punto e respecto a unha recta ou eixe. Proponse na unidade diversos exercicios para obter as coordenadas da figura transformada.

Posteriormente, trátanse as semellanzas, que conservan a forma pero non o tamaño. Unha das aplicacións reais das semellanzas son as escalas e o seu uso en distintos contextos. Son de grande utilidade para traballar e representar mapas, planos, etc.

Convén deixar claras as diferenzas conceptuais entre movementos e semellanzas, e as aplicacións destas últimas: figuras semellantes e polígonos semellantes.

RESUMO DA UNIDADE

- Dous puntos A e B determinan un *vector* fixo. A é a orixe e B é o extremo do vector.
- Os *elementos dun vector* son o seu módulo (lonxitude do segmento AB), dirección (a da recta AB) e sentido (o que vai do punto A a B).
- Dados $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, as *compoñentes do vector* son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.
- Unha *translación de vector* $\vec{v}$ transforma calquera punto P noutro punto P', tales que PP' ten o mesmo módulo, dirección e sentido ca $\vec{v}$.
- Un *xiro de centro O e ángulo* α é o movemento que asocia a cada punto P outro punto P' situado a igual distancia de O ca o punto P, de xeito que o ángulo que forman PP' é α.
- *Simetría respecto a un punto O* é o movemento que asocia a cada punto P outro punto P', á mesma distancia de O, tales que P, O e P' están aliñados.
- *Simetría respecto a un eixe e* é o movemento que asocia a cada punto P outro punto P', tales que PP' é perpendicular a e, e as distancias de P e P' ao eixe e son iguais.
- As *semellanzas* transforman unha figura noutra con igual forma pero distinto tamaño.
- A *escala* é a razón de semellanza entre o orixinal e a súa representación. Pode ser numérica ou gráfica.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Determinar os elementos dun vector.	• Eixes de coordenadas. • Vector: compoñentes, módulo, dirección e sentido.	• Obtención das compoñentes e do módulo dun vector.
2. Recoñecer os distintos movementos.	• Movementos: translación, xiros, simetría respecto a un punto e simetría respecto a un eixe.	• Cálculo da figura transformada doutra mediante unha translación de vector $\vec{v}$. • Obtención da figura transformada doutra mediante un xiro de centro O e ángulo α. • Determinación da figura transformada doutra por unha simetría central de centro O. • Obtención da figura transformada dunha dada por unha simetría de eixe e.
3. Distinguir semellanzas e homotecias.	• Semellanzas. Polígonos semellantes.	• Distinción de se dúas figuras son semellantes.
4. Operar con escalas.	• Escalas gráficas e numéricas.	• Traballo con escalas numéricas e gráficas en planos e mapas.

10 OBXECTIVO 1
DETERMINAR OS ELEMENTOS DUN VECTOR

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

EIXES DE COORDENADAS

Os eixes de coordenadas están formados por dúas rectas: unha horizontal e outra vertical.

- A recta horizontal é o **eixe de abscisas ou eixe *X***.
- A recta vertical é o **eixe de ordenadas ou eixe *Y***.
- O punto onde se cortan os eixes chámase **orixe de coordenadas**.

PUNTOS

Os puntos no plano veñen representados por dúas coordenadas: a primeira indica a súa situación no eixe *X*, e a segunda, a súa posición no eixe *Y*: $A(x, y)$.

VECTORES E AS SÚAS COMPOÑENTES

Dous puntos *A* e *B* determinan un vector fixo $\overrightarrow{AB}$.

A: orixe do vector.

B: extremo do vector.

Compoñentes do vector $\overrightarrow{AB}$: obtéñense calculando a diferenza entre as coordenadas do extremo *B* e da orixe *A*: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Módulo do vector $\overrightarrow{AB}$: $|\overrightarrow{AB}|$ é a lonxitude do segmento *AB*.

O módulo dun vector $\overrightarrow{AB}(x, y)$ é $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dirección do vector $\overrightarrow{AB}$: é a dirección da recta *AB*.

