Ano 8

Número 86

Xuño 2016

MaTHeSiS

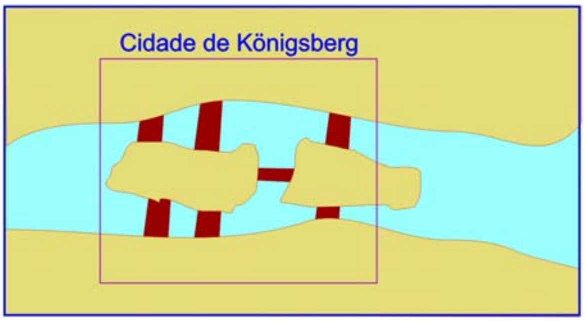
Boletín de divulgación matemática

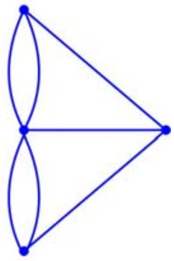
Depósito Legal: C-2693-06

http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/

Con e de Euler (e IV)

A cidade de ***Königsberg*** (na actualidade cidade rusa chamada *Kaliningrado*) aséntase nas dúas beiras e en dúas illas do río *Pregel* (Pregolya). Os catro sectores da cidade conectábanse entre si por sete pontes.



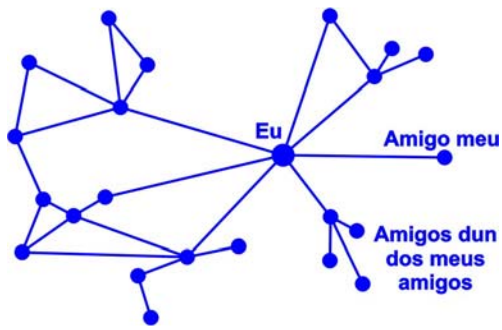


Os habitantes de ***Königsberg*** andaban intrigados coa resposta á seguinte cuestión: *pódese dar un paseo que permita visitar as catro zonas da cidade, de tal modo que soamente haxa que pasar unha única vez por cada ponte?*

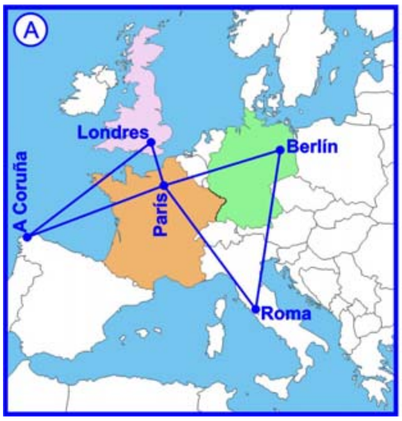
Loxicamente, diante dun reto coma este ***Leonhard Euler*** non podía quedar parado. Puxo mans á obra e, evidentemente, deu resposta satisfactoria á pregunta. Como consecuencia das súas investigacións, realizadas en 1735, naceu unha nova rama das matemáticas: a ***Teoría de Grafos***. O ***Problema das sete pontes de Königsberg***, quedou para sempre ligado á historia das matemáticas.

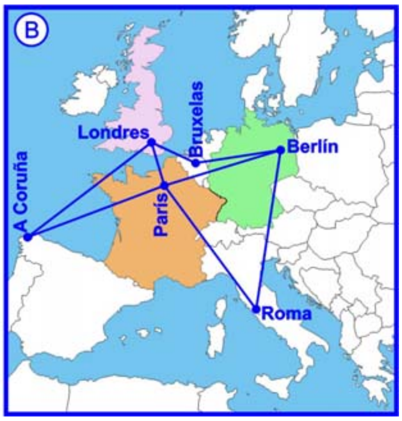
GRAFOS

Onte, cando acendín o meu móbil, sorprendeume unha notificación de Facebook. Resulta que tiña unha solicitude de amizade realizada por alguén que non coñecía. Como eu non quería que volvese pasar, decidín facer privado o meu perfil, mais había dúas opcións: podía amosalo só aos meus amigos, ou aceptar tamén aos amigos dos meus amigos. Intentei realizar un esquema que me servise para aclarar a situación; nada máis comezar, o debuxo tomou o aspecto da figura da dereita.

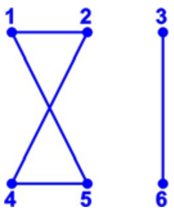


Neste deseño, cada punto representa unha persoa e cada segmento que une dous puntos (podería ser unha liña curva en vez dun segmento) indica que entre esas dúas persoas hai unha relación de amizade. Observa o gráfico e trata de dar resposta ás seguintes preguntas: Existe algún amigo meu que sexa tamén amigo doutro dos meus amigos? Existen amigos meus que teñan algún amigo común? Existen amigos dos meus amigos que sexan amigos entre eles? Existe algunha persoa que non sexa amigo dos meus amigos?



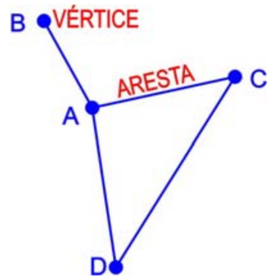


Vexamos outro exemplo. Supoñamos que un executivo dunha empresa coruñesa debe visitar uns clientes de diferentes cidades europeas (concretamente as cidades que se mostran na *figura A* da esquerda). Neste caso os puntos representan as cidades e as liñas entre eles son os hipotéticos voos que conectan esas cidades. Pode o executivo realizar a súa viaxe e regresar á Coruña, sen pasar dúas veces pola mesma cidade? Que pasará no caso de que as cidades e voos sexan os representados na *figura B*; pode agora o executivo saír da Coruña e regresar aquí sen pasar dúas veces pola mesma cidade? Só hai unha maneira de facer estas viaxes?



