Caderno de matemática 3 ESO
Primeira parte

Nome: _____

Grupo: ____

8 Figuras planas

INTRODUCIÓN

As figuras planas e o cálculo de áreas son xa coñecidos polos alumnos de cursos anteriores. Convén, non obstante, sinalar a presenza das figuras planas en distintos contextos reais e destacar a importancia de coñecer as súas propiedades e obter fórmulas que permitan calcular a súa área de maneira sinxela.

Dedicarase especial atención aos triángulos, porque son os polígonos máis importantes, xa que calquera polígono se pode dividir en triángulos. Tamén se estudará o teorema de Pitágoras e como aplicalo en distintos contextos para resolver problemas.

Máis tarde calcularanse áreas de paralelogramos, triángulos, polígonos, círculos e figuras circulares.

Convén expor algúns exemplos reais onde se aplique o cálculo de áreas para pór de manifesto a utilidade das fórmulas da unidade. Para iso, sempre que se resolva unha actividade, será conveniente situala nun contexto real: parcelas para construción, dimensións dunha vivenda, área dun cultivo, cantidade de material para construír un obxecto…

RESUMO DA UNIDADE

- As *medianas* son as rectas que unen cada vértice co punto medio do lado oposto a el. Córtanse no *baricentro*.
- As *mediatrices* son as rectas perpendiculares a cada lado polo seu punto medio. Córtanse no *incentro.*
- As *alturas* son as rectas perpendiculares a cada lado polo vértice oposto. Córtanse no *ortocentro*.
- As *bisectrices* son as rectas que dividen cada ángulo en dúas partes iguais. Córtanse no *circuncentro*.
- *Teorema de Pitágoras*: nun triángulo rectángulo cúmprese que: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Pódense calcular as *áreas* de:
  – Cuadriláteros.
  – Triángulos.
  – Polígonos.
  – Círculos.
  – Figuras circulares.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Determinar as rectas e os puntos notables en triángulos.	• Rectas e puntos notables nun triángulo.	• Determinación gráfica das rectas e dos puntos notables dun triángulo.
2. Coñecer e aplicar o teorema de Pitágoras.	• Teorema de Pitágoras.	• Resolución de problemas xeométricos aplicando o teorema de Pitágoras. • Aplicación do teorema de Pitágoras en problemas da vida cotiá.
3. Calcular áreas de polígonos e figuras circulares.	• Áreas de cuadriláteros. • Áreas de polígonos regulares. • Áreas de calquera polígono. • Área do círculo, dun sector circular e dunha coroa circular.	• Cálculo da área de paralelogramos e triángulos. • Cálculo da área de polígonos regulares. • Cálculo da área de polígonos por triangulación ou descompóndoos en figuras de áreas coñecidas. • Obtención da área do círculo, dun sector circular e dunha coroa circular.

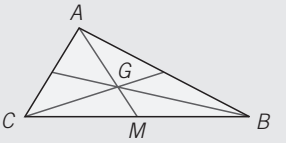
DETERMINAR AS RECTAS E OS PUNTOS NOTABLES EN TRIÁNGULOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

MEDIANAS

A **mediana** é a recta que une cada un dos vértices do triángulo co punto medio do lado oposto.

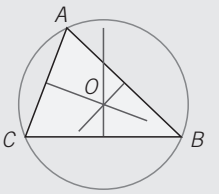
As medianas córtanse nun punto que se chama **baricentro**.



MEDIATRICES

A **mediatriz** dun segmento é a recta perpendicular ao mesmo que pasa polo seu punto medio.

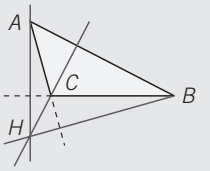
As mediatrices córtanse nun punto que se chama **circuncentro**.



ALTURAS

A **altura** correspondente ao vértice dun triángulo é a recta perpendicular ao lado oposto que pasa por ese vértice.

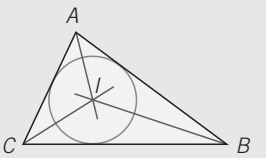
As alturas córtanse nun punto que se chama **ortocentro**.



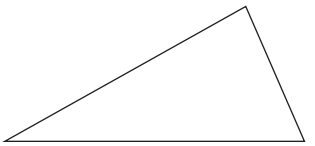
BISECTRICES

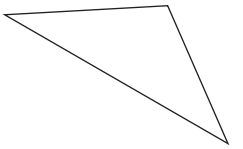
A **bisectriz** dun ángulo é a recta que pasa polo seu vértice e o divide en dúas partes iguais.

As bisectrices córtanse nun punto chamado **incentro**.

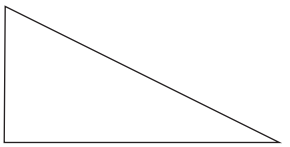


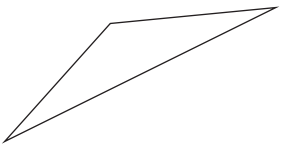
1 **Debuxa as medianas e o baricentro dos seguintes triángulos.**



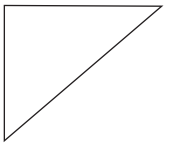


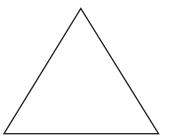
2 **Debuxa as mediatrices e o circuncentro dos triángulos.**



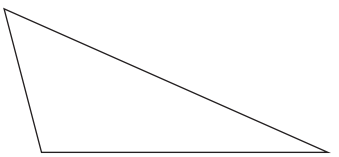


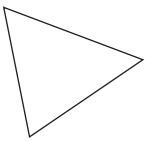
3 **Debuxa as alturas e o ortocentro dos triángulos.**





4 **Debuxa as bisectrices e o incentro dos seguintes triángulos.**

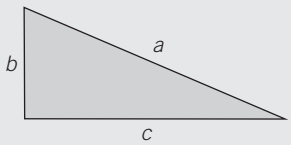




COÑECER E APLICAR O TEOREMA DE PITÁGORAS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Nun triángulo rectángulo, o lado de maior lonxitude, oposto ao ángulo recto, chámase hipotenusa, e os outros dous lados denomínanse catetos.

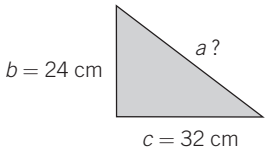


Hipotenusa → ***a***
Catetos ⟶ ***b, c***

O **teorema de Pitágoras** expresa que, nun triángulo rectángulo, o cadrado da hipotenusa é igual á suma dos cadrados dos catetos:

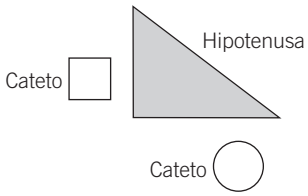
$$a^2 = b^2 + c^2$$

1 **Calcula o valor da hipotenusa dun triángulo rectángulo de catetos 32 cm e 24 cm.**



$a^2 = b^2 + c^2 = \square^2 + \square^2$

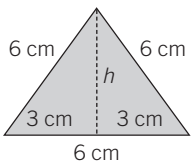
2 **Calcula a lonxitude da hipotenusa dun triángulo rectángulo, sabendo que os seus catetos se diferencian en 2 cm e o menor mide 6 cm.**



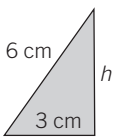
$a^2 = \square + \bigcirc$

3 **Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 6 cm.**

Para calcular a área temos que coñecer a base, que neste caso mide 6 cm, e a altura, *h*, que calculamos co teorema de Pitágoras.



Estudamos este triángulo, que é rectángulo:



Aplicamos o teorema de Pitágoras e despexamos a altura, *h*:

$6^2 = 3^2 + h^2 \rightarrow h = \square$

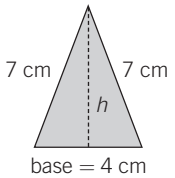
Calculamos a área aplicando a fórmula xeral: Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

Área =

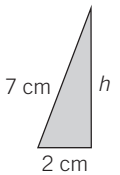
ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Nun triángulo isóscele, os lados iguais miden 7 cm e o outro lado mide 4 cm. Calcula a súa área.**

Tomamos o lado desigual como base, $b = 4$ cm, e calculamos a altura, h, utilizando o teorema de Pitágoras.



Considerando esta parte do triángulo, aplicamos o teorema de Pitágoras e despexamos h.



$$7^2 = 2^2 + h^2$$

$$h = \square$$

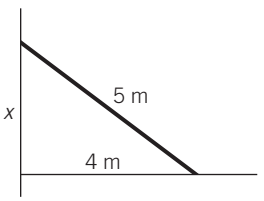
Calculamos a área aplicando a fórmula xeral: Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$

Área =

5 **A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 12 cm e un dos catetos mide 7,5 cm. Calcula a lonxitude do outro cateto.**

6 **A área dun triángulo rectángulo é 12 cm^2 e un dos catetos mide 6 cm. Calcula a lonxitude da hipotenusa.**

7 **Unha escaleira de 5 metros de longo está apoiada nunha parede, estando situada a base a 4 metros dela. A que altura chega a escaleira?**

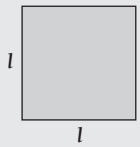


CALCULAR ÁREAS DE POLÍGONOS E FIGURAS CIRCULARES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

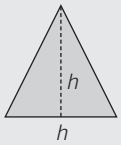
ÁREAS DE CUADRILÁTEROS

Área do cadrado



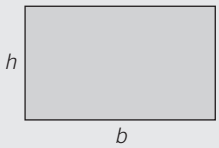
$$A = l \cdot l$$

Área do triángulo



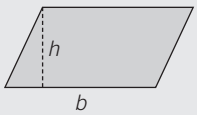
$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Área do rectángulo



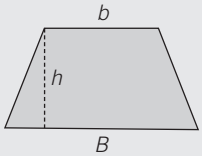
$$A = b \cdot h$$

Área do paralelogramo



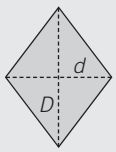
$$A = b \cdot h$$

Área do trapecio



$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Área do rombo



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

1 **Calcula a área dos seguintes polígonos.**

a) Trapecio de bases 12 cm e 8 cm e altura 5 cm.
b) Rombo de diagonais 12 cm e 9 cm.
c) Rombo de diagonal maior 8 cm e lado 5 cm.

ÁREA DUN POLÍGONO REGULAR

- Un **polígono** é **regular** cando os seus lados teñen a mesma lonxitude e os seus ángulos son iguais.
- A área dun polígono regular é igual á metade do produto do perímetro polo apotema:

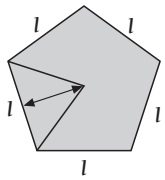
$$A = \frac{P \cdot a}{2}$$

ÁREA DUN POLÍGONO CALQUERA

Se o polígono cuxa área queremos calcular non é regular, a fórmula anterior non nos serve.
A súa área pódese calcular descompóndoo en triángulos ou figuras de áreas coñecidas, calculando a área de cada unha desas figuras e sumando as áreas resultantes.

EXEMPLO

Calcula a área do seguinte pentágono regular.

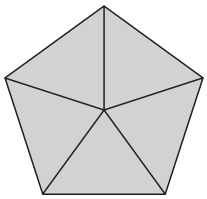


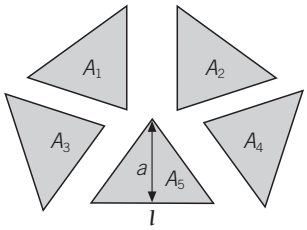
Lado: l

Perímetro: $P = l + l + l + l + l = 5l$

Apotema: a

Vemos que son cinco triángulos iguais: Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{l \cdot a}{2}$



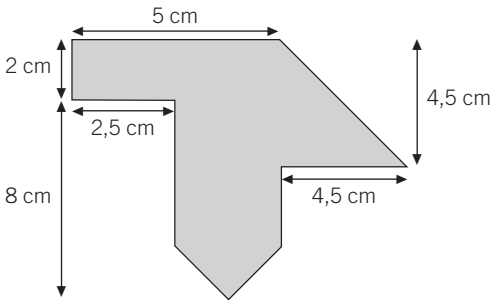


Área do pentágono $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

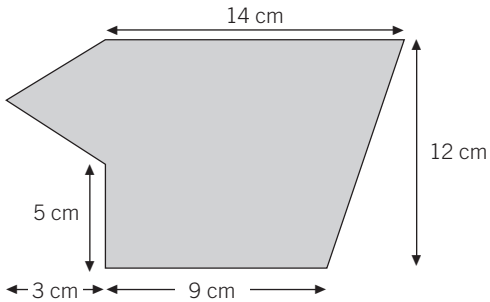
Área do pentágono $= \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} + \dfrac{l \cdot a}{2} = \dfrac{5l \cdot a}{2} = \dfrac{P \cdot a}{2}$

2 **Calcula a área das seguintes figuras.**

a)

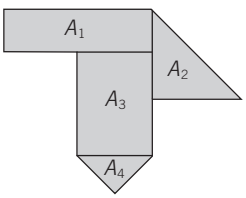


b)

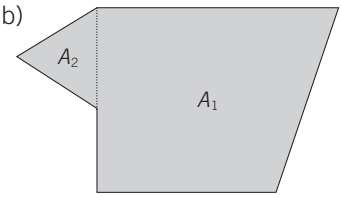


O primeiro que temos que facer é dividir a superficie en polígonos dos que saibamos calcular a súa área.

a)



b)

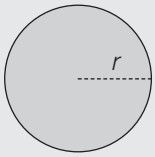


Calculamos a área total:

a) $A_1 =$ ☐
$A_2 =$ ☐
$A_3 =$ ☐
$A_4 =$ ☐
$\rightarrow A =$

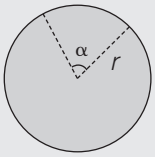
b) $A_1 =$ ☐
$A_2 =$ ☐
$\rightarrow A =$

Área do círculo



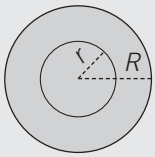
$$A = \pi \cdot r^2$$

Área do sector circular



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$$

Área da coroa circular



$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

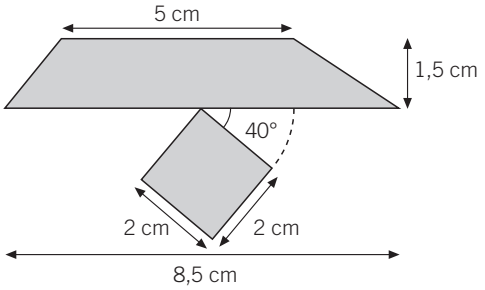
3 **Obtén a área dun círculo cuxo diámetro mide igual ca o perímetro dun cadrado de lado 7 cm.**

4 **Determina a área dun sector circular de amplitude un ángulo recto e cuxo raio é 10 cm.**

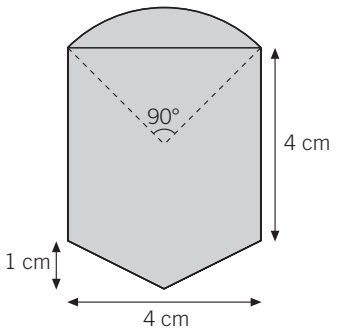
5 **Calcula a área dunha coroa circular limitada por dúas circunferencias de raios 2 cm e 1 cm.**

6 **Calcula a área das seguintes figuras.**

a)



b)



9 Corpos xeométricos

INTRODUCIÓN

Os corpos xeométricos están presentes en múltiples contextos da vida real, de aí a importancia de estudalos. É interesante construír distintos corpos xeométricos a partir do seu desenvolvemento en papel ou cartón e, deste xeito, facilitar a posterior aprendizaxe e razoamento do proceso de obtención de áreas e volumes, sen necesidade de aprender as fórmulas de memoria.