Sentido do vector $\overrightarrow{AB}$: é o que vai da orixe (*A*) ao extremo (*B*).

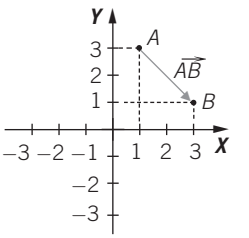
EXEMPLO

Considera os puntos $A(1, 3)$ e $B(3, 1)$.

As compoñentes do vector $\overrightarrow{AB}$ son: $(3 - 1, 1 - 3) = (2, -2)$.

A primeira coordenada (2) representa o desprazamento no eixe *X*.

A segunda coordenada (−2) representa o desprazamento no eixe *Y*.



1 **Dados os puntos de coordenadas *A*(2, 3), *B*(−1, 4), *C*(0, 6) e *D*(−3, 7):**

a) Calcula as compoñentes dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

b) Que módulo teñen os vectores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$?

RECOÑECER OS DISTINTOS MOVEMENTOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

MOVEMENTOS

Son as transformacións xeométricas que conservan as distancias e os ángulos.

TRANSLACIÓN

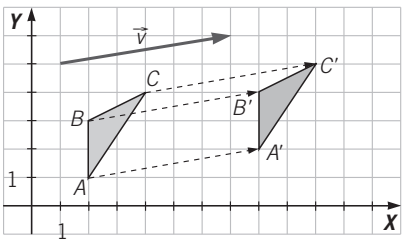
Unha translación é un desprazamento ordenado mediante un vector.
O trasladado A' dun punto $A(x, y)$ mediante un vector $\vec{v}(v_1, v_2)$ é: $A'(x + x_1, y + y_1)$.

EXEMPLO

Dados os puntos *A*(2, 1), *B*(2, 3) e *C*(4, 4), trasládaos segundo o vector $\vec{v}$(6, 1).

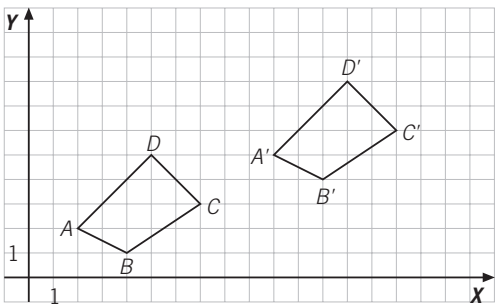
Trasladamos $A(2, 1)$: $A' = A + \vec{v} = (2, 1) + (6, 1) = (8, 2)$
Trasladamos $B(2, 3)$: $B' = B + \vec{v} = (2, 3) + (6, 1) = (8, 4)$
Trasladamos $C(4, 4)$: $C' = C + \vec{v} = (4, 4) + (6, 1) = (10, 5)$

A', B' e C' son a translación dos puntos A, B e C mediante o vector $\vec{v}(6, 1)$.
Se debuxamos A, B, C, A', B', C', podemos observar o que ocorreu:



1 **Un cadrado ten como vértices os puntos *A*(−1, 1), *B*(1, 1), *C*(1, −1) e *D*(−1, −1). Calcula o seu trasladado polo vector $\vec{v}$(4, −2).**

2 **O cuadrilátero *ABCD* trasladouse e obtívose *A'B'C'D'*.**



a) Que coordenadas teñen os vectores $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$?

b) Cales son as coordenadas do vector translación que transforma $ABCD$ en $A'B'C'D'$?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

XIRO

- Un **xiro** é un movemento angular de α graos, con respecto a un punto determinado denominado centro de xiro.
- Os xiros non teñen unha expresión sinxela no plano cartesiano como ocorre coas translacións. Só en certos casos ocorre así:
  – Xiro de centro (0, 0) e ángulo 90°: transforma $P(x, y)$ en $P'(-y, x)$
  – Xiro de centro (0, 0) e ángulo 180°: transforma $P(x, y)$ en $P'(-x, -y)$
  – Xiro de centro (0, 0) e ángulo 270°: transforma $P(x, y)$ en $P'(y, -x)$

EXEMPLO

Xira o punto *A*(5, −4) respecto ao punto (0, 0) un ángulo de 90°, 180° e 270°.

