4. DISCONTINUIDADES

Recuerda: Si una función **f** está definida en un entorno de un punto, entonces

$$\boxed{\textbf{f es continua en } x=a \iff \lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

> **Una función es discontinua en un punto cuando no existe límite en él o, existiendo, no coincide con el valor de la función en el mismo.**

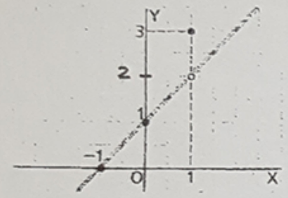
La clasificación de las discontinuidades en un punto se basa en la existencia o no de los **límites laterales** en el mismo.

▶ Discontinuidad evitable

Consideremos la función definida de la siguiente forma:

Ej:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ 3 & \text{si } x=1 \end{cases}$$

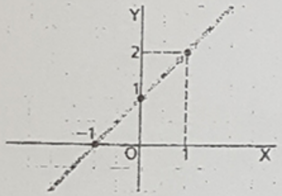


f discontinua en $x=1$.

Esta función es continua en todos los puntos distintos de $x=1$. Veamos qué sucede en $x=1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\ (x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Puesto que $f(1)=3$ y el límite en ese punto es 2, la función es discontinua. Ahora bien si en vez de $f(1)=3$ hubiéramos tomado $f(1)=2$, la función f sería continua en toda la recta real. En este sentido decimos que la **discontinuidad es evitable.**



f continua en $x=1$.

$f(1)=2$ es el verdadero valor de la función en el punto $x=1$.

> **Una función tiene una <u>discontinuidad evitable</u> en un punto cuando existe límite en él y no coincide con el valor de la función en el mismo o no está definida.**
>
> **El valor que deberíamos dar a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama <u>verdadero valor</u> de la función en el mismo.**

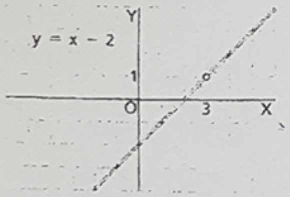
1. ¿Cuál es el verdadero valor de la función $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$ en $x=3$?

Ej:

El verdadero valor es el límite de la función f(x) en $x=3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)\ (x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=1$$

Por tanto, el valor que debe tomar la función en el punto $x=3$ es $f(3)=1$, ya que de ese modo es continua en él.



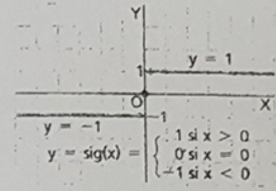
Recta agujereada. f(x) es continua si se toma $f(3)=1$.

▶ Discontinuidad inevitable

Consideremos la función signo de **x** definida por:

Ej:

$$\text{sig}\ (x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$



La función es continua en los puntos $x<0$ y $x>0$ ya que la gráfica se compone de dos semirrectas. ¿Qué sucede en $x=0$? Los límites laterales son

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$$

Puesto que estos límites son distintos no puede atribuirse a la función ningún valor en $x=0$ para que sea continua. Diremos que se trata de una discontinuidad inevitable.

> **Una función tiene una <u>discontinuidad inevitable</u> en un punto cuando existen los límites laterales en él y son distintos.**
>
> **Si f es discontinua en el punto $x=a$, el valor**
>
> $$\left|\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)\right|$$
>
> **se llama <u>salto de la función</u> en ese punto, y puede ser finito, si es un número real, o infinito.**

Observa las siguientes funciones:

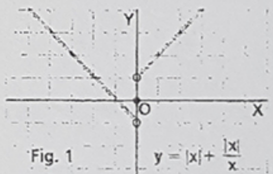


Fig. 1

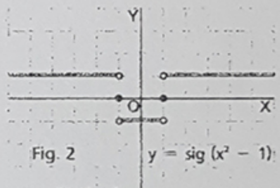


Fig. 2

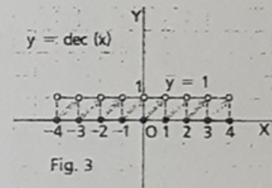


Fig. 3

Ej:

Fig. 1 Discontinuidad inevitable en $x=0$. Salto 2.

Fig. 2 Discontinuidades inevitables en $x=-1$ y $x=1$. Salto 2.

Fig. 3 Discontinuidad inevitable en todos los puntos de abscisa entera. Salto 1 en cada punto.

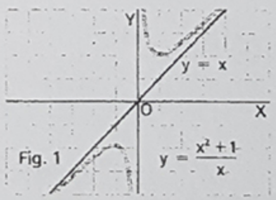


Fig. 1

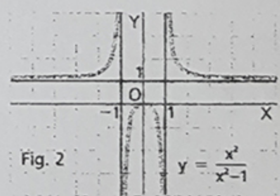


Fig. 2

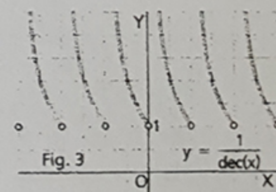


Fig. 3

Ej:

Fig. 1 Discontinuidad inevitable en $x=0$. Salto infinito.

Fig. 2 Discontinuidades inevitables en $x=-1$ y $x=1$. Salto infinito.

Fig. 3 Discontinuidades inevitables en todos los puntos de abscisa entera. Salto infinito.