Nos poliedros regulares prestarase especial atención ao estudo dos prismas e das pirámides, caracterizando os seus elementos e sinalando as similitudes e as diferenzas.

Estudaranse tamén os corpos que se obteñen ao xirar unha figura arredor dun eixe, os corpos de revolución: cilindro, cono e esfera.

A aplicación do teorema de Pitágoras no espazo é un dos contidos da unidade que pode presentar maiores dificultades; por iso se explica, paso a paso, en diversos exercicios en que se guía ao alumno para que os complete.

RESUMO DA UNIDADE

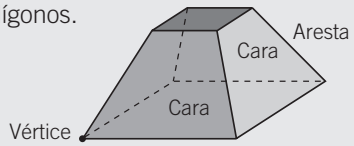
- Un *poliedro* é un corpo xeométrico limitado por catro ou máis polígonos, denominados *caras* do poliedro. Os lados e vértices das caras son as *arestas* e *vértices* do poliedro.
- En todo polígono convexo se cumpre a *fórmula de Euler*: $C + V = A + 2$.
- Un *poliedro* é *regular* se as súas caras son polígonos regulares iguais: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.
- Para *calcular lonxitudes no espazo*, e sempre que se formen triángulos rectángulos, pódese aplicar o *teorema de Pitágoras*.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Clasificar poliedros.	• Caras, arestas e vértices. • Poliedros cóncavos, convexos e regulares. • Fórmula de Euler.	• Distinción dos poliedros e os seus tipos. • Comprobación de se os poliedros cumpren a fórmula de Euler.
2. Diferenciar os elementos e os tipos de prismas e pirámides.	• Prismas: elementos e tipos. • Pirámides: elementos e tipos.	• Recoñecemento dos distintos tipos de prismas e pirámides e os seus elementos principais.
3. Coñecer e aplicar o teorema de Pitágoras no espazo.	• Cálculo da diagonal dun ortoedro. • Cálculo da altura dunha pirámide.	• Aplicación do teorema de Pitágoras no espazo para calcular lonxitudes.
4. Calcular a área de prismas e pirámides.	• Área lateral e área total dun prisma recto. • Área lateral e área total dunha pirámide recta.	• Utilización das fórmulas das áreas de prismas e pirámides para resolver problemas xeométricos.
5. Calcular a área de corpos redondos.	• Área lateral e área total: cilindro e cono. • Área dunha esfera.	• Utilización das fórmulas das áreas de cilindros, conos e esferas para resolver problemas xeométricos.
6. Calcular o volume de corpos xeométricos.	• Volume do ortoedro, do prisma e do cilindro. • Volume do cono e da pirámide. • Volume da esfera.	• Utilización das fórmulas dos volumes de corpos xeométricos para resolver problemas.

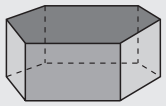
9 OBXECTIVO 1
CLASIFICAR POLIEDROS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

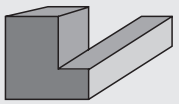
- Un **poliedro** é un corpo xeométrico que está limitado por catro ou máis polígonos.
  Os polígonos que limitan ao poliedro chámanse **caras**.
  Os lados das caras denomínanse **arestas**.
  Os vértices das caras denomínanse **vértices**.



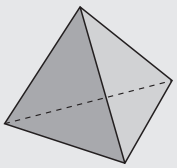
- **Poliedro convexo:** ao prolongárense as súas caras non cortan a poliedro.

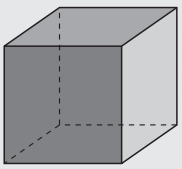


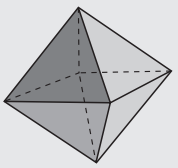
- **Poliedro cóncavo:** ao prolongárense as súas caras, algunha delas corta a poliedro.

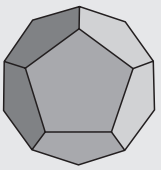


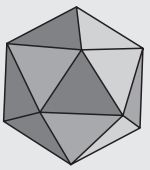
- **Poliedros regulares:** todas as caras son polígonos regulares iguais e en cada vértice únese o mesmo número de caras.
  Só existen cinco poliedros regulares:


Tetraedro


Cubo


Octaedro


Dodecaedro


Icosaedro

FÓRMULA DE EULER

En todo **poliedro convexo** se cumpre sempre unha relación, coñecida co nome de fórmula de Euler, que relaciona o número de caras (C), o número de arestas (A) e o número de vértices (V):

C	+	V	=	A	+	2
N.º de caras		N.º de vértices		N.º de arestas		

EXEMPLO

Comproba que se cumpre a fórmula de Euler para o tetraedro.

N.º de caras = 4 N.º de vértices = 4 N.º de arestas = 6

$C + V = A + 2 \rightarrow 4 + 4 = 6 + 2 \rightarrow 8 = 8$

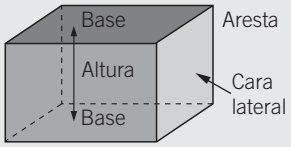
1 **Comproba que o resto de poliedros regulares verifican a fórmula de Euler.**

POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARESTAS	FÓRMULA DE EULER: $C + V = A + 2$
Cubo				
Octaedro				
Dodecaedro				
Icosaedro				

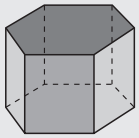
DIFERENCIAR OS ELEMENTOS E OS TIPOS DE PRISMAS E PIRÁMIDES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

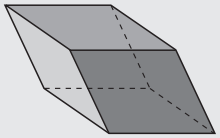
PRISMAS



- Un **prisma** é un poliedro que ten dúas caras, que son polígonos iguais e paralelos entre si, chamadas **bases**; as súas outras **caras laterais** son paralelogramos.
- A **altura dun prisma** é a distancia entre as bases.
- **Prisma recto:** as caras laterais son todas rectángulos e, polo tanto, perpendiculares ás bases.
- **Prisma oblicuo:** as caras laterais non son todas rectángulos.
- **Segundo a forma da base**, os prismas clasifícanse en triangulares, cuadrangulares, pentagonais…

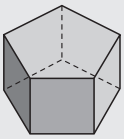


Prisma recto



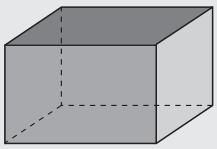
Prisma oblicuo

- **Prisma regular:** é un prisma recto cuxas bases son polígonos regulares.

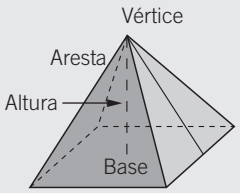


Prisma pentagonal regular

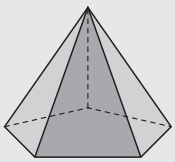
- **Paralelepípedos:** son os prismas cuxas bases son paralelogramos.
- **Ortoedro:** é un paralelepípedo recto.



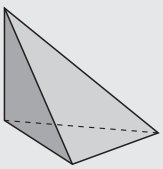
PIRÁMIDES



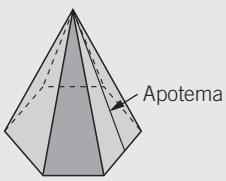
- Unha **pirámide** é un poliedro cuxa base é un polígono e as súas caras laterais son triángulos que concorren nun vértice común, chamado **vértice da pirámide**.
- A **altura dunha pirámide** é a distancia do seu vértice á base.
- **Pirámide recta:** as caras laterais son todas triángulos isósceles.



- **Pirámide oblicua:** as caras laterais non son todas triángulos isósceles.



- **Segundo a forma da base**, as pirámides clasifícanse en triangulares, cuadrangulares, pentagonais...
- **Pirámide regular:** é unha pirámide cuxa base é un polígono regular.
- **Apotema:** é a altura de calquera das caras laterais dunha pirámide regular.

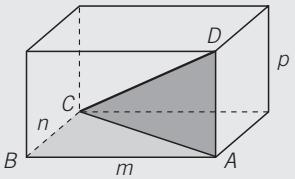


COÑECER E APLICAR O TEOREMA DE PITÁGORAS NO ESPAZO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

O teorema de Pitágoras pódese aplicar en todos os contextos en que se forman triángulos rectángulos. Ten moitas aplicacións para calcular lonxitudes de corpos no espazo.

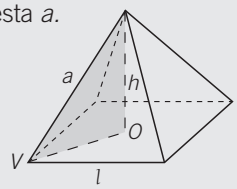
- **Cálculo da diagonal dun ortoedro**, coñecidas as lonxitudes dos seus lados *m*, *n* e *p*.



$$CA = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$CD = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

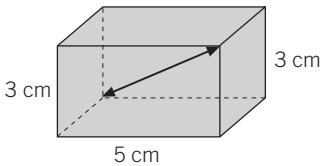
- **Cálculo da altura dunha pirámide cuadrangular regular**, coñecidas as lonxitudes do lado da base e da aresta *a*.



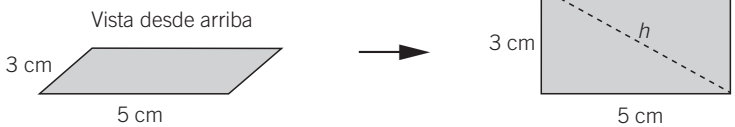
$$h^2 = a^2 - OV^2 = a^2 - \frac{l^2}{2} \rightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{2}}$$

EXEMPLO

Calcula a diagonal do ortoedro da figura.

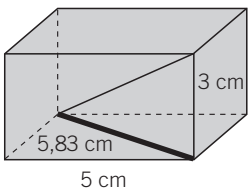


- Consideramos a cara inferior do ortoedro:

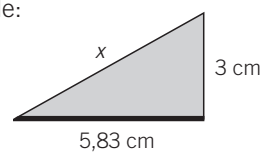


- Aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 5^2 \rightarrow h^2 = 9 + 25 \rightarrow h^2 = 34 \rightarrow h = \sqrt{43} \rightarrow h = 5{,}83 \text{ cm}$$



- Vemos que a diagonal é a hipotenusa de:

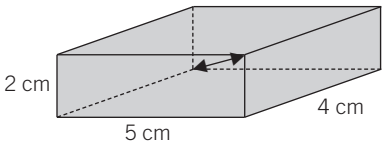


- Aplicamos o teorema de Pitágoras:

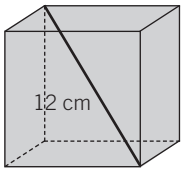
$$x^2 = 3^2 + 5{,}83^2 \rightarrow x^2 = 9 + 34 \rightarrow x^2 = 43 \rightarrow x = \sqrt{43} \rightarrow x = 6{,}56 \text{ cm}$$

A diagonal mide $x = \sqrt{3^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{43} = 6{,}56$ cm.

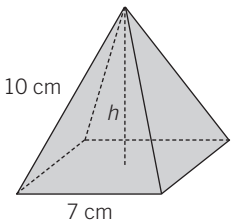
1 **Calcula a diagonal deste ortoedro.**



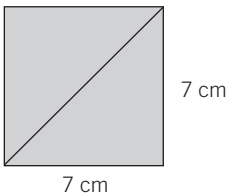
2 **Calcula a aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 12 cm.**
(Lembra que nun cubo todos os seus lados miden o mesmo.)



3 **Dada unha pirámide de base cadrada, de lado 7 cm e aresta lateral 10 cm, calcula a diagonal.**

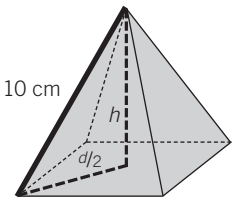


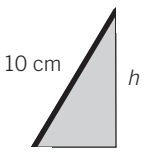
- Tomamos a base e aplicamos o teorema de Pitágoras:



$d^2 = \ldots + \ldots$

- Agora temos:





$d/2 =$

$10^2 = \square + h^2$

- Aplicamos o teorema de Pitágoras:

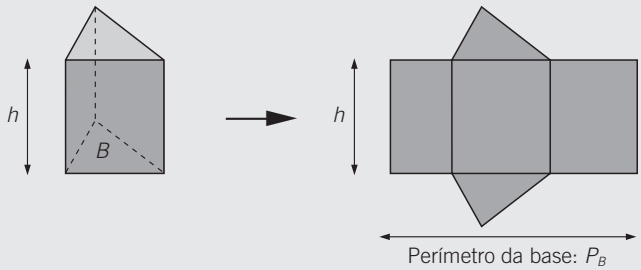
ADAPTACIÓN CURRICULAR

CALCULAR A ÁREA DE PRISMAS E PIRÁMIDES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

ÁREA DE PRISMAS RECTOS

Para calcular a área dun prisma recto fixámonos no seu desenvolvemento: o prisma recto está formado por un rectángulo e dous polígonos que son as súas bases.



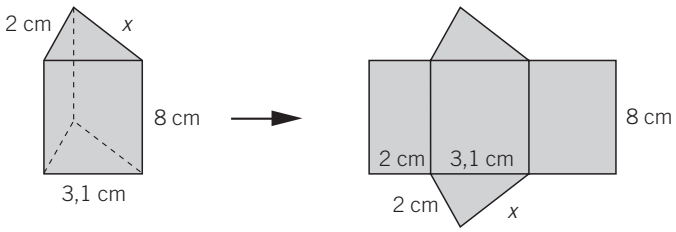
- **Área lateral:** é a área do rectángulo, un de cuxos lados coincide co perímetro da base e o outro coa altura do prisma.

$$A_L = \text{perímetro da base} \cdot \text{altura} = P_B \cdot h$$

- **Área total:** é a suma da área lateral e da área das bases.

$$A_T = \text{área lateral} + 2 \cdot \text{área da base} = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B$$

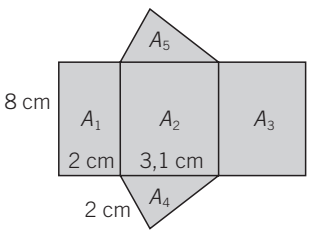
1 **Dado este prisma recto con base un triángulo rectángulo, calcula a área total.**



- Para calcular o valor de x, que é un dos catetos do triángulo rectángulo, aplicamos o teorema de Pitágoras:
  $(3{,}1)^2 = x^2 + 2^2$

  $x =$ .....

- Para calcular a área total determinamos a área de cada unha das seis caras do prisma, e despois sumámolas para obter a área total:



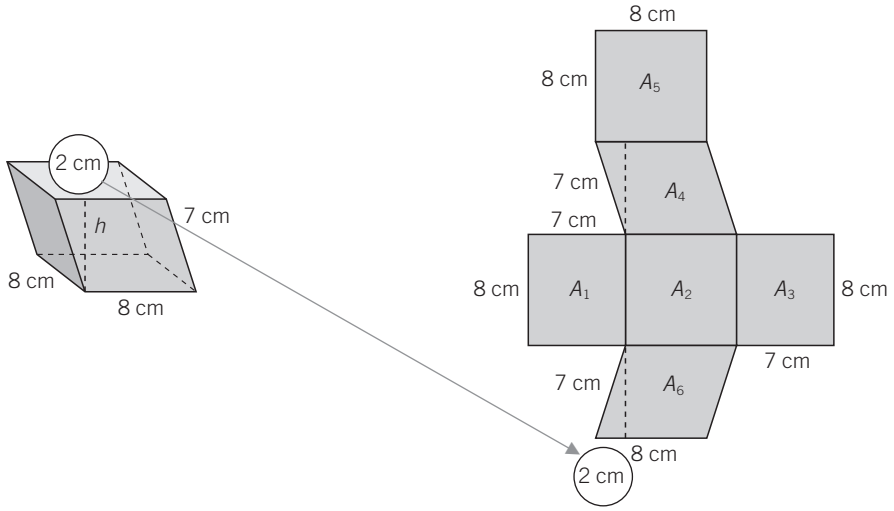
A_1, A_2, A_3 son rectángulos. A súa área é o produto de base por altura.
A_4, A_5 son triángulos rectángulos. A súa área é a base pola altura dividido entre 2, é dicir, o produto dos catetos dividido entre 2.