Xiro de 90º: $A(5, -4) \rightarrow A'(4, 5)$
Xiro de 180º: $A(5, -4) \rightarrow A'(-5, 4)$
Xiro de 270º: $A(5, -4) \rightarrow A'(-4, -5)$

3 **Un triángulo ten por vértices os puntos de coordenadas *A*(2, 1), *B*(−1, 4) e *C*(3, 5).**

a) Determina o transformado de *ABC*, *A'B'C'*, por un xiro de centro a orixe e ángulo 90°.
b) Calcula o transformado de *A'B'C'* por un xiro de centro a orixe e ángulo 90°.
c) Obtén o transformado de *ABC* por un xiro de centro a orixe e ángulo 180°.

4 **A estrela de puntas *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* xirou con centro no punto *O*. Completa a táboa, indicando o ángulo de xiro.**

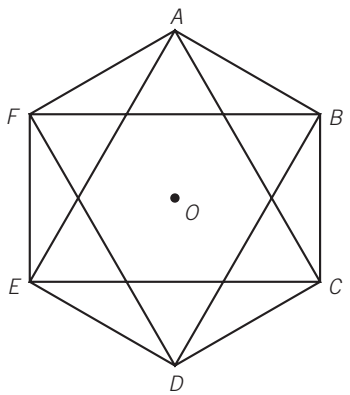
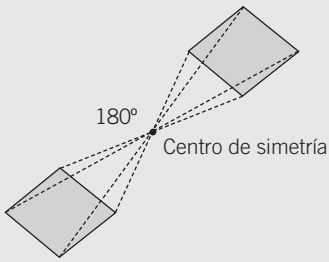


FIGURA ORIXINAL	FIGURA FINAL	ÁNGULO DE XIRO
ABCDEF	*EFABCD*	
	FABCDE	
	CDEFAB	
	DEFABC	
	BCDEFA	

SIMETRÍA RESPECTO A UN PUNTO

A **simetría respecto a un punto** é un xiro de 180º con respecto a ese punto, chamado centro de simetría.



5 **Das seguintes letras maiúsculas, di cales teñen centro de simetría e indícao.**

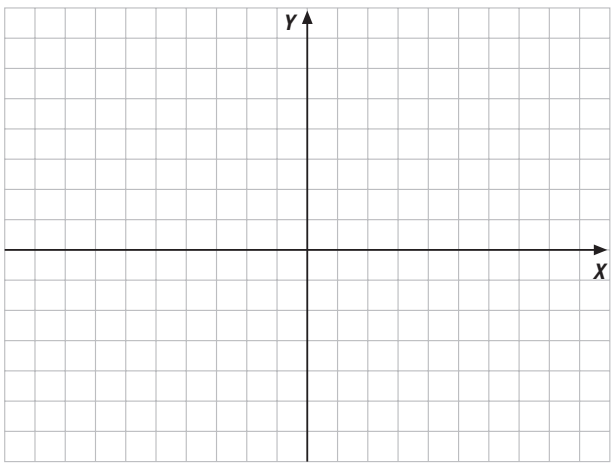
M N O P S T

6 **Un triángulo ten por vértices os puntos *A*(2, 3), *B*(−3, 5) e *C*(6, 7).**

a) Determina o transformado de *ABC*, *A′B′C′*, por unha simetría central con centro a orixe.

b) Calcula o seu transformado por unha simetría con centro o punto *A*.

