27.45 Calcula $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}$

Respuesta: 0

Solución

Si sustituyes la ***x*** por 4, compruebas que en el numerador y el denominador son iguales a 0, es decir, te queda la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Antes de tomar límites debes eliminar lo que provoca la indeterminación.

Haciendo las operaciones:

$$\frac{x^2-8x+16}{x-4}=\frac{(x-4)^2}{(x-4)}=\frac{\cancel{(x-4)}(x-4)}{\cancel{(x-4)}}=(x-4)$$

Ahora tomas límites: $\lim_{x\to 4}(x-4)=4-4=0$

27.46 Calcula $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3}{x-1}$

AulaFacil.com

Funciones racionales con polinomios

Descomponemos en factores y simplificamos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}=\frac{0}{0}\ \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6}{x+5}=\frac{-2}{7}$$

Funciones racionales con raices

Multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}=\frac{0}{0}\ \text{Indeterminación}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x\,(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

INDETERMINACIÓN: $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

Cuando solo aparecen funciones racionales, basta con descomponer factorialmente el numerador y el denominador.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}$

En aquellos casos en que aparecen funciones irracionales (radicales), basta con multiplicar y dividir por la expresión radical conjugada.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-1+x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=2$$

INDETERMINACIÓN $\frac{0}{0}$

Calcula

$a)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2+x-2}$

$b)\ \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^2}{x+1}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{4-x^2}$

$d)\ \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+2)}=\frac{1}{(1+2)}=\frac{1}{3}$$

$$b)\ \lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{x+1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -1}\frac{(1+x)(1-x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(1-x)}{1}=\frac{(1-(-1))}{1}=2$$

$$c)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{4-x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{(2+x)(2-x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1\cdot(x+1)}{(2+x)}=\frac{-1\cdot(2+1)}{(2+2)}=\frac{-3}{4}$$

$$d)\ \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{(-3+1)}=\frac{1}{-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1-3x^2+3}{x^3-5}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{4}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}-\frac{5}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^4}}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{1-0+0}{0-0}=\infty$$

Efectúa:

$$a)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)\quad b)\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+5x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$$

$$c)\lim_{x\to5}\frac{3-\sqrt{4+x}}{x-5}$$

Efectúa:

$$\text{a)}\lim_{x\to1}\frac{2x^3-14x^2+12x}{x^3-10x^2+27x-18}\qquad \text{b)}\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$$

$$\text{c)}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{1-x}\qquad \text{d)}\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$\text{e)}\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x^2+3x-2}-\sqrt{2x^2+2}$$

Límites

Problema 5 $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}$

Solución Re-escribimos

$$\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}=$$

$$\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2}=\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{x^2+4x}$$

Menor grado en *x*.

$$\frac{2\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{x+4}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{2\left(\sqrt{1}+\sqrt{+1}\right)}{4}=1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}\rightarrow \textit{factorizando numerador y denominador tenemos:}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^3+2x^2+4x+8)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^3+2x^2+4x+8)}{(x^2+2x+4)}=\frac{2^3+2(2)^2+4(2)+8}{2^2+2(2)+4}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$$