$A_1 =$ $A_2 =$ $A_3 =$

$A_4 =$ $A_5 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 =$ ☐

2 **Calcula a área do prisma oblicuo de base cuadrangular da figura.**



- Para calcular o valor de *h* aplicamos o teorema de Pitágoras:

- Para calcular a área total determinamos a área de cada unha das seis caras do prisma, e despois sumámolas:

$A_1 =$ ..... · ..... = $A_4 =$ ..... · ..... =

$A_2 =$ ..... · ..... = $A_5 =$ ..... · ..... =

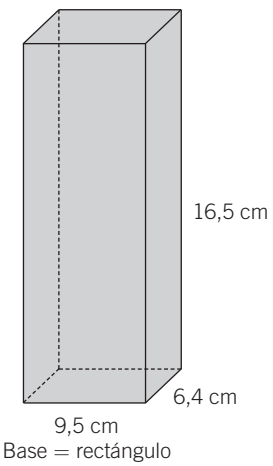
$A_3 =$ ..... · ..... = $A_6 =$ ..... · ..... =

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 =$ ☐

3 **Calcula a área lateral e a área total dun ortoedro de 6,4 × 9,5 cm de base e 16,5 cm de altura.**

Área lateral = perímetro da base · altura =

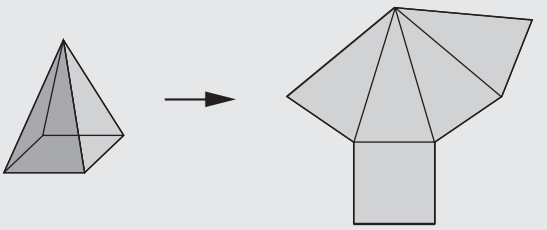
Área total = área lateral + 2 · área da base =



ADAPTACIÓN CURRICULAR

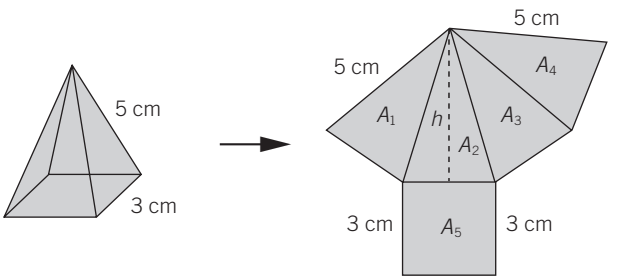
ÁREA DE PIRÁMIDES RECTAS

Para calcular a área dunha pirámide recta fixámonos no seu desenvolvemento: está formada pola base e tantos triángulos como lados ten a base.

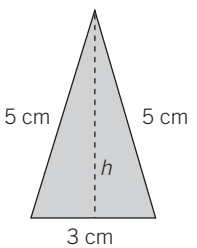


- **Área lateral:** é a área formada pola suma das áreas dos triángulos.
- **Área total:** é a suma da área lateral e da área da base: $\boldsymbol{A_T = A_L + A_B}$.
- Se o polígono da base é regular, o cálculo é máis sinxelo, xa que todas as caras laterais son iguais e abonda con calcular a área dun triángulo e multiplicar polo número de triángulos para obter a área lateral.

4 **Calcula a área da pirámide de base cadrada da figura. Ten en conta que a base é un polígono regular.**



Aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular a lonxitude de h:



$5^2 = \square^2 + h^2$

$A_1 = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} =$ $\qquad A_2 =$ $\qquad A_3 =$

$A_4 =$ $\qquad A_5 =$

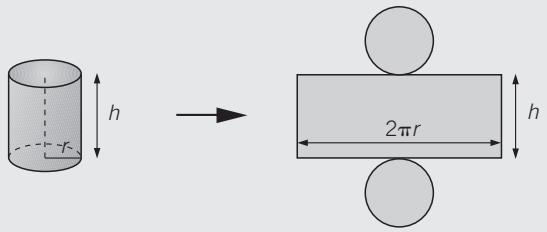
Área total $= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = \square$

CALCULAR A ÁREA DE CORPOS REDONDOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

ÁREA DO CILINDRO

Para calcular a área do cilindro fixámonos no seu desenvolvemento: está formado por un rectángulo e dous círculos.



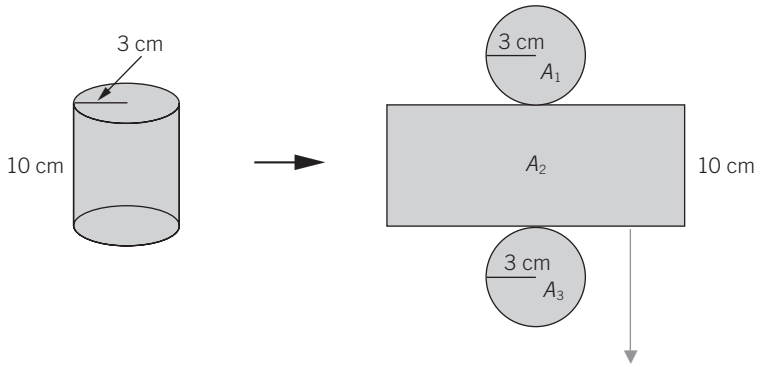
- **Área lateral:** é un rectángulo, en que un dos seus lados é igual á lonxitude da circunferencia da base ($2\pi r$), e o outro é a altura (h).

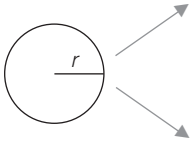
$$A_L = \text{perímetro da base} \cdot \text{altura} = 2\pi r \cdot h$$

- **Área total:** obtense sumando a área lateral e as áreas das dúas bases.

$$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

1 **Completa o exercicio e calcula a área total do cilindro.**





Área $= \pi r^2 =$

Perímetro $= 2\pi r =$

É igual ca o perímetro de A_1.

$2 \cdot \pi \cdot 3 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3$

$A_1 = \pi r^2 =$

$A_2 = 2\pi r \cdot h =$

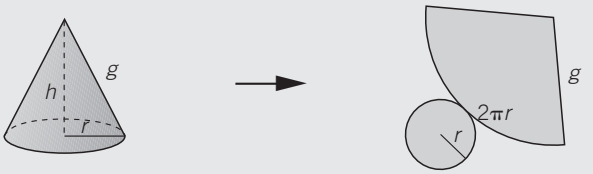
$A_3 = \pi r^2 =$

Área total $= A_1 + A_2 + A_3 =$ ☐

ADAPTACIÓN CURRICULAR

ÁREA DO CONO

Para calcular a área dun cono fixámonos no seu desenvolvemento: está formado por un sector circular e un círculo, que é a base.

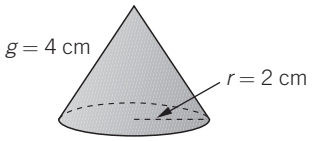


- **Área lateral:** calculámola coma se fose a área dun triángulo, en que a lonxitude da base é a da circunferencia ($2\pi r$) e a altura é o raio do sector.

$$A_T = \frac{\text{lonxitude da base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g$$

- **Área total:** $A_T = \pi r g + \pi r^2 = \pi r(g + r)$

2 **A área lateral do cono da figura é:**



a) 8 cm^2
b) 25,12 cm^2
c) 12,56 cm^2
d) 34 cm^2

3 **A área total do cono anterior é:**

a) 20 cm^2 b) 50,24 cm^2 c) 36,55 cm^2 d) 37,68 cm^2

4 **Calcula a área total dun cono con $r = 5$ cm e $h = 12$ cm.**

ÁREA DA ESFERA

A área dunha esfera de raio r é igual a catro veces a área do círculo do mesmo raio ca a esfera:

$$A = 4\pi r^2$$

EXEMPLO

Calcula a área dunha esfera de raio 10 cm.

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 10^2 = 1.256$ cm^2

5 **A área dunha esfera de raio 15 cm é:**

a) 2.826 cm^3 b) 28,26 cm^2 c) 2.826 cm^2 d) 14,13 cm^2

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

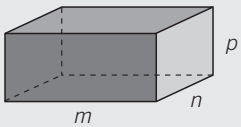
CALCULAR O VOLUME DE CORPOS XEOMÉTRICOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

VOLUME DO ORTOEDRO

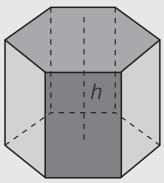
Se un ortoedro ten de dimensións m, n e p, o seu volume V é igual á área da base ($m \cdot n$) pola altura p.

V = área da base · altura = $m \cdot n \cdot p$



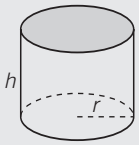
VOLUME DO PRISMA

V = área da base · altura = $A_{Base} \cdot h$



VOLUME DO CILINDRO

V = área da base · altura = $\pi r^2 \cdot h$



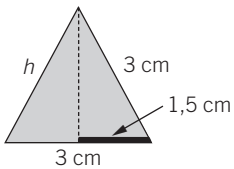
EXEMPLO

Calcula o volume dun ortoedro de dimensións 3 cm, 4 cm e 8 cm.

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 8 = 96 \text{ cm}^3$$

Calcula o volume dun prisma recto de altura 15 cm e base triangular regular de lado 3 cm.

Para calcular a altura debemos aplicar o teorema de Pitágoras: $3^2 = 1{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = 2{,}6$ cm



$$V = \text{área da base} \cdot \text{altura} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \cdot h = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 15 = 58{,}5 \text{ cm}^3$$

Determina a área dun cilindro de altura 7 cm e raio da base 4 cm.

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 351{,}68 \text{ cm}^3$$

1 **O volume dun ortoedro de dimensións 4, 8 e 12 cm, respectivamente, é:**

a) 384 cm^3 b) 24 cm^3 c) 192 cm^3 d) 768 cm^3

2 **O volume dun prisma hexagonal regular de aresta básica 10 cm e altura 8 cm é:**

a) 2.078,4 cm^3 b) 4.156,8 cm^3 c) 480 cm^3 d) 692,8 cm^3

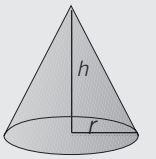
3 **O volume dun cilindro de altura 6 cm e raio da base 3 cm é:**

a) 56,52 cm^3 b) 169,56 cm^3 c) 113,04 cm^3 d) 339,12 cm^3

VOLUME DO CONO

O volume dun cono é igual á terceira parte da área da base, que é un círculo (πr^2), pola altura (h).

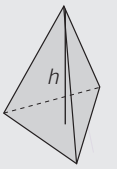
$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$



VOLUME DA PIRÁMIDE

O volume da pirámide calcúlase igual ca o dun cono, pero tendo en conta que a base pode ser un polígono calquera.

$$V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3}$$



EXEMPLO

Calcula o volume dun cono de altura 10 cm e raio da base 2 cm.

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 10}{3} = 41{,}87 \text{ cm}^3$$

Calcula o volume dunha pirámide de altura 8 cm e base regular triangular de lado 2 cm.

$$A_{Base} = \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} = 1{,}73 \text{ cm}^2$$

Para calcular a área do triángulo da base aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$2^2 = 1^2 + h^2 \rightarrow h = 1{,}73 \text{ cm} \rightarrow V = \frac{A_{Base} \cdot h}{3} = \frac{1{,}73 \cdot 8}{3} = 4{,}61 \text{ cm}^3$$

4 **O volume dun cono de altura 15 cm e raio da base 12 cm é:**

a) 4.069,44 cm^3 b) 2.260,8 cm^3 c) 6.782,4 cm^3 d) 1.356,48 cm^3

5 **O volume dunha pirámide de base cuadrangular de lado 8 cm e altura 8 cm é igual a:**

a) 170,67 cm^3 b) 85,33 cm^3 c) 341,34 cm^3 d) 42,68 cm^3

VOLUME DA ESFERA

O volume dunha esfera é: $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

EXEMPLO

Calcula o volume dunha esfera de raio 3 cm.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 3^3}{3} = 113{,}04 \text{ cm}^3$$

6 **O volume dunha esfera de raio 7 cm é:**

a) 718,01 cm^3 b) 143,603 cm^3 c) 1.436,03 cm^3 d) 339,12 cm^3

7 **O volume dunha esfera de área 2.826 cm^2 é:**

a) 14.130 cm^3 b) 42.390 cm^3 c) 28.260 cm^3 d) 86.340 cm^3

13 Estatística

INTRODUCIÓN

A presenza da Estatística é habitual en multitude de contextos da vida real: enquisas electorais, sondaxes de opinión, etc. A importancia da Estatística na sociedade actual reflíctese en moitos campos: estudos médicos sobre enfermidades ou medicamentos; análises para establecer primas de seguros; distribución das liñas de autobuses nunha cidade… Por iso, é importante que os alumnos se familiaricen cos conceptos que emprega esta disciplina.

As medidas estatísticas serven para analizar a información contida nun conxunto de datos. Estas medidas pódense dividir en dous grupos: as que corresponden a medidas de centralización e as que corresponden a medidas de dispersión.

RESUMO DA UNIDADE

- *Variable estatística cualitativa*: non se pode medir.
- *Variable estatística cuantitativa*: pódese medir, e a súa medida exprésase mediante números.
- *Media*: $\bar{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$
- *Mediana*: é un valor tal que, ordenados os datos de forma crecente, a metade son iguais ou inferiores a el e a outra metade son iguais ou superiores.
- *Moda*: é o valor da variable ou o intervalo con maior frecuencia absoluta.
- *Desviación media*: é a media dos valores absolutos das desviacións.
- *Varianza*: é a media dos cadrados das desviacións dos valores respecto da media.
- *Desviación típica*: é a raíz cadrada da varianza.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Recoñecer e diferenciar entre poboación e mostra.	• Estatística. • Poboación e mostra.	• Distinción dos conceptos de poboación e mostra.
2. Clasificar as variables estatísticas.	• Variables cuantitativas e cualitativas. • Variables estatísticas discretas e continuas.	• Diferenciación entre variables cualitativas e cuantitativas, e dentro destas, entre discretas e continuas.
3. Obter a táboa estatística asociada a un conxunto de datos.	• Táboas estatísticas. • Marca de clase.	• Construción de táboas estatísticas axeitadas ao conxunto de datos.
4. Calcular a frecuencia absoluta e relativa dun conxunto de datos.	• Frecuencias absolutas. • Frecuencias relativas.	• Cálculo de frecuencias absolutas, frecuencias relativas e porcentaxes.
5. Calcular as frecuencias acumuladas dun conxunto de datos.	• Frecuencias acumuladas.	• Cálculo de frecuencias acumuladas.
6. Utilizar e interpretar os gráficos estatísticos para representar datos.	• Gráficos estatísticos: diagrama de barras, histograma e polígono de frecuencias.	• Representación das variables estatísticas mediante gráficos.
7. Distinguir e calcular as medidas de centralización dun conxunto de datos.	• Medidas de centralización: media, mediana e moda.	• Cálculo e interpretación da media, da mediana e da moda dun conxunto de datos.
8. Distinguir e calcular as medidas de dispersión dun conxunto de datos.	• Medidas de dispersión: percorrido, desviación media, varianza e desviación típica.	• Cálculo e interpretación das medidas de dispersión dun conxunto de datos.