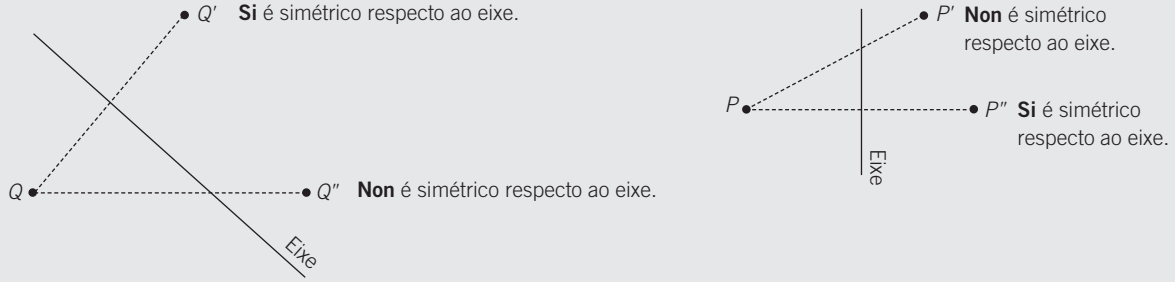
7 **Ao triángulo de vértices *A*(2, 3), *B*(5, 1) e *C*(4, 6) aplícaselle unha simetría central, con centro a orixe, e convértese no triángulo *A′B′C′*. Debuxa os triángulos *ABC* e *A′B′C′*.**



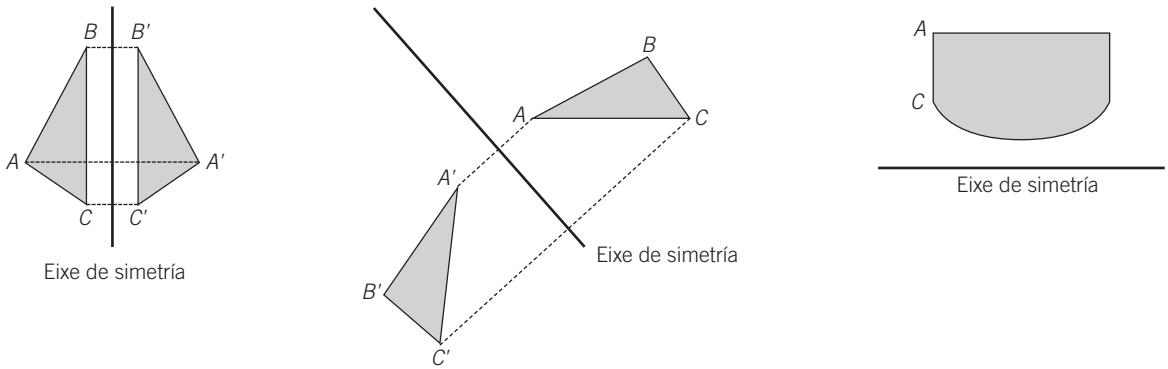
Escribe as coordenadas dos puntos *A′*, *B′* e *C′*.

SIMETRÍA RESPECTO A UN EIXE

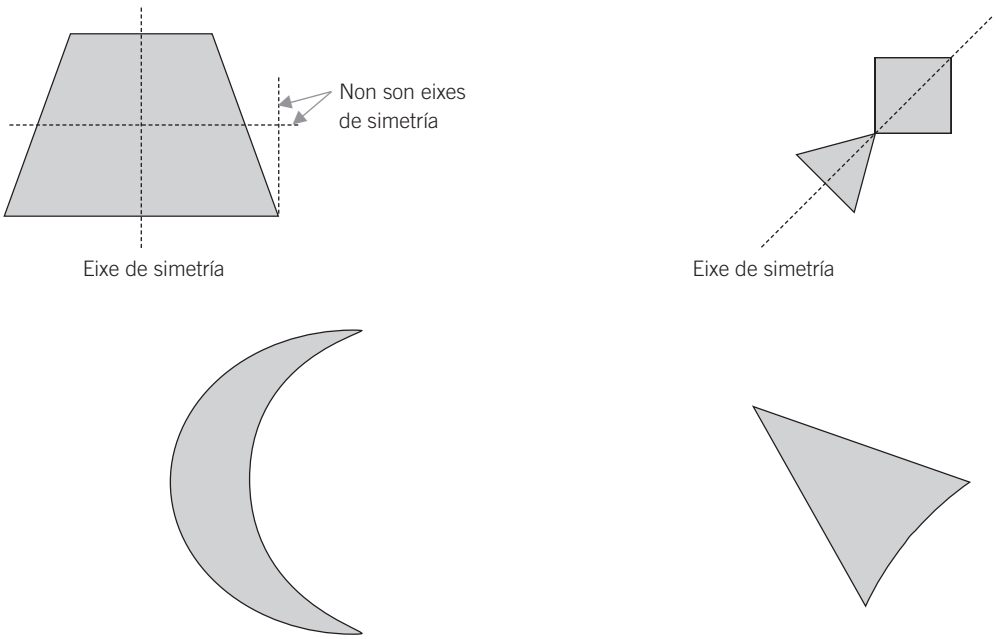
Un punto é simétrico doutro respecto a un eixe cando está á mesma distancia do eixe e se sitúa sobre a mesma perpendicular ao eixe.