13 OBXECTIVO 1
RECOÑECER E DIFERENCIAR ENTRE POBOACIÓN E MOSTRA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Estatística** é a ciencia encargada de recompilar e ordenar datos referidos a diversos fenómenos para a súa posterior análise e interpretación.
- **Poboación** é o conxunto de elementos nos que se estuda un determinado aspecto ou característica.
- **Mostra** é unha parte da poboación. É importante escoller correctamente a mostra: debe ser representativa, é dicir, dar unha información similar á obtida se estudásemos toda a poboación.

EXEMPLO

Considera a túa clase como a poboación e completa o seguinte cuestionario.

Nome: ..... **Apelidos:** .....

Marca cunha cruz a resposta elixida e responde.

Sexo: ☐ Home ☐ Muller

Deporte preferido:
☐ Fútbol ☐ Baloncesto ☐ Tenis ☐ Balonmán ☐ Outros

Cantos irmáns tes?
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ou máis irmáns

Cantos anos tes?
☐ 13 anos ☐ 14 anos ☐ 15 anos ☐ 16 anos

Que altura tes?

Canto pesas?

Pode ocorrer que o día en que se reparta o cuestionario falte alguén na clase ou que algún alumno non conteste e, aínda que o noso obxectivo sexa toda a **poboación**, é dicir, o conxunto dos alumnos da clase, usaremos unha parte da poboación chamada **mostra**, que no noso caso estará formada por aqueles alumnos que contestasen o cuestionario.

1 **Sinala en que casos é máis conveniente estudar a poboación ou unha mostra.**

a) A lonxitude dos parafusos que fabrica unha máquina de xeito ininterrompido.
b) A estatura de todos os visitantes estranxeiros nun ano en España.
c) O peso dun grupo de cinco amigos.
d) Os efectos dun novo medicamento no ser humano.
e) O número de fillos das familias dunha comunidade de veciños.
f) O talle de camisa dos homes dunha comunidade autónoma.
g) Os gustos musicais dos mozos dunha cidade.
h) A altura media de vinte alumnos dunha clase.

CLASIFICAR AS VARIABLES ESTATÍSTICAS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Variable estatística** é toda característica ou aspecto dos elementos dunha poboación ou mostra que se pode estudar.
- As variables estatísticas poden ser **cuantitativas ou cualitativas**.
- **Variables cuantitativas:** os valores que pode tomar son números. Poden ser discretas ou continuas.
  - **Variables cuantitativas discretas:** toman un número determinado de valores.
  - **Variables cuantitativas continuas:** poden tomar calquera valor comprendido entre dous dados.
- **Variables cualitativas:** non se poden medir.

EXEMPLO

No cuestionario do exemplo anterior, diferencia as variables cuantitativas e as cualitativas.

- Variables estatísticas cuantitativas: número de irmáns, idade, peso e altura.
  Estas variables expresámolas mediante números.
  - Variables estatísticas cuantitativas discretas: número de irmáns e idade.
  - Variables estatísticas cuantitativas continuas: peso e altura.
- Variables estatísticas cualitativas: sexo e deporte preferido.
  Estas variables non se expresan mediante números.

1 **Sinala en cada caso o que corresponda.**

VARIABLE	CUANTITATIVA		CUALITATIVA
	DISCRETA	CONTINUA	
Provincia de residencia			
Número de veciños dun edificio			
Profesión da nai			
Altura dun edificio			
Número de chamadas telefónicas diarias			
Número de curmáns			
Tipo de música preferida			
Barras de pan consumidas nunha semana nun colexio			
Consumo de gasolina por cada 100 km			
Número da porta da túa casa			
Cor de pelo			
Talle de pantalón			

OBTER A TABOA ESTATÍSTICA ASOCIADA A UN CONXUNTO DE DATOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- As **táboas estatísticas** serven para organizar os datos dunha variable estatística e estudalos con maior facilidade.
- **Se a variable é discreta**, é dicir, temos un conxunto de datos pequeno, fórmase unha táboa con dúas columnas. Nunha das columnas colócanse os distintos valores da variable, e na outra columna, o número de veces que aparece cada un deles.
- **Se a variable é continua**, agrúpanse os valores en intervalos de igual amplitude, establécese a marca de clase, que é o punto medio de cada intervalo, e faise o reconto dos datos de cada intervalo.

EXEMPLO

Daniel mercou 5 bolsas de flocos de millo, 7 caramelos, 2 chicles de menta e 10 piruletas. Organiza este conxunto de datos nunha táboa.

Se queremos recoller a información nunha táboa, pomos nunha columna os distintos valores da variable: bolsas de flocos de millo, caramelos, chicles de menta e piruletas, e na outra, o número de veces que aparece cada un deles.

PRODUTOS	RECONTO
Bolsas de flocos de millo	5
Caramelos	7
Chicles de menta	2
Piruletas	10

EXEMPLO

As estaturas (en cm) de 27 mozos son:

155, 178, 170, 165, 173, 168, 160, 166, 176, 169, 158, 170, 179, 161, 164, 156, 170, 171, 167, 151, 163, 158, 164, 174, 176, 164, 154

Forma unha táboa, efectúa o reconto e obtén as marcas de clase.

Neste caso, a variable é continua. Polo tanto, debemos agrupar os datos en intervalos.

Para iso obtemos a diferenza entre o valor maior e o menor:

$$179 - 151 = 28$$

Para incluír todos os valores, tomamos 6 intervalos de amplitude 5 ($6 \cdot 5 = 30 > 28$, que é a diferenza entre o maior e o menor).

Empezamos polo valor 150.

Marcas de clase: $(150 + 155)/2 = 152{,}5$
$(155 + 160)/2 = 157{,}5$
$(160 + 165)/2 = 162{,}5$
$(165 + 170)/2 = 167{,}5$
$(170 + 175)/2 = 172{,}5$
$(175 + 180)/2 = 177{,}5$

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECONTO
[150, 155)	152,5	3
[155, 160)	157,5	3
[160, 165)	162,5	6
[165, 170)	167,5	5
[170, 175)	172,5	6
[175, 180]	177,5	4

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

1 **As idades (en anos) de 20 alumnos son:**

13, 15, 14, 16, 13, 15, 14, 16, 15, 14, 13, 13, 13, 15, 14, 16, 14, 14, 15, 13

Que tipo de variable é? Constrúe a correspondente táboa.

IDADES	RECONTO

2 **O sexo de 20 alumnos é:**

M, H, H, M, M, M, H, H, M, M, H, M, H, H, M, M, M, M, H, M

Que tipo de variable é? Constrúe a táboa asociada a estes datos.

SEXO	RECONTO

3 **O peso (en kg) de 20 alumnos é:**

66,5; 59,2; 60,1; 64,2; 70; 50; 41,6; 47,9; 42,8; 55;
52,2; 50,3; 42,2; 61,9; 52,4; 49,2; 41,6; 38,8; 36,5; 45

Que tipo de variable é? Constrúe a táboa asociada a estes datos.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECONTO

4 **O número de horas diarias de estudo de 30 alumnos é:**

3, 4, 3, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 2, 0, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 4, 2

Obtén unha táboa do reconto de datos.

CALCULAR A FRECUENCIA ABSOLUTA E RELATIVA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Frecuencia absoluta**, f_i, dun conxunto de datos é o número de veces que se repite cada valor da variable, x_i, no total dos datos.
- **Frecuencia relativa**, h_i, é o cociente entre a frecuencia absoluta e o número total de datos: $h_i = \frac{f_i}{N}$

  A frecuencia relativa é sempre un número comprendido entre 0 e 1.
- A suma das frecuencias absolutas é igual ao número total de datos, N.
- A suma das frecuencias relativas é 1.
- **Porcentaxe (%)** é o resultado de multiplicar a frecuencia relativa por 100.

EXEMPLO

As idades (en anos) de 20 alumnos dun instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén a táboa de frecuencias e porcentaxes.

Comezamos a construír a táboa.

– Na primeira columna colocamos os valores da variable.

– Na segunda columna colocamos o número de veces que aparece cada dato. A este número chámaselle frecuencia absoluta.

– Na terceira columna colocamos o *cociente* entre a frecuencia absoluta de cada dato e o número total de datos (20). A este número chámaselle *frecuencia relativa.*

$$h_1 = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \qquad h_2 = \frac{f_2}{N} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$h_3 = \frac{f_3}{N} = \frac{4}{20} = 0{,}20 \qquad h_4 = \frac{f_4}{N} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

x_i	f_i	h_i	%
13	6	0,30	30
14	7	0,35	35
15	4	0,20	20
16	3	0,15	15
Suma	20	1	100

– Na cuarta columna colocamos a porcentaxe, resultado de multiplicar a frecuencia relativa por 100.

1 **As notas de inglés de 20 alumnos foron:**

6, 5, 3, 1, 2, 5, 6, 5, 9, 8,
7, 4, 9, 10, 7, 7, 8, 6, 5, 5

Constrúe a táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas e porcentaxes.

x_i	f_i	h_i	%
1	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$0{,}05 \cdot 100 = 5$
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Suma	20		

EXEMPLO

Os resultados dun test de intelixencia feito a 25 persoas foron:

100, 80, 92, 101, 65, 72, 121, 68, 75, 93, 101, 100, 102,
97, 89, 73, 121, 114, 113, 113, 106, 84, 94, 83, 74

Obtén a táboa de frecuencias e de porcentaxes tomando intervalos de amplitude 10.

– Na primeira columna colocamos os valores da variable, tomando 6 intervalos de amplitude 10, xa que a diferenza entre os valores extremos é 121 − 65 = 56.
– Na segunda columna colocamos a marca de clase de cada intervalo.
– Na terceira columna colocamos o número de veces que aparece cada dato. A este número chámaselle frecuencia absoluta.
– Na cuarta columna colocamos o cociente entre a frecuencia absoluta de cada dato e o número total de datos (20). A este número chámaselle frecuencia relativa.
– Na quinta columna colocamos a porcentaxe, que é o resultado de multiplicar a frecuencia relativa por 100.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[65, 75)	70	5	0,20	20
[75, 85)	80	4	0,16	16
[85, 95)	90	4	0,16	16
[95, 105)	100	6	0,24	24
[105, 115)	110	4	0,16	16
[115, 125]	120	2	0,08	8

2 **O peso (en kg) de 24 persoas é:**

68,5; 34,2; 47,5; 39,2; 47,3; 79,2; 46,5; 58,3; 62,5; 58,7; 80; 63,4;
58,6; 50,2; 60,5; 70,8; 30,5; 42,7; 59,4; 39,3; 48,6; 56,8; 72; 60

Agrúpao en intervalos de amplitude 10 e obtén a táboa de frecuencias absolutas, frecuencias relativas e porcentaxes.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%

3 **Completa a seguinte táboa.**

x_i	f_i	h_i	%
10		4	
20	5		10
30		61	
40	10		
50		41	
60			18

CALCULAR AS FRECUENCIAS ACUMULADAS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Frecuencia absoluta acumulada, F_i,** dun valor x_i é a suma das frecuencias f_i de todos os valores menores ou iguais ca el.
- **Frecuencia relativa acumulada, H_i,** dun valor x_i é o cociente entre a frecuencia absoluta acumulada e o número total de datos: $H_i = \frac{F_i}{N}$

EXEMPLO

As idades (en anos) de 20 alumnos dun instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén a táboa de frecuencias absolutas acumuladas e frecuencias relativas acumuladas.

– Para obter a frecuencia absoluta acumulada de cada valor hai que sumar as frecuencias absolutas dos valores menores ou iguais ca el:

$F_1 = f_1 = 6$

$F_2 = f_1 + f_2 = 6 + 7 = 13$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 6 + 7 + 4 = 17$

$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 6 + 7 + 4 + 3 = 20$

– Para obter a frecuencia relativa acumulada dun valor hai que dividir a frecuencia absoluta acumulada de cada valor entre o número total de datos:

$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30$

$H_2 = \frac{F_2}{N} = \frac{f_1 + f_2}{N} = \frac{6+7}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65$

$H_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{N} = \frac{6+7+4}{20} = \frac{17}{20} = 0{,}20$

$H_4 = \frac{F_4}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{N} = \frac{6+7+4+3}{20} = \frac{20}{20} = 1$

DATOS x_i	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
13	6	6	3,30	0,30
14	7	13	0,35	0,65
15	4	17	0,20	0,85
16	3	20	0,15	1

1 **Dados os datos dunha variable estatística e as frecuencias absolutas, completa a táboa de frecuencias relativas e frecuencias absolutas e relativas acumuladas.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	4			
2	4			
3	3			
4	7			
5	5			
Suma				

2 **Os datos da táboa refírense á estatura (en cm) de 40 alumnos. Obtén a táboa de frecuencias asociada a estes datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[150, 155)		3		
[155, 160)		6		
[160, 165)		9		
[165, 170)		10		
[170, 175)		7		
[175, 180]		5		

3 **Dados os seguintes datos dunha variable estatística, calcula a súa táboa de frecuencias.**

INTERVALO	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8]
FRECUENCIA	10	8	4	2

4 **Completa a seguinte táboa.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
10	5				
11		13			
12	10				
13		35			
14	7				
15	8				16

UTILIZAR E INTERPRETAR OS GRÁFICOS ESTATÍSTICOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Os **gráficos** axudan a representar facilmente a información que conteñen as táboas estatísticas. Segundo sexa a variable, úsase un tipo ou outro de gráfico.

VARIABLES DISCRETAS

- **Diagrama de barras:** úsase para representar datos cualitativos ou cuantitativos discretos.
  Sobre o eixe *X* sinálanse os valores da variable e levántanse barras de altura igual á frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa ou relativa acumulada).
- **Polígono de frecuencias:** é unha liña poligonal que se obtén a partir do diagrama de barras, unindo cada extremo dunha barra co extremo da barra seguinte.

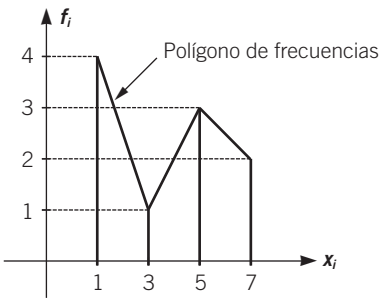
VARIABLES CONTINUAS

- **Histograma:** úsase para representar variables cuantitativas continuas.
  Sinálanse sobre o eixe horizontal os extremos dos intervalos e levántanse rectángulos de altura igual á frecuencia representada.
- **Polígono de frecuencias:** obtense ao unir os puntos medios dos lados superiores dos rectángulos do histograma.

EXEMPLO

Representa o diagrama de barras e o polígono de frecuencias do conxunto de datos.

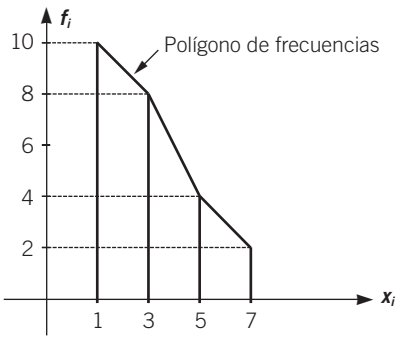
x_i	1	3	5	7
f_i	4	1	3	2



EXEMPLO

Representa o diagrama de barras e o polígono de frecuencias do seguinte conxunto de datos.

x_i	1	3	5	7
f_i	10	8	4	2



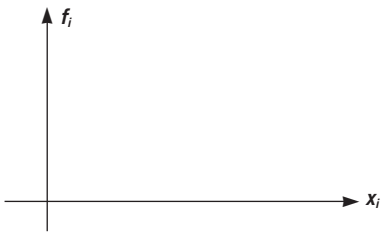
1 **O talle de calzado que utilizan 20 alumnos nunha clase de Educación Física é:**

37, 40, 39, 37, 38, 38, 38, 41, 42, 37, 43, 40, 38, 38, 38, 40, 37, 37, 38, 38

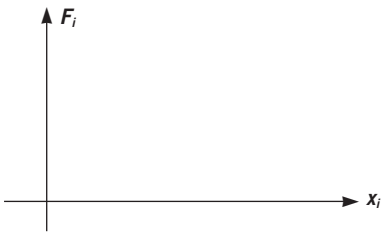
Constrúe a táboa de frecuencias e representa o diagrama de barras e o polígono de frecuencias para as frecuencias absolutas e para as frecuencias absolutas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
37	4			
38	3			
39	7			
40	5			
41	8			
42	7			
43	1			
Suma				

FRECUENCIAS ABSOLUTAS



FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



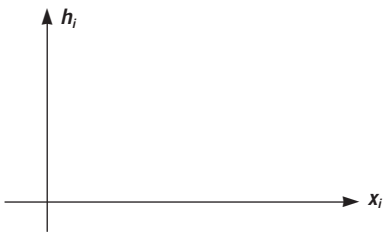
2 **Nun edificio hai 25 vivendas e o número de vehículos por vivenda é:**

0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1

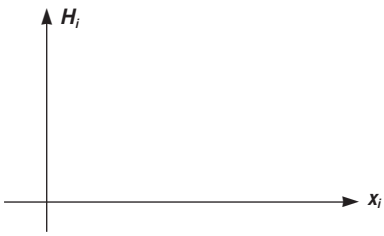
Constrúe a táboa de frecuencias e representa o diagrama de barras e o polígono de frecuencias para as frecuencias relativas e as frecuencias relativas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0				
1				
2				
3				
4				
Suma				

FRECUENCIAS RELATIVAS



FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS

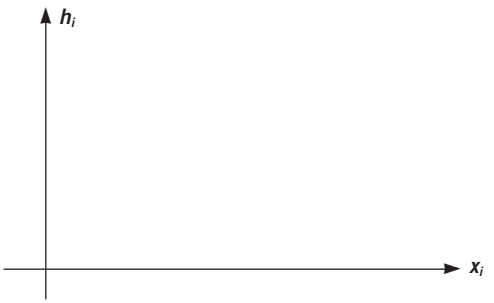


3 **Ao efectuar unha enquisa a 50 clientes dun supermercado sobre os quilos de carne mercados á semana, o 10 % afirmou que mercaba de 1 a 2,5 kg; 20 deles mercaban de 2,5 a 4 kg; o 30 % mercaba de 4 a 5,5 kg e o resto de 5,5 a 7 kg.**

a) Completa a táboa de frecuencias.

b) Representa o histograma de frecuencias relativas.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

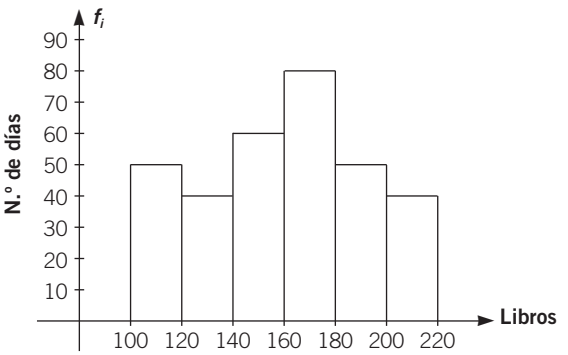


4 **Observa o histograma de frecuencias absolutas referido aos libros vendidos diariamente nunha libraría.**

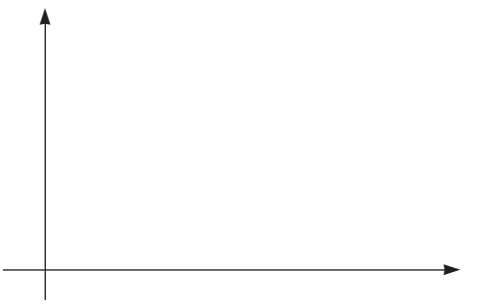
a) Completa a táboa de frecuencias.

b) Representa o histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

c) Que porcentaxe de días se venderon máis de 200 libros? E menos de 100?



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

DISTINGUIR E CALCULAR AS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- A media, a mediana e a moda chámanse **medidas de centralización** e son valores que resumen a información da mostra.
- Dado un conxunto de datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \ldots, f_n$, a **media**, $\bar{x}$, é igual a:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Se os datos están agrupados en intervalos, o valor x_i é a marca de clase de cada intervalo.

EXEMPLO

Calcula a media do seguinte conxunto de datos.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
26	6	156
28	7	196
30	4	120
32	3	96
Suma	20	568

$$\bar{x} = \frac{568}{20} = 28{,}4$$

Na táboa de frecuencias engadimos unha terceira columna onde se calcula o produto de cada valor pola súa frecuencia relativa.

1 **Dados os datos: 2, 5, 7, 8 e 7, calcula a súa media.**

2 **Calcula a media do seguinte conxunto de datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[0, 20)	10	50	
[20, 40)	30	67	
[40, 60)	50	30	
[60, 80]	70	42	
	Suma		

3 **Unha alumna realizou 8 exames dunha materia e obtivo estas notas: 7, 5, 6, 10, 9, 7, 6 e 6. Que nota media obterá nesa meteria? Ten en conta que para calcular a media hai que sumar os datos e dividir o resultado entre o número total de datos.**

- A **mediana** dun conxunto de datos é o valor tal que, ordenados os datos de forma crecente, a metade son menores ca el e a outra metade son maiores. Represéntase por ***Me***.
  – Se o conxunto de datos é un número impar, a mediana é o valor central.
  – Se o conxunto de datos é par, a mediana é a media dos dous valores centrais.
- A **moda** dun conxunto de datos é o valor ou valores da variable que máis se repite. Represéntase por ***Mo***.
- **O valor da moda pode non ser único**, é dicir, pode haber varias modas.

EXEMPLO

Obtén a mediana e a moda do seguinte conxunto de datos: 2, 2, 1, 6, 4, 3 e 9.

- Mediana:
  Ordenamos de forma crecente os datos: 1, 2, 2, **3**, 4, 6, 9.
  Como o número de datos é impar, a mediana é o valor central: $Me = 3$.
- Moda: o valor que máis se repite é 2; polo tanto, $Mo = 2$.

4 **Estúdase o número de usuarios de 20 autobuses, e obtéñense os seguintes datos.**

3, 12, 7, 16, 22, 13, 18, 4, 6, 19, 24, 25, 4, 8, 12, 22, 17, 19, 23, 4

a) Realiza a táboa, agrupando os valores de 5 en 5 e empezando desde cero.
b) Calcula a moda, a mediana e a media.
c) Realiza un histograma coas frecuencias acumuladas.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$

Media: $\bar{x} =$
Mediana: $Me =$
Moda: $Mo =$

5 **Calcula a media, a mediana e a moda do seguinte conxunto de datos.**

4, 7, 10, 8, 3, 2, 1, 2, 2, 8

6 **Os talles de calzado que usan os 20 alumnos dunha clase de 3.º ESO son:**

34, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40

Calcula a media, a mediana e a moda.

7 **Un deportista quere mercar unha bicicleta de montaña e analiza o prezo e o peso destas bicicletas.**

BICICLETA	PREZO (€)	PESO (kg)
Marin Rift Zone	1.474	13,12
Kastle Degree 12.0	2.879	12,2
Sistesi Bazooka	3.540	15,7
Bianchi NTH	4.350	11,52
Arrow Spyce HPR	1.799	13,1
Pro-Flex Beast	1.788	13,46
DBR V-Link Pro	4.494	11,66
Specialized M-2 S-Works	2.934	10,35
Sunn Revolt 2	2.172	11,21
BH Top Line Expert 001	2.550	9,95

a) Calcula o prezo medio.

b) Calcula o peso medio.

DISTINGUIR E CALCULAR AS MEDIDAS DE DISPERSIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- As **medidas de dispersión** son medidas estatísticas que indican o maior ou menor grao de agrupamento dos valores que forman un conxunto de datos.
- O percorrido, a desviación, a desviación media, a varianza e a desviación típica son medidas de dispersión.
- O **rango ou percorrido** calcúlase como a diferenza entre o maior valor e o menor da variable estatística.
- A **desviación respecto á media** é a diferenza entre cada valor da variable e a media. A suma das desviacións sempre é cero.

EXEMPLO

As estaturas (en cm) dos xogadores de dous equipos de baloncesto son:

EQUIPO A	180	165	170	173	162
EQUIPO B	168	173	171	169	169

Calcula o rango ou percorrido e a desviación para cada un dos equipos.

- Percorrido = maior valor da variable − menor valor da variable
  Equipo A: Percorrido = 180 − 162 = 18 cm
  Equipo B: Percorrido = 173 − 168 = 5 cm
  Podemos observar que as medidas do equipo A están máis dispersas ca as do equipo B, xa que a diferenza entre o valor maior e o menor da variable é maior no caso do equipo A.
- Desviación respecto á media = valor da variable − media
  Equipo A: Media = (180 + 165 + 170 + 173 + 162)/5 = 170 cm
  180 − 170 = 10 cm 165 − 170 = −5 cm
  170 − 170 = 0 cm 173 − 170 = 3 cm 162 − 170 = −8 cm
  Equipo B: Media = (168 + 173 +171 + 169 + 169)/5 = 170 cm
  168 − 170 = −2 cm 173 − 170 = 3 cm
  171 − 170 = 1 cm 169 − 170 = −1 cm 169 − 170 = −1 cm
  Observamos que a suma das desviacións é sempre cero:
  Equipo A: 10 + (−5) + 0 + 3 + (−8) = 0
  Equipo B: (−2) + 3 + 1 + (−1) + (−1) = 0

1 **Nun exame de Matemáticas obtivéronse as seguintes notas.**

3, 5, 7, 2, 9, 5, 3

Obtén o percorrido e a desviación.

2 **As idades dos alumnos dunha clase veñen dadas pola seguinte táboa. Obtén o rango e a desviación.**

IDADE (x_i)	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})$
13	6			
14	7			
15	4			
16	3			
Suma				

3 **Calcula o percorrido e a desviación dos datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})$
[0, 4)		3			
[4, 8)		10			
[8, 12)		5			
[12, 16]		2			
Suma					

4 **Comproba, para os pesos de 20 alumnos, que a suma das desviacións é cero.**

PESO	x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})$
[35, 41)		2		
[41, 47)		5		
[47, 53)		6		
[53, 59)		1		
[59, 65)		4		
[65, 71]		2		

- **Desviación media (*DM*):** é a media dos valores absolutos das desviacións.
- **Varianza:** é a media dos valores absolutos das desviacións ao cadrado.
- **Desviación típica:** é a raíz cadrada da varianza. Desígnase coa letra σ.

EXEMPLO

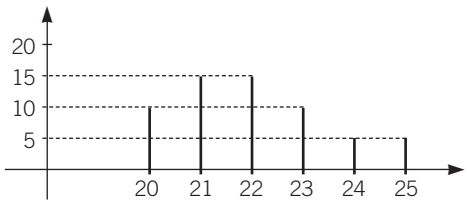
A táboa mostra os resultados obtidos nun test de 120 preguntas. Calcula a desviación media, a varianza e a desviación típica.

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[0, 30)	15	12	180	$\lvert 15 - 52{,}35 \rvert = 36{,}73$	1.349,02	$12 \cdot 1.349{,}02 = 16.726.228{,}28$
[30, 60)	45	20	900	$\lvert 45 - 52{,}35 \rvert = 7{,}35$	54,02	$20 \cdot 54{,}02 = 1.080{,}4$
[60, 90)	75	10	750	$\lvert 75 - 52{,}35 \rvert = 22{,}65$	513,02	$10 \cdot 513{,}02 = 5.130{,}2$
[90, 120]	105	7	735	$\lvert 105 - 52{,}35 \rvert = 52{,}65$	2.772,02	$7 \cdot 2.772{,}02 = 19.404{,}14$
Suma		**49**	**2.565**	**119,38**		**42.343,02**

$$\text{Desviación media} = \frac{36{,}73 \cdot 12 + 7{,}35 \cdot 20 + 22{,}65 \cdot 10 + 52{,}65 \cdot 7}{49} = 24{,}14$$

$$\text{Varianza} = \frac{42.343{,}20}{49} = 864{,}14 \qquad \text{Desviación típica} = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{864{,}14} = 29{,}4$$

5 **Calcula as medidas de centralización e as medidas de dispersión.**



x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot \lvert x_i - \bar{x} \rvert^2$
20							
21							
22							
23							
24							
25							
Suma							

Media $= \bar{x} =$
Mediana $= Me =$
Moda $= Mo =$

Rango $=$
Desviación media $=$
Varianza $=$
Desviación típica $= \sigma =$

6 **O lixo (en kg) producido por cada habitante ao ano en 10 países europeos é o que mostra a seguinte táboa.**

PAÍS	LIXO (kg)
Alemaña	337
Bélxica	313
España	214
Francia	288
Gran Bretaña	282
Italia	246
Noruega	415
Países Baixos	381
Suecia	300
Suíza	336

a) Calcula a media de lixo producida por cada habitante nestes países.

b) Canto vale a mediana dos datos?

c) Cal é o percorrido da distribución?

d) Completa a táboa.

PAÍS	LIXO (kg)	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
Alemaña	337		
Bélxica	313		
España	214		
Francia	288		
Gran Bretaña	282		
Italia	246		
Noruega	415		
Países Baixos	381		
Suecia	300		
Suíza	336		
Total			

e) Canto suman as desviacións respecto da media?

f) Canto vale a varianza?

g) E canto vale a desviación típica?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

7 **No Mundial de Fútbol do ano 2006 os xogadores españois seleccionados tiñan as seguintes idades.**

Reina, 23 anos	Capdevila, 28 anos	Albelda, 28 anos
Íker Casillas, 25 anos	Míchel Salgado, 30 anos	Senna, 29 anos
Cañizares, 36 anos	Sergio Ramos, 20 anos	Joaquín, 24 anos
Antonio López, 24 anos	Marchena, 26 anos	Reyes, 22 anos
Pablo Ibáñez, 24 anos	Cesc, 19 anos	Fernando Torres, 22 anos
Pernía, 29 anos	Iniesta, 22 anos	Luis García, 27 anos
Puyol, 28 anos	Xavi, 26 anos	Raúl, 28 anos
Juanito, 29 anos	Xabi Alonso, 24 anos	Villa, 24 anos

Completa a táboa e calcula.

IDADES (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	$f_i \cdot x_i$	FRECUENCIA ACUMULADA (F_i)	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
Total						

a) A media de idades en 2006.

b) A mediana en 2006.

c) A moda en 2006.

d) O percorrido en 2006.

e) A desviación típica en 2006.

f) A media de idades actuais.

g) A mediana actual.

h) A moda actual.

i) O percorrido actual.