8 **Observa os dous primeros exemplos e debuxa a figura simétrica no terceiro caso.**

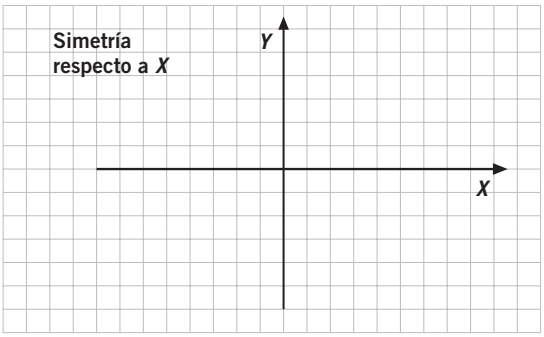


9 **Obtén os eixes de simetría das seguintes figuras.**

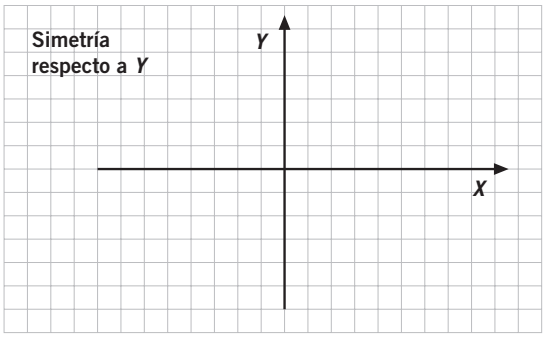


10 **Representa, en cada sistema de coordenadas, o triángulo de vértices *A*(–2, 1), *B*(2, 5) e *C*(3, –2). Aplícalle o movemento que se indica en cada caso e debuxa o triángulo resultante.**

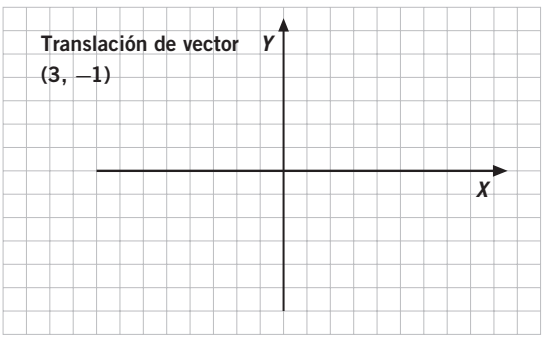
a)



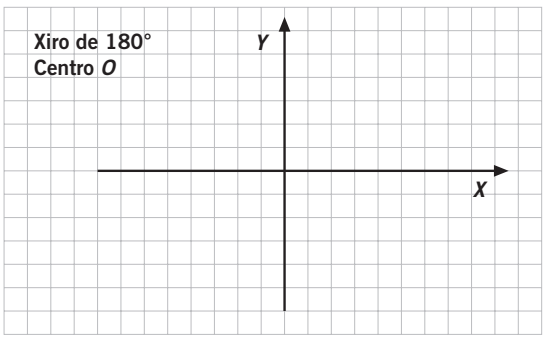
c)



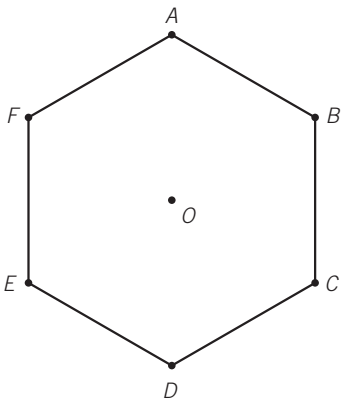
b)



d)



11 **O hexágono *ABCDEF* xira 240° con centro en *O*. Escribe xunto a cada vértice a nova letra que lle corresponde tras realizarse o xiro.**



12 **Cales son as coordenadas do triángulo obtido ao aplicarlle ao triángulo de vértices *A* = (0, 0), *B* = (0, 4), *C* = (4, 0) unha translación de vector (5, –3)?**

$A = (0, 0) \rightarrow A' = (____, ____)$

$B = (0, 4) \rightarrow B' = (____, ____)$

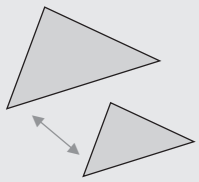
$C = (4, 0) \rightarrow C' = (____, ____)$

DISTINGUIR SEMELLANZAS E HOMOTECIAS

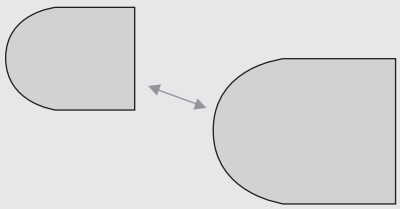
NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

As **semellanzas** transforman unha figura noutra figura coa mesma forma pero, xeralmente, con distinto tamaño.

Diferéncianse das translacións e dos xiros en que non son movementos.



Son semellantes.



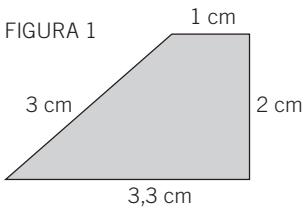
Son semellantes.

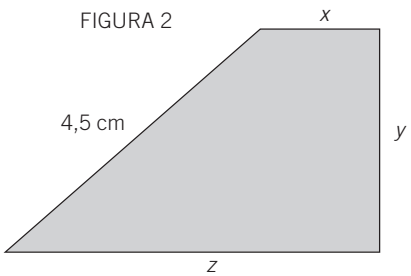
POLÍGONOS SEMELLANTES

Dous **polígonos** son **semellantes** se cada ángulo e o seu transformado son iguais, e o cociente entre cada lado e o seu homólogo é constante. Esa cantidade chámase **razón de semellanza**.

EXEMPLO

Calcula a lonxitude dos lados que faltan na figura 2, sabendo que é semellante á figura 1.





Como as figuras 1 e 2 son semellantes, existe unha relación de proporcionalidade entre as lonxitudes dos seus lados, é dicir, son directamente proporcionais:

FIGURA 1	3 cm	1 cm	2 cm	3,3 cm
FIGURA 2	4,5 cm	x	y	z

$$\frac{3}{4{,}5} = \frac{1}{x} \qquad \frac{3}{4{,}5} = \frac{2}{y} \qquad \frac{3}{4{,}5} = \frac{3{,}3}{z}$$

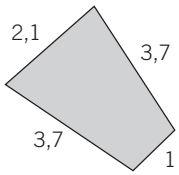
$$3x = 4{,}5 \qquad 3y = 9 \qquad 3z = 14{,}85$$

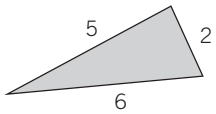
$$x = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5 \text{ cm} \qquad y = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm} \qquad z = \frac{14{,}85}{3} = 4{,}95 \text{ cm}$$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

1 **Calcula as lonxitudes dos lados que faltan nestas figuras, sabendo que son semellantes.**

FIGURA 1





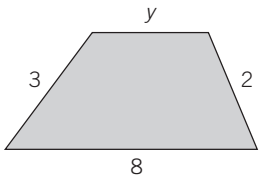
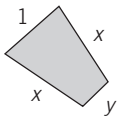
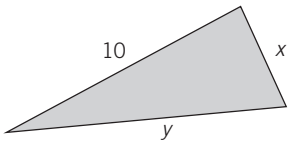