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

14 Probabilidade

INTRODUCIÓN

O estudo matemático da probabilidade xorde historicamente vinculado aos xogos de azar. Actualmente a probabilidade utilízase en moitas disciplinas unidas á Estatística: predición de riscos en seguros, estudos sobre a calidade de procesos industriais, etc.

As posibles dificultades da unidade son máis de tipo conceptual ca de procedementos, xa que os cálculos numéricos son moi sinxelos.

Débese incidir na correcta comprensión e aplicación dos conceptos da unidade: experimento aleatorio ou determinista, espazo mostral, suceso, operacións con sucesos, tipos de frecuencias, probabilidade e regra de Laplace.

A resolución dos exercicios da unidade permitiralles aos alumnos asimilar os diferentes conceptos. Faise fincapé no cálculo da probabilidade dun suceso, e na aplicación da regra de Laplace en contextos de equiprobabilidade.

Convén explicar a relación entre a frecuencia relativa e a probabilidade como outra forma de alcanzar probabilidades.

RESUMO DA UNIDADE

- *Experimento aleatorio*: repetido en igualdade de condicións non se coñece o resultado.
- *Suceso elemental*: cada un dos resultados posibles dun experimento aleatorio.
- *Suceso seguro*: verifícase sempre. *Suceso imposible*: nunca se verifica.
- *Sucesos compatibles*: verifícanse simultaneamente. *Sucesos incompatibles*: non poden ocorrer á vez.
- A *unión de dous sucesos* está formada por todos os sucesos elementais dos sucesos.
- A *intersección de dous sucesos* está formada polos sucesos elementais comúns.
- *Frecuencia absoluta* (f_i): número de veces que ocorre o suceso ao repetir o experimento aleatorio n veces. *Frecuencia relativa* (h_i): $h_i = \dfrac{f_i}{N}$.
- *Probabilidade dun suceso*: é un número entre 0 e 1 que mide a facilidade de ocorrencia dun suceso.
- Regra de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Distinguir entre experimento aleatorio e determinista.	• Experimento determinista. • Experimento aleatorio.	• Clasificación de experimentos.
2. Obter o espazo mostral dun experimento aleatorio.	• Espazo mostral. • Suceso elemental.	• Obtención do espazo mostral dun experimento aleatorio.
3. Obter os sucesos elementais, o suceso seguro e o suceso imposible dun experimento aleatorio.	• Suceso elemental. • Suceso seguro. • Suceso imposible.	• Obtención de sucesos elementais, suceso seguro e imposible dun experimento aleatorio.
4. Determinar o suceso unión e o suceso intersección de dous sucesos aleatorios. Sucesos compatibles e incompatibles e contrarios.	• Unión e intersección de sucesos. • Sucesos compatibles, incompatibles e contrarios.	• Cálculo da unión e da intersección de dous sucesos dados. • Cálculo de sucesos compatibles, incompatibles e contrarios.
5. Obter a frecuencia absoluta e relativa dun suceso.	• Frecuencia absoluta. • Frecuencia relativa.	• Obtención das frecuencias absolutas e relativas.
6. Calcular a probabilidade dun suceso.	• Probabilidade dun suceso. • Regra de Laplace.	• Utilización da regra de Laplace para calcular probabilidades.
7. Aplicar as propiedades da probabilidade.	• Suma de probabilidades. • Probabilidade do suceso seguro, imposible e contrario.	• Aplicación das propiedades da probabilidade para resolver problemas en contextos reais.

14 OBXECTIVO 1
DISTINGUIR ENTRE EXPERIMENTO ALEATORIO E DETERMINISTA

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Experimento determinista** é aquel que, unha vez estudado, podemos predicir, é dicir, que sabemos o que sucederá antes de que ocorra.

  Por exemplo:

  – Se pomos un recipiente con auga a quentar, sabemos que a auga ferve a 100 °C.

  – Se un coche que vai a 100 km/h tarda en facer un traxecto 2 horas, temos a certeza de que percorreu 200 km.

  Estes experimentos son deterministas.

- **Experimento aleatorio** é aquel cuxo resultado non se pode predicir, é dicir, que por moitas veces que repitamos o experimento en igualdade de condicións, non se coñece o resultado que se vai obter.

  A linguaxe utilizada para expresar experimentos aleatorios está relacionada con situacións de incerteza, xa que se trata de situacións de azar: «é máis probable, é igual de probable, é imposible, é pouco probable, é máis seguro, é improbable, é case seguro…».

  Por exemplo:

  – Se lanzamos un dado, non podemos predicir o número que sairá.

  – Cando sacamos unha bóla dunha caixa que contén bólas de diferentes cores, non podemos predicir a cor que obteremos.

1 **Clasifica os seguintes experimentos. No caso de que o experimento sexa aleatorio, escribe un posible resultado.**

EXPERIMENTO	DETERMINISTA	ALEATORIO	
Lanzar un dado		×	Sacar un 3
O resultado de dividir 10 entre 2	×		
Nunha caída libre de 5 metros, saber a velocidade que se alcanza			
Lanzar unha moeda ao aire			
Sacar unha carta dunha baralla española			
Saber a data de nacemento dunha persoa			
Sacar unha ficha vermella dunha caixa onde hai 20 fichas vermellas e 5 fichas azuis			
Lanzar un dado e obter unha puntuación maior ca 5			
Saber o resultado de elevar un número ao cadrado			
Coñecer o tempo que vai facer mañá			

OBTER O ESPAZO MOSTRAL DUN EXPERIMENTO ALEATORIO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- O **espazo mostral** é o conxunto formado por todos os resultados posibles dun experimento aleatorio. Represéntase por *E*.
- Cada un dos resultados posibles denomínase **suceso elemental**.

EXEMPLO

EXPERIMENTO	ESPAZO MOSTRAL	SUCESOS ELEMENTAIS
Lanzar unha moeda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (*c*) e cruz (*x*)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 e 6

1 **Considera un dado en forma de tetraedro.**

a) Cal é o espazo mostral do experimento?

b) Cales son os sucesos elementais do experimento aleatorio que consiste en tirar o dado?

2 **Cal é o espazo mostral dun experimento que consiste en sacar dúas bólas, sen introducir a que se saca, dunha urna que contén dúas bólas numeradas como 1 e 2?**

3 **Cal é o espazo mostral dun experimento que consiste en sacar tres bólas, sen introducir a que se saca, dunha urna que contén tres bólas numeradas do 1 ao 3?**

4 **Lánzanse dous dados e súmanse os puntos. Cantos resultados distintos se poden obter? Forma o espazo mostral.**

14 OBXECTIVO 3
OBTER OS SUCESOS ELEMENTAIS, SEGURO E IMPOSIBLE

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Un **suceso** está formado por un ou varios sucesos elementais.
- O **suceso seguro** está formado por todos os resultados posibles (sucesos elementais). Verifícase sempre.
- O **suceso imposible** non contén ningún suceso elemental. Nunca se verifica.

EXEMPLO

No experimento de lanzar un dado ao aire, un **suceso seguro** é obter un número menor ca 6 e un **suceso imposible** é obter o número 30.

1 **Cunha baralla de cartas española, realízase o experimento de sacar unha carta. Escribe os sucesos elementais que compón estes sucesos.**

a) Sacar ouros.
b) Sacar un 5.
c) Sacar figura.
d) Sacar bastos.

2 **Dadas oito cartas numeradas do 1 ao 8, realízase o experimento aleatorio de sacar unha carta. Escribe os sucesos elementais que compón os seguintes sucesos.**

a) Obter número par.
b) Obter múltiplo de 3.
c) Obter número maior ca 4.

3 **Destes experimentos, indica que sucesos son seguros e imposibles.**

EXPERIMENTO	SUCESO SEGURO	SUCESO IMPOSIBLE
Dunha baralla española de 40 cartas, sacar picas		
Nunha bolsa con 2 bólas vermellas e 3 verdes, obter unha bóla azul		
Nunha caixa con fichas numeradas do 1 ao 4, obter unha ficha cun número menor ca 5		
Ao lanzar un dado ao aire, saír un número maior ca 6		
Ao tirar dous dados ao aire e sumar a puntuación das súas caras, obter 0		
Ao tirar dous dados ao aire e sumar a puntuación das súas caras, saír 3		
Ao tirar dous dados ao aire e multiplicar a puntuación das súas caras, obter 40		

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

UNIÓN E INTERSECCIÓN. SUCESOS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Unha **operación entre sucesos** permítenos obter outro suceso do mesmo espazo mostral. As dúas operacións de sucesos máis importantes son a unión e a intersección.
- **Unión de sucesos:** a unión de dous sucesos *A* e *B* está formada polos elementos (sucesos elementais) do suceso *A* e do suceso *B*:

$$\boldsymbol{A \cup B = A \text{ unión } B}$$

- **Intersección de sucesos:** a intersección de dous sucesos *A* e *B* está formada polos elementos (sucesos elementais) comúns dos sucesos *A* e *B*:

$$\boldsymbol{A \cap B = A \text{ intersección } B}$$

- Se dous **sucesos** non teñen ningún suceso elemental en común, dise que son **incompatibles**:

$$\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$$

- Se dous **sucesos** teñen algún suceso elemental en común, dise que son **compatibles**:

$$\boldsymbol{A \cap B \neq \emptyset}$$

- Dado un suceso *A*, o **suceso contrario ou complementario**, $\overline{A}$, está formado polos sucesos elementais do espazo mostral que non están en *A*.

EXEMPLO

No experimento consistente en lanzar un dado, consideramos os sucesos:

$A =$ Obter número menor ca 4 $= \{1, 2, 3\}$

$B =$ Obter número impar $= \{1, 3, 5\}$

- Escribimos o suceso unión, formado por todos os sucesos elementais de *A* e *B*:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

- Escribimos o suceso intersección, formado por todos os sucesos elementais comúns de *A* e *B*:

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

- Escribimos o suceso contrario de *A*, formado por todos os sucesos elementais do espazo mostral do experimento que non están en *A*:

$$\overline{A} = \{4, 5, 6\}$$

- Escribimos o suceso contrario de *B*, formado por todos os sucesos elementais do espazo mostral do experimento que non están en *B*:

$$\overline{B} = \{2, 4, 6\}$$

Vemos que a unión dun suceso e o seu contrario é sempre o espazo mostral.

1 **Considera o experimento de lanzar un dado con oito caras numeradas do 1 ao 8 e os sucesos *A* = Saír puntuación par e *B* = Saír puntuación impar. Escribe o espazo mostral e obtén os seguintes sucesos.**

Espazo mostral: $E =$

a) $A \cup B =$

b) $A \cap B =$

c) $\overline{A} =$

d) $\overline{B} =$

e) $\overline{A} \cap B =$

f) $\overline{A} \cup B =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

2 **Dunha baralla española de 40 cartas extráese unha carta e considéranse os seguintes sucesos.**

A **= Saír ouros** ***B*** **= Saír un rei** ***C*** **= Saír un as** ***D*** **= Non saír ouros**

Sinala se os sucesos son compatibles, incompatibles ou contrarios.

SUCESO	COMPATIBILIDADE		CONTRARIOS
	COMPATIBLES	INCOMPATIBLES	
A e *B*			
A e *C*			
A e *D*			
B e *C*			

3 **Dunha baralla española de 40 cartas separamos os ases e os reis. Con este grupo de cartas realizamos o experimento de sacar dúas cartas.**

a) Escribe o espazo mostral.

b) Indica un suceso imposible deste experimento.

c) Como son os sucesos de sacar ouros e sacar rei?

d) Que sucesos compón a unión dos sucesos de sacar ouros e sacar rei?

e) Que sucesos elementais forman o suceso de sacar dous reis?

f) E o suceso de sacar ouros?

4 **Nunha caixa hai oito bólas, numeradas do 1 ao 8. Escribe un suceso compatible, outro incompatible e outro contrario destes sucesos.**

SUCESO	COMPATIBLE	INCOMPATIBLE	CONTRARIO
A = Sacar un número menor ca 4			
B = Sacar un número impar			
C = Sacar múltiplo de 2			
D = Sacar múltiplo de 7			

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

OBTER A FRECUENCIA ABSOLUTA E RELATIVA DUN SUCESO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Frecuencia absoluta (f_i)** dun suceso é o número de veces que ocorre o dito suceso cando se repite un experimento aleatorio *n* veces.
- **Frecuencia relativa (h_i)** dun suceso é o cociente entre a súa frecuencia absoluta e o número de veces que se repite o experimento: $h_i = \frac{f_i}{N}$.

EXEMPLO

Roberto lanzou un dado 50 veces e obtivo os resultados da táboa.

CARA	1	2	3	4	5	6	Suma
f_i	7	6	14	9	10	4	**50**
h_i	0,14	0,12	0,28	0,18	0,20	0,08	**1**

O número de veces que aparece cada cara é a súa frecuencia absoluta (f_i).

A frecuencia relativa obtémola dividindo a frecuencia absoluta entre o número de veces que se repite o experimento.

1 **Nun bombo hai dez bólas numeradas do 0 ao 9. Repítese 100 veces o experimento de extraer unha bóla e reemprazala a continuación. Os resultados obtidos exprésanse na táboa.**

BÓLA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	**100**
h_i											

a) Completa a táboa calculando as frecuencias relativas.

b) Considera os sucesos e calcula.

$A =$ múltiplo de 3, $B =$ número impar e $C =$ divisor de 6

- Frecuencia relativa de A, B e C:

  $A = \{3, 6, 9\}$ $\qquad h_A = h_3 + h_6 + h_9 =$

  $B =$

  $C =$

- Frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ e $A \cap C$:

  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $\qquad h_A = h_1 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_9 =$

  $A \cap B =$

  $A \cup C =$

  $A \cap C =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 Polinomios

INTRODUCIÓN

Son múltiples os contextos en que aparecen os polinomios: fórmulas económicas, químicas, físicas…, de aí a importancia de comprender o concepto de polinomio e outros asociados a el, como son: grao do polinomio, termo independente, polinomio reducido, polinomio completo, polinomio oposto e valor numérico dun polinomio.

Despois de comprender e practicar cada un destes conceptos estudarase como operar con polinomios: sumar, restar, multiplicar e dividir, aplicando o método máis axeitado en cada caso. Nas operacións con polinomios, as maiores dificultades poden xurdir na multiplicación (na colocación correcta dos termos de cada grao) e na división (na determinación de cada termo do cociente e na resta dos produtos obtidos).

É importante que os alumnos aprendan a deducir por si mesmos o desenvolvemento das fórmulas das igualdades notables: cadrado dunha suma, cadrado dunha diferenza e produto dunha suma por unha diferenza.

RESUMO DA UNIDADE

- Un *polinomio* é unha expresión alxébrica formada pola suma de varios monomios, que son os *termos* do polinomio.
- O *grao* dun polinomio reducido é o do termo de maior grao.
- O *valor numérico dun polinomio*, para certo valor da variable $x = a$, obtense substituíndo x por a e operando.
- A *suma de dous polinomios* calcúlase sumando os termos semellantes de ambos.
- A *resta de dous polinomios* calcúlase sumándolle ao primeiro o oposto do segundo.
- O *produto de dous polinomios* calcúlase multiplicando cada un dos monomios dun deles por todos os monomios do outro, e sumando despois os polinomios obtidos.
- *División de polinomios:* $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
- Igualdades notables:
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Recoñecer o grao, o termo e os coeficientes dun polinomio.	• Grao, termo independente e coeficientes dun polinomio. • Polinomio ordenado. • Polinomio reducido. • Polinomio completo.	• Identificación do grao, do termo independente e dos coeficientes dun polinomio. • Redución de polinomios. • Ordenación dos termos dun polinomio. • Distinción de polinomios completos e incompletos.
2. Determinar o valor numérico dun polinomio.	• Valor numérico dun polinomio.	• Cálculo do valor numérico dun polinomio.
3. Realizar sumas e restas con polinomios.	• Suma e resta de polinomios.	• Suma e resta de polinomios.
4. Realizar multiplicacións con polinomios.	• Multiplicación de polinomios.	• Multiplicación de polinomios: aplicar a propiedade distributiva.
5. Realizar divisións con polinomios.	• División de polinomios: dividendo, divisor, cociente e resto.	• División de polinomios: divisións enteiras ou exactas. • Comprobación das divisións.
6. Identificar e desenvolver igualdades notables.	• Cadrado dunha suma. • Cadrado dunha diferenza. • Produto dunha suma por unha diferenza.	• Identificación e desenvolvemento de igualdades notables.

3 OBXECTIVO 1
RECOÑECER O GRAO, O TERMO E OS COEFICIENTES DUN POLINOMIO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Un **polinomio** é unha expresión alxébrica formada pola suma de monomios, que son os **termos** do polinomio.
- Un polinomio é **reducido** cando non ten monomios semellantes.
- O **grao** dun polinomio reducido coincide co grao do seu termo de maior grao.
- Un polinomio é **completo** cando ten termos de todos os graos inferiores ao grao do polinomio. En caso contrario, é **incompleto**.

EXEMPLO

Dado o polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén o polinomio reducido.

b) Determina o grao do polinomio.

c) Cantos termos ten o polinomio? Cal é o seu termo independente?

d) É un polinomio completo? Se o polinomio é incompleto, di o termo que falta.

a) Para reducir un polinomio hai que resolver as operacións que se poidan:

$$P(x) = 5x^2 - \underbrace{3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2 \longrightarrow \text{Polinomio reducido}$$

b) O grao do polinomio é 2: $P(x) = 5x^{2} - x - 2$.

c) O polinomio ten tres termos e -2 é o termo independente.

$$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2} \longrightarrow -2 \text{ é o termo independente.}$$

$$\longrightarrow \text{Ten tres termos.}$$

d) $P(x) = \underset{2}{\underline{5x^2}} - \underset{1}{\underline{x}} - \underset{0}{\underline{2}}$ é un polinomio completo.
Grao

EXEMPLO

É $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo ou incompleto?

$Q(x) = \underset{3}{\underline{7x^3}} + \underset{2}{\underline{2x^2}} + \underset{0}{\underline{3}}$ É un polinomio incompleto, pois non ten termo de grao 1.
Grao

1 **Calcula o polinomio reducido.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

2 **Calcula o polinomio reducido e ordena os seus termos de maior a menor grao.**

$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$

$P(x) =$ _____

- Ten ..... termos.
- O termo independente é .....
- O grao do polinomio é .....
- Como é o polinomio, completo ou incompleto? .....

3 **Reduce o polinomio e ordena os seus termos de maior a menor grao.**

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$

$P(x) =$ _____

- Ten ..... termos.
- O termo independente é .....
- O grao do polinomio é .....
- Como é o polinomio, completo ou incompleto? .....

4 **Sinala se os seguintes polinomios son completos ou incompletos. Completa a táboa.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTA O TERMO
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado o polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica.**

a) Se é ou non ordenado.
b) Se é ou non reducido.
c) Se é ou non completo.
d) O seu grao.
e) O seu termo independente.

3 OBXECTIVO 2
DETERMINAR O VALOR NUMÉRICO DUN POLINOMIO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

O **valor numérico** dun polinomio $P(x)$, para certo valor da variable $x = a$, obtense substituíndo x por a e operando.

EXEMPLO

Nun polinomio, por exemplo, $P(x) = 2x^2 + 1$, pódeselle dar calquera valor ao x.

Para $x = 2 \longrightarrow P(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

O valor numérico do polinomio para $x = 2$ é 9.

Para $x = 10 \rightarrow P(10) = 2 \cdot (10)^2 + 1 = 2 \cdot 100 + 1 = 200 + 1 = 201$

O valor numérico do polinomio para $x = 10$ é 201.

1 **Calcula o valor numérico dos seguintes polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$

$x = 1 \rightarrow P(\ \ ) = (\ \ ) + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Calcula o valor numérico de cada polinomio para o valor da variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$.

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$.

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$.

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$.

REALIZAR SUMAS E RESTAS CON POLINOMIOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- A **suma** de dous polinomios calcúlase sumando os termos semellantes de ambos.
- A **resta** de dous polinomios obtense sumando o primeiro co polinomio oposto do segundo.
- Lembra que a regra básica das sumas e das restas de polinomios é que **só se poden sumar e restar os termos semellantes**.

EXEMPLO

Suma os seguintes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ e $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$.

Pódese realizar de dous xeitos:

- **En liña:** só se suman os elementos iguais.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 \boxed{-2x^2} \boxed{+5x} \boxed{-3} \boxed{+4x^2} \boxed{-3x} \boxed{+2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hai que pór en columna os termos semellantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + \; Q(x) = & \; 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EXEMPLO

Resta os seguintes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ e $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$.

Pódese realizar de dous xeitos:

- **En liña:** o signo negativo diante da paréntese aféctalles a todos os termos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5 - (5x^2 - 2x + 7) =$$

$$= 3x^3 \boxed{-5x^2} \boxed{+5} \boxed{-5x^2} + 2x \boxed{-7} = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hai que pór en columna os termos semellantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - \; 5x^2 \qquad + 5 \\ - \; Q(x) = & \; - \; (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados os polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ e $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, calcula $P(x) + Q(x)$ e $P(x) - Q(x)$, resolvendo as operacións en liña e en columna.**

2 **Calcula a suma e a resta de cada par de polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ +\ Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ -\ Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ +\ Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ -\ Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ +\ Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ -\ Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ +\ Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ -\ Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ +\ Q(x) = \\ \hline P(x) + Q(x) = \end{array}$$

$Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$$\begin{array}{r} P(x) = \\ -\ Q(x) = \\ \hline P(x) - Q(x) = \end{array}$$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

REALIZAR MULTIPLICACIÓNS CON POLINOMIOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- O **produto** de dous polinomios calcúlase multiplicando cada un dos monomios dun polinomio polos monomios do outro, e sumando, despois, os polinomios obtidos nesas multiplicacións.
- Para multiplicar dous polinomios cómpre aplicar a **propiedade distributiva**.

EXEMPLO

Multiplica os seguintes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ e $Q(x) = x^2 + 3$.

Imos resolvelo multiplicando en liña:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Multiplícanse todos os monomios dun polinomio polos monomios do outro polinomio.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3} \boxed{+ 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3} \boxed{+ x \cdot x^2 + x \cdot 3} \boxed{- 7 \cdot x^2 - 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 =$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Súmanse os termos semellantes.

$$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

1 **Multiplica os seguintes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ e $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplicamos os monomios.

$$= \boxed{} \boxed{- } \boxed{+ }$$

$$=$$

Sumamos os termos semellantes.

$$P(x) \cdot Q(x) =$$

b) $P(x) = x^3 - 1$ e $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

EXEMPLO

Multiplica os seguintes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ e $Q(x) = x^2 + 3$.

Resolvemos o exercicio multiplicando en columna:

$$
\begin{array}{rl}
 & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
 & 7x^5 + 2x^4 + x^3 - 7x^2 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21
\end{array}
$$

← *Produto de 3 por $7x^3 + 2x^2 + x - 7$*

← *Produto de x^2 por $7x^3 + 2x^2 + x - 7$*

← *Suma de monomios semellantes*

2 **Multiplica os polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ e $Q(x) = 3x + 2$.**

$$
\begin{array}{rl}
 & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times & 3x + 2 \\
\hline
 & \\
 & \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & \boxed{}
\end{array}
$$

← *Produto de 2 por $5x^2 - 3x + 4$*

← *Produto de $3x$ por $5x^2 - 3x + 4$*

← *Suma de monomios semellantes*

3 **Calcula o produto do polinomio $R(x) = x^3 - 1$ e o monomio $S(x) = x + 3$, utilizando a propiedade distributiva.**

4 **Calcula o produto dos seguintes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ e $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ e $S(x) = x^2 + 1$

REALIZAR DIVISIÓNS CON POLINOMIOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- O primeiro que hai que ter en conta para dividir os polinomios $P(x)$ e $Q(x)$ é que o grao do polinomio $P(x)$ debe ser maior ou igual ca o do polinomio $Q(x)$.
- Nestas condicións, dados dous polinomios $P(x)$ e $Q(x)$, existen outros dous polinomios $C(x)$ e $R(x)$ que cumpren:

  $$\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$$

  $\boldsymbol{P(x)}$ é o polinomio **dividendo**.

  $\boldsymbol{Q(x)}$ é o polinomio **divisor**.

  $\boldsymbol{C(x)}$ é o polinomio **cociente**.

  $\boldsymbol{R(x)}$ é o polinomio **resto**.
- Se o resto da división é nulo, é dicir, se $R(x) = 0$:
  - A **división** é **exacta**.
  - O polinomio $\boldsymbol{P(x)}$ **é divisible por** $\boldsymbol{Q(x)}$.
- En caso contrario, dise que a división non é exacta.

EXEMPLO

Divide os seguintes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ e $Q(x) = x^2 + 5$.

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\ \hline \quad \bigcirc \end{array}$$

Hai que elixir un monomio que multiplicado por x^2 dea $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. *Neste caso,* $\bigcirc = 5x$.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{5x^3} & +3x^2 & +5x & -7 & x^2 + 5 \\ \hline -\cancel{5x^3} & & -25x & & 5x + 3 \\ \hline & 3x^2 & -20x & -7 & \end{array}$$

Multiplicamos $5x$ por cada un dos termos do polinomio cociente ($x^2 + 5$), cambiamos de signo os resultados e colocámolos na súa columna. A continuación, sumamos.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{5x^3} & +3x^2 & +5x & -7 & x^2 + 5 \\ \hline -\cancel{5x^3} & & -25x & & 5x + 3 \\ \hline & \cancel{3x^2} & -20x & -7 & \\ & -\cancel{3x^2} & & -15 & \\ \hline & & -20x & -22 & \end{array}$$

Hai que buscar un monomio que multiplicado por x^2 dea $3x^2$, neste caso 3.

Multiplicamos 3 por $x^2 + 5$, cambiamos de signo os resultados e colocámolos na súa columna. A continuación, sumamos.

Hai que buscar un monomio que multiplicado por x^2 dea $20x$, pero non existe ningún. Polo tanto, a división finaliza.

Polinomio dividendo: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$

Polinomio divisor: $Q(x) = x^2 + 5$

Polinomio cociente: $C(x) = 5x + 3$

Polinomio resto: $R(x) = -20x - 22$

Neste caso, a división non é exacta, xa que o resto obtido é distinto de cero.

3

1 **Calcula as divisións de polinomios e sinala se son exactas ou enteiras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Fai as divisións e comproba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

IDENTIFICAR E DESENVOLVER IGUALDADES NOTABLES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

CADRADO DUNHA SUMA

- O cadrado dunha suma é igual ao cadrado do primeiro, máis o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

- Isto pódese facer coma unha multiplicación normal:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

EXEMPLO

$\boldsymbol{(x+3)^2} = (x+3)\cdot(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$\boldsymbol{(4x+y)^2} = (4x+y)\cdot(4x+y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desenvolve estas igualdades.**

a) $(x+2y)^2 = (x+2y)\cdot(x+2y) =$

b) $(3x^3+3)^2 =$

c) $(2x+3y)^2 =$

d) $(4a+b^2)^2 =$

CADRADO DUNHA DIFERENZA

- O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

- Isto pódese facer coma unha multiplicación normal:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b - a\cdot b + b\cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

EXEMPLO

$\boldsymbol{(2y-3)^2} = (2y-3)\cdot(2y-3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$\boldsymbol{(x^2-2)} = (x^2-2)\cdot(x^2-2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desenvolve as seguintes igualdades.**

a) $(6x-4y)^2 = (6x-4y)\cdot(6x-4y) =$

b) $(5x^4-2)^2 =$

c) $(2x-3y)^2 =$

d) $(4x^3-a^2)^2 =$

PRODUTO DUNHA SUMA POR UNHA DIFERENZA

- O produto dunha suma por unha diferenza é igual ao cadrado do primeiro menos o cadrado do segundo.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Isto pódese facer coma unha multiplicación normal:

$$(a + b)^2 \cdot (a - b) = a \cdot a - \cancel{a \cdot b} + \cancel{a \cdot b} + b \cdot b = a^2 - b^2$$

EXEMPLO

$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desenvolve as seguintes igualdades.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desenvolve.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desenvolve as igualdades.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$

4 Ecuacións de primeiro e segundo grao

INTRODUCIÓN

A unidade comeza diferenciando entre ecuacións e identidades, para pasar despois á exposición dos conceptos asociados ao de ecuación.

Para resolver ecuacións de primeiro grao aprenderase a transpor termos. É importante que os alumnos comprendan que as regras da suma e do produto son transformacións que permiten pasar dunha ecuación inicial, complexa na súa expresión, a outra máis sinxela.

Os alumnos deben aprender a identificar unha ecuación de segundo grao. Convén mostrar a utilidade da fórmula xeral para calcular as solucións de calquera ecuación de segundo grao empregando só os seus coeficientes.

RESUMO DA UNIDADE

- Unha *ecuación* é unha igualdade alxébrica que só é certa para algúns valores.
- *Incógnita dunha ecuación* é a letra de valor descoñecido.
- *Grao dunha ecuación* é o maior expoñente da incógnita.
- *Solución ou solucións dunha ecuación*: valores da incógnita que fan certa a igualdade.
- Para *resolver ecuacións* aplícanse as regras da suma e do produto.
- Ecuación de primeiro grao: $ax = b$.
- Ecuación de segundo grao: $ax^2 + bx + c = 0$. a, b, c: números reais; $a \neq 0$.

OBXECTIVOS	CONTIDOS	PROCEDEMENTOS
1. Identificar unha ecuación, o seu grao e a súa solución.	• A ecuación como igualdade. • Elementos dunha ecuación: incógnita, coeficiente, membros, termos e grao.	• Identificación do grao dunha ecuación. • Comprobación de se un número é solución dunha ecuación.
2. Resolver ecuacións.	• Transposición de termos. • Resolución de ecuacións.	• Resolución de ecuacións de primeiro grao por transposición de termos.
3. Resolver ecuacións con parénteses e denominadores.	• Eliminación de parénteses. • Eliminación de denominadores. • Resolución de ecuacións.	• Resolución de ecuacións de primeiro grao con parénteses e denominadores. • Aplicación correcta da xerarquía das operacións. • Comprobación da solución dunha ecuación.
4. Resolver ecuacións de segundo grao.	• Ecuación de segundo grao completa. • Solución xeral.	• Identificación dunha ecuación de segundo grao. • Resolución de ecuacións de segundo grao. • Aplicación correcta da xerarquía das operacións. • Comprobación da solución dunha ecuación.
5. Resolver problemas mediante ecuacións.	• Formulación e resolución de problemas mediante ecuacións de primeiro e de segundo grao.	• Formulación e resolución de problemas mediante ecuacións de primeiro e segundo grao.