FIGURA 2





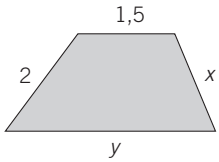


FIGURA 1	2,1	3,7	1	FIGURA 1	FIGURA 1
FIGURA 2	1	x	y	FIGURA 2	FIGURA 2

$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ $\qquad$ $\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

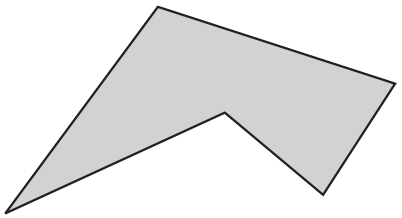
$x =$ $\qquad$ $y =$

2 **É o polígono de lados 4 cm, 7 cm e 5 cm semellante ao polígono de lados 60 cm, 105 cm e 75 cm?**

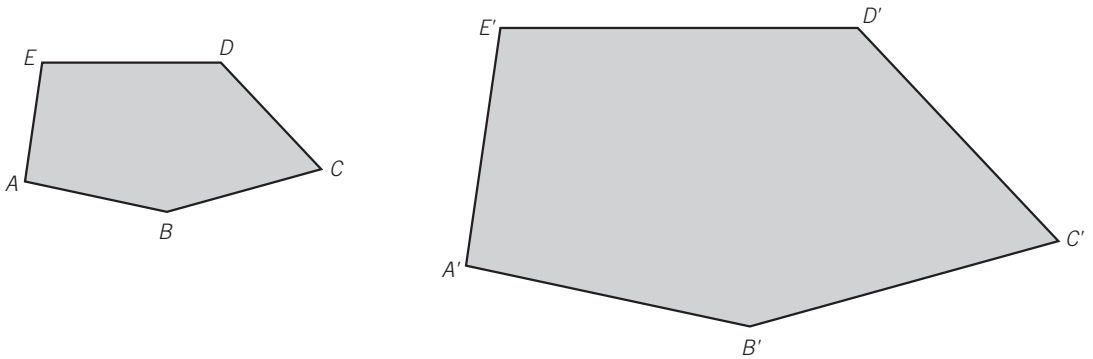
3 **Os lados dun triángulo miden 6 cm, 9 cm e 13 cm e os doutro triángulo miden 12 cm, 18 cm e 26 cm. Son semellantes?**

4 **Un triángulo ten por lados $a = 3$ cm e $b = 8$ cm. Outro semellante a el ten como lados $b' = 40$ cm e $c' = 50$ cm. Calcula a lonxitude dos lados dos dous triángulos.**

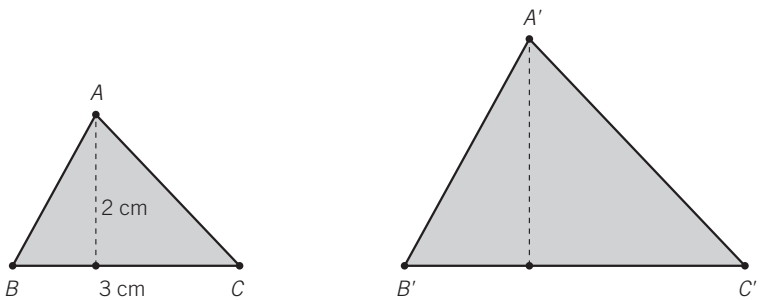
5 **Debuxa un polígono semellante ao da figura, sabendo que a razón de semellanza é $\frac{1}{2}$.**



6 **Os polígonos *ABCDE* e *A′B′C′D′E′* son semellantes. Axúdate dunha regra e calcula a razón de semellanza entre ambos.**



7 **Os seguintes triángulos son semellantes e a súa razón de semellanza é $\frac{3}{2}$.**
Calcula a base e a altura de *A′B′C′*. Calcula a área de *ABC* e a área de *A′B′C′*.
Cal é a razón de proporcionalidade entre as áreas?