4 OBXECTIVO 1
IDENTIFICAR UNHA ECUACIÓN, O SEU GRAO E A SÚA SOLUCIÓN

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Dado o polinomio $P(x) = 3x + 5$, xa sabemos como se calcula o seu valor numérico:

  $x = 3 \longrightarrow P(3) = 3 \cdot 3 + 5 = 14$

  $x = -2 \longrightarrow P(-2) = 3 \cdot (-2) + 5 = -1$

  Se ao polinomio lle impomos un valor como resultado, obtemos unha **ecuación**:

  $3x + 5 = 8$ Hai que saber para que valor de x o polinomio vale 8.
- Podemos seguir o mesmo razoamento coa igualdade de dous polinomios:

  $P(x) = 3x^2 + 2x - 7$ $Q(x) = 2x + 8$

  Se impomos a condición de igualdade entre os dous polinomios, tamén se obtén unha ecuación:

  $3x^2 + 2x - 7 = 2x + 8$ Hai que saber para que valor de x se cumpre esta igualdade.

  polo tanto, o concepto de ecuación aparece cando se impón unha igualdade alxébrica.

Nunha ecuación cunha soa incógnita:

- A **incógnita** é a letra con valor descoñecido.
- O **grao** é o maior expoñente con que figura a incógnita na ecuación, unha vez realizadas todas as operacións.
- A parte esquerda da igualdade chámase **primeiro membro**, e a parte dereita, **segundo membro**.
- Cada membro está formado por un ou máis sumandos que se chaman **termos**.
- Nos termos con incógnita, o número chámase **coeficiente**. Os termos sen incógnita denomínanse **termos independentes**.
- A **solución** ou solucións dunha ecuación son os valores da incógnita que fan que a igualdade sexa certa.

EXEMPLO

Elementos dunha ecuación:

$$\underbrace{\underbrace{3x}_{\text{termo}} + \underbrace{7(x-1)}_{\text{termo}}}_{1.^{\circ}\text{ membro}} = \underbrace{\underbrace{2x}_{\text{termo}} + \underbrace{5}_{\text{termo}}}_{2.^{\circ}\text{ membro}}$$

x: incógnita

coeficientes: 3, 7, 2

EXEMPLO

Grao dunha ecuación:

$2x - 8 = 7 \rightarrow$ Primeiro grao

$(x - 5) \cdot (x - 2) = 1 \xrightarrow[\text{Operando}]{} x^2 - 7x + 10 = 1 \rightarrow$ Segundo grao

1 **Sinala o grao das seguintes ecuacións.**

a) $5x + 6 = x^2 + 4$ b) $x^2 + x - 1 = x^2 - 2x$ c) $7(x - 1) = 4(x - 2) - 3(-x - 5)$

2 **Cal dos números é solución da ecuación $5x - 9 = 4(x - 5)$?**

a) 4 b) -3 c) 14 d) -11

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

RESOLVER ECUACIÓNS. TRANSPOSICIÓN DE TERMOS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- **Resolver unha ecuación** é obter o valor da incógnita que cumpre a ecuación.
- Para iso emprégase a **transposición de termos**, pasando todos os termos con x a un membro e todos os números ao outro. Débense ter en conta as seguintes regras.
  - **Regra da suma:** un termo que está sumando nun membro da ecuación pasa ao outro membro restando, e se está restando, pasará sumando.
  - **Regra do produto:** un termo que está multiplicando nun membro da ecuación pasa ao outro membro dividindo, e se está dividindo, pasará multiplicando.

EXEMPLO

Resolve a ecuación por transposición: $6x + 8 = 3x - 4$.

- Se restamos -8 nos dous membros, eliminamos o termo $+8$ do primeiro membro.
  Isto equivale a pasar directamente o termo -8 ao segundo membro como $+8$.
- Igualmente, para eliminar $3x$ do segundo membro pasámolo ao primeiro como $-3x$.
- Operamos e, na ecuación obtida, $3x = -12$, pasamos o 3, que está multiplicando no primeiro membro, dividindo ao segundo membro.

$$\boxed{6x + 8 = 3x - 4}$$

$$6x + 8 = 3x - 4$$

$$6x - 3x = -4 - 8$$

$$3x = -12$$

$$x = \frac{-12}{3} = -4$$

1 **Resolve as seguintes ecuacións.**

a) $3x + 8 = 5x + 2$

b) $3x - 5 = 2x + 4 + x - 9$

c) $9x - 11 = 4x + 6 + 5x + 5$

d) $4x - 5 = 3x - x + x - 5$

e) $2x + 5 = 2 + 4x + 3$

f) $6x + 2x + 4 = 3x + 3 - 5x - 9$

4 OBXECTIVO 3
RESOLVER ECUACIÓNS CON PARÉNTESES E DENOMINADORES

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

ECUACIÓNS CON PARÉNTESES

Para eliminar as paréntese dunha ecuación:

- Se a paréntese vai precedida do signo $+$, déixanse os termos do seu interior tal e como aparecen.

$$x + (2x - 3 + x^2) = x + 2x - 3 + x^2$$

- Se a paréntese vai precedida do signo $-$, cámbiase o signo de todos os termos do seu interior.

$$x - (2x - 3 + x^2) = x - 2x + 3 - x^2$$

EXEMPLO

Resolve a ecuación. $\mathbf{3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2}$

a) Quitamos a paréntese: $3x + 15 - 7x + 1 = 2x - 2$

b) Reducimos termos semellantes: $-4x + 16 = 2x - 2$

c) Transpomos termos: $16 + 2 = 2x + 4x \rightarrow 18 = 6x$

d) Despexamos o x: $\frac{18}{6} = x \rightarrow 3 = x$

e) Comprobamos a solución: $3(x + 5) - 7x + 1 = 2x - 2$

Se $x = z \rightarrow 3(3 + 5) - 7 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 3 - 2$

$3 \cdot 8 - 21 + 1 = 6 - 2$

$24 - 21 + 1 = 4$

$4 = 4$

A solución é correcta, porque o resultado é o mesmo número en ambos os membros.

1 **Resolve a ecuación: $4[(x + 2) \cdot 4 - 7] = 10x - 8$.**

a) Quitamos a paréntese.

b) Reducimos termos semellantes.

c) Transpomos termos.

d) Despexamos o x.

e) Comprobamos a solución.

A solución é correcta se o resultado final é o mesmo número en ambos os membros.

ECUACIÓNS CON DENOMINADORES

Para **eliminar os denominadores** dunha ecuación hai que calcular o mínimo común múltiplo (m.c.m.) dos denominadores e multiplicar os dous membros da ecuación por ese número.

EXEMPLO

Resolve a ecuación. $$\frac{7x-3}{2} - 7 = \frac{x+7}{5}$$

a) Calculamos o m.c.m.: $\text{m.c.m. } (2, 5) = 10$

b) Multiplicamos a ecuación por 10: $$\frac{10}{2}(7x-3) - 10 \cdot 7 = \frac{10}{5}(x+7)$$

$$5(7x-3) - 10 \cdot 7 = 2(x+7)$$

c) Quitamos as parénteses: $35x - 15 - 70 = 2x + 14$

d) Reducimos termos semellantes: $35x - 85 = 2x + 14$

e) Transpomos termos: $35x - 2x = 14 + 85 \rightarrow 33x = 99$

f) Despexamos o x: $x = \frac{99}{33} = 3$

g) Comprobamos a solución: $$\frac{7x-3}{3} - 7 = \frac{x+7}{5}$$

$$\text{Se } x = 3 \rightarrow \frac{7 \cdot 3 - 3}{2} - 7 = \frac{3+7}{5}$$

$$\frac{18}{2} - 7 = \frac{10}{5}$$

$$9 - 7 = 2 \rightarrow 2 = 2$$

2 **Resolve a seguinte ecuación:** $\frac{3x+1}{2} - 3 = \frac{2(x+1)}{3}$.

a) Calculamos o m.c.m.

b) Multiplicamos a ecuación polo m.c.m.

c) Quitamos a paréntese.

d) Reducimos termos semellantes.

e) Transpomos termos.

f) Despexamos o x.

g) Comprobamos a solución.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

3 **Resolve as ecuacións e comproba a solución.**

a) $3(x-2)-(2x-1)=0$

b) $4(x-3)-5(x+8)=6(x+3)-2$

c) $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{x}{2}$

d) $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+4(2x-1)=\dfrac{x+4}{7}+2(x+4)$

RESOLVER ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

- Unha **ecuación de segundo grao** cunha incógnita é unha ecuación que se expresa da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b, c: números reais; $a \neq 0$

- A **fórmula xeral** para resolver unha ecuación de segundo grao é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLO

Resolve a ecuación. $\boldsymbol{x(x+3) - 2(x+1) = 4}$

a) Quitamos as parénteses: $x^2 + 3x - 2x - 2 = 4$

b) Reducimos termos semellantes: $x^2 + x - 2 = 4$

c) Como é unha ecuación de 2.º grao, pasamos todos os termos a un membro: $x^2 + x - 6 = 0$

d) Aplicamos a fórmula xeral. Para iso identificamos os termos:

$$\left.\begin{array}{r} ax^2 + bx + c = 0 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1 \text{ e } c = -6$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \longrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \longrightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \longrightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

e) Comprobamos as solucións:

$$\text{Se } x_1 = 2 \longrightarrow \begin{array}{r} x(x+3) - 2(x+1) = 4 \\ 2(2+3) - 2(2+1) = 4 \\ 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4 \\ 10 - 6 = 4 \\ 4 = 4 \end{array}$$

$$\text{Se } x_2 = -3 \longrightarrow \begin{array}{r} x(x+3) - 2(x+1) = 4 \\ -3(-3+3) - 2(-3+1) = 4 \\ -3 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) = 4 \\ 0 + 4 = 4 \\ 4 = 4 \end{array}$$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

1 **Resolve a seguinte ecuación: $(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$.**

$(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$

Quitamos as parénteses: $\square+\square-\square-\square=\square-\square-3x$

Como é unha ecuación de 2.º grao, pasamos todo a un membro: $=0$

Operamos: $\boxed{2x^2+x-2=0} \rightarrow a=2,\ b=1$ e $c=-2$

Utilizamos a fórmula: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(\quad)+(\quad)}}{4}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{(\quad)}}{4}$$

$$x=\frac{-1\pm(\quad)}{4} \begin{cases} x_1= \\ x_2= \end{cases}$$

Comprobamos se as solucións son correctas:

$(x+1)x-2(x+1)=x(1-x)-3x$

Se $x_1=\square \rightarrow (\square+1)\square-2(\square+1)=\square(1-\square)-3\square$

$=$

$=$

$\boxed{\qquad=\qquad}$ polo tanto, $x_1=\square$ é solución.

Se $x_2=\square \rightarrow (\square+1)\square-2(\square+1)=\square(1-\square)-3\square$

$=$

$=$

$\boxed{\qquad=\qquad}$ polo tanto, $x_2=\square$ tamén é solución.

2 **Resolve a ecuación: $x(x-2)+2x=4$.**

3 **Resolve as seguintes ecuacións.**

a) $x^2-4x+3=0$

$x_1=$ $x_2=$

Comprobamos o resultado:

b) $2x^2-20x+50=0$

$x_1=$ $x_2=$

Comprobamos o resultado:

RESOLVER PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIÓNS

NOME: _____ CURSO: _____ DATA: _____

Lembra os catro pasos que debes dar para resolver un problema correctamente:

a) **Ler** detidamente o enunciado.
b) **Formular** o problema.
c) **Resolver** o problema.
d) **Comprobar** o resultado.

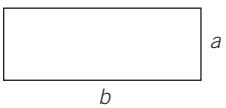
EXEMPLO

O perímetro dunha parcela rectangular é de 90 metros e mide 5 metros máis de longo ca de largo. Cales son as súas dimensións?

Lembramos antes de empezar dúas fórmulas básicas:

Área do rectángulo $= b \cdot a$

Perímetro do rectángulo $= 2a + 2b$



a) Ler detidamente o enunciado (pode ser útil realizar un debuxo básico ou esquema).

b) Formular o problema: Se o lado menor é x, cal será o lado maior se é 5 metros más longo ca o menor?

O lado maior será $x + 5$.

polo tanto: $x \longrightarrow$ lado menor da parcela

$x + 5 \rightarrow$ lado maior da parcela

Como o perímetro da parcela mide 90 metros $\rightarrow 2x + 2(x + 5) = 90$

c) Resolver a ecuación: $2x + 2x + 10 = 90 \rightarrow 4x = 80 \rightarrow x = 20$

Lado menor: 20 metros Lado maior: $20 + 5 = 25$ metros

d) Comprobar a solución:

$$2x + 2(x + 5) = 90 \xrightarrow{x = 20} 2 \cdot 20 + 2 \cdot (20 + 5) = 90 \rightarrow 40 + 2 \cdot 25 = 90 \rightarrow 90 = 90$$

1 **Miguel ten agora catro anos máis ca seu curmán Antón e, dentro de tres anos, entre os dous sumarán 20 anos. Cantos anos ten cada un?**

a) Le ao xeito o enunciado.

b) Formula o problema, organizando a información.

	HOXE		DENTRO DE 3 ANOS
Miguel ten	$x + 4$ anos	$+ 3$ anos $\longrightarrow$	$x + 4 + 3$
Antón ten	x anos	$+ 3$ anos $\longrightarrow$	( )
	↓		↓
	A suma de ambos os números é 20 $\longrightarrow$		[ ]

c) Resolve o problema.

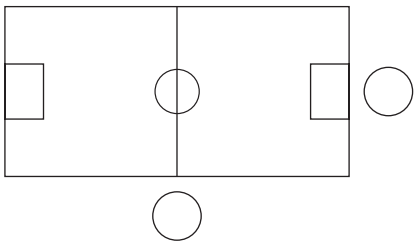
d) Comproba o resultado.

 MATERIAL FOTOCOPIABLE © EDICIÓNS OBRADOIRO, S. A. / SANTILLANA EDUCACIÓN, S. L. ■

2 **Un campo de fútbol mide 30 metros máis de longo ca de largo e a súa área é 7.000 m^2. Calcula as súas dimensións.**

a) Le detidamente o problema.

b) Formula a ecuación.



A súa área é 7.000 m^2 ⟶ [ ] = 7.000

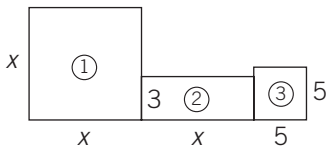
c) Resolve a ecuación.

d) Comproba o resultado.

3 **Calcula o valor de *x* sabendo que a área total da figura é 53.**

a) Le detidamente o problema.

b) Formula a ecuación.



Área 1 [ ] Área 2 [ ] Área 3 [ ] As tres áreas suman 53.

c) Resolve a ecuación.

d) Comproba o resultado.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

4 **Un pai cédelle a un fillo $\frac{1}{5}$ do seu capital, a outro $\frac{1}{4}$ e a un terceiro fillo dálle o resto, que son 19.800 €. Cal era o seu capital?**

5 **Se á miña idade lle resto o cadrado da súa quinta parte resultan 6 anos. Que idade teño?**

6 **Calcula dous números consecutivos, tales que engadíndolle ao cadrado do maior a metade do menor resulta 27.**

7 **María dille a Daniel: «Se ao cadrado da miña idade lle resto oito veces a miña idade, o resultado é o triplo da idade que ti tes». Se a idade de Daniel é 16 anos, cal é a idade de María?**