OPERAR CON ESCALAS

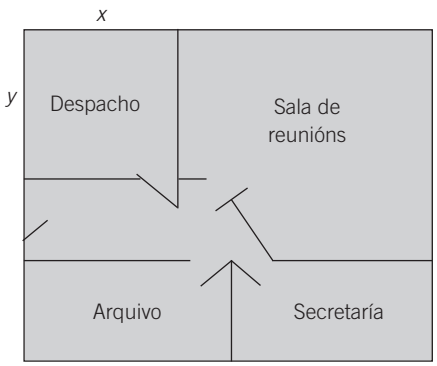
NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- A **escala** é a razón de semellanza entre o obxecto real e a súa representación.
- As escalas utilízanse en planos, mapas, maquetas, etc.
- A escala pode ser numérica ou gráfica:

  Escala numérica: 1:3.000 → 1 cm no plano son 3.000 cm na realidade.

  Escala gráfica:

1 **Observa o seguinte debuxo a escala 1:200 e obtén a medida do despacho.**



Escala 1:200

Medida tomada no plano: 1 cm no plano → Medida real: 200 cm reais

Para saber canto mide o despacho na realidade tomamos unha regra e medimos *x* e *y*:

Mapa	1	☐	☐
Realidade	200	*a*	*b*

$$\frac{1}{200} = \frac{\quad}{a} \qquad \frac{1}{200} = \frac{\quad}{b}$$

$a =$ ☐ $\qquad b =$ ☐

2 **Dúas cidades *A* e *B* están separadas entre si por 60 km. A que distancia se encontran nun mapa a escala 1:400.000?**

3 **Se nun mapa a escala 1:90.000 vemos que dous lugares *A* e *B* están separados por 2 cm, que distancia os separa na realidade?**

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Algunhas fotocopiadoras reducen ou amplían os orixinais. Estas reducións ou ampliacións veñen expresadas na máquina con porcentaxes. Unha redución do 90 % indica que 100 cm do orixinal se converten en 90 cm na fotocopia, e que 1 cm do orixinal se converte en 0,9 cm na fotocopia.**

Fotocopiouse con redución ao 80% un plano feito a escala 1:600. Cal é a escala da fotocopia?

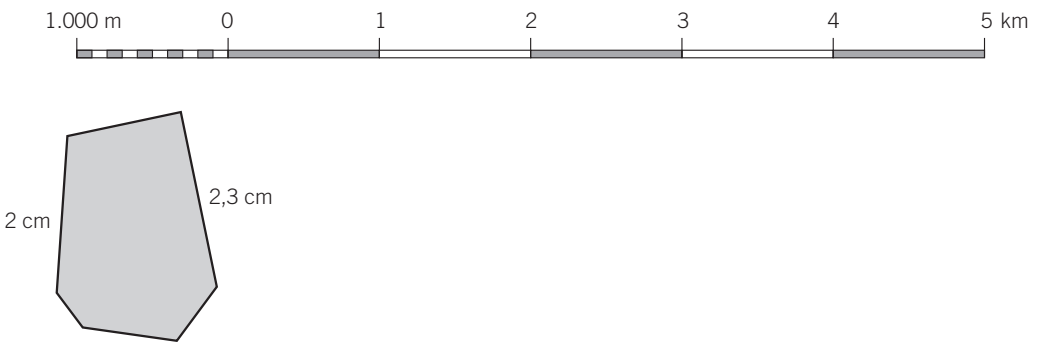
1 cm do plano convértese en 0,8 cm da fotocopia.

0,8 cm da fotocopia representan 600 cm da realidade.

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}8 \rightarrow 600 \\ 1 \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{600}{0{,}8} = 750. \text{ A escala é 1:750.}$$

a) Cal é a escala da fotocopia se se fai ao 75 %?

b) Cal é a escala da fotocopia se se fai ao 120 %?

c) E a escala da fotocopia se se fai ao 125 %?

5 **O seguinte debuxo mostra a forma e o tamaño que ten un parque no plano dunha cidade. Tamén se debuxou a escala que aparece no dito plano. Calcula as medidas dos dous lados indicados no debuxo.**