E velaquí o exemplo terceiro, co que imos dar resposta a un sinxelo problema matemático: Cos díxitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, cantos números de dúas cifras se poden formar que sexan múltiplos de tres? Cales son eses números? (*recorda que un número é múltiplo de 3 se a suma das súas cifras é tres ou múltiplo de tres*).

As respostas ás preguntas anteriores dedúcense do esquema que fixemos, no que cada punto se identifica cunha cifra do 1 ao 6 e cada segmento conecta dous díxitos que ao colocalos un a carón do outro forman un número de dúas cifras que é múltiplo de tres: 12, 21, 24, 42, 45, 54, 15, 51, 36 e 63.



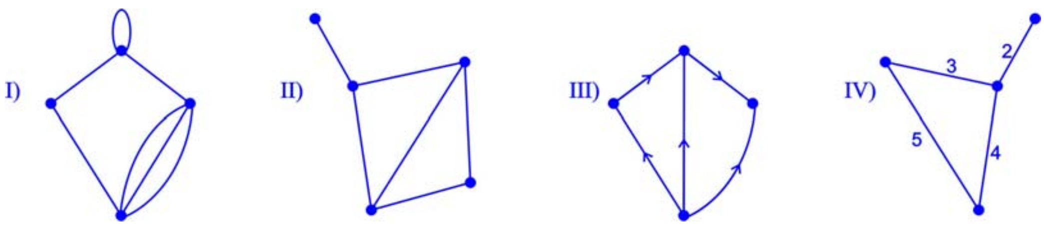
Moitos problemas matemáticos, das ciencias en xerar, da organización social e cidadá, da vida cotiá… poden resolverse de maneira satisfactoria se utilizamos representacións coma as anteriores. Un deseño deste tipo denomínase ***grafo***, sendo a ***teoría de grafos*** a rama das matemáticas que se ocupa do seu estudo.

Un ***grafo*** é, polo tanto, un debuxo formado por un número finito de puntos, denominados ***vértices*** ou ***nodos***, conectados por segmentos de rectas (ou curvas) aos que se lle chama ***arestas*** ou ***lados***.

O número de ***arestas*** que concorren nun ***vértice*** determina o ***grao*** dese ***vértice***. Tendo isto en conta, para o caso do grafo anterior, diremos que o ***grao do vértice A é 3*** e denotarémolo así: ***δ(A) = 3*** (***δ*** é unha letra do alfabeto grego que se chana *delta minúscula*). Referíndonos de novo a este grafo escribiremos: ***δ(B) = 1*** (que se le: *o grao do vértice B é 1*) e ***δ(C) = δ(D) = 2***. . Diremos tamén que os vértices A e B teñen ***grao impar*** e os vértices C e D teñen ***grao par***.

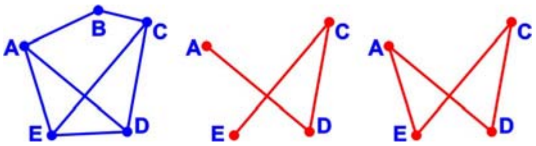
Fixándote nos ***grafos*** que debuxamos ata agora e nos que aparecen a continuación, comproba que ***a suma dos graos*** de todos os ***vértice***s dun ***grafo*** é sempre igual ao dobre do número das súas ***arestas***.

Existen diferentes tipos de ***grafos***, imos citar algúns aclarando os conceptos a partir das seguintes imaxes. Pode ocorrer que varias arestas conecten un mesmo par de vértices, neste caso chámanse ***arestas múltiples*** ou ***paralelas***; tamén se pode dar o caso de que existan arestas que comecen e rematen no mesmo vértice, estas denomínanse ***bucles*** ou ***lazos***.



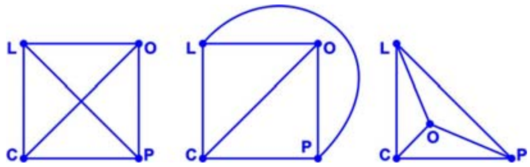
Os ***grafos*** que conteñen ***arestas paralelas*** ou ***bucles*** chámanse ***grafos múltiples*** ou ***multigrafos***, no caso contrario serán ***grafos simples*** (son exemplos as imaxes I e II, respectivamente).

Na imaxe III móstrase un ***grafo orientado***, ***dirixido***, ou ***digrafo*** pois, como se pode observar, sobre as arestas infórmase do *sentido* no que deben ser percorridas. Tamén se pode acompañar cada aresta cun valor que indique o seu ***peso*** ou ***ponderación***, o que dará lugar a ***grafos ponderados*** (imaxe IV).

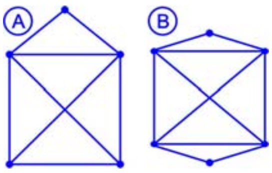


Sobre un grafo poden facerse percorridos diferentes. Fixémonos en dous tipos deses percorridos: os ***camiños*** e os ***ciclos***. Un ***camiño*** entre dous ***nodos*** está formado por unha secuencia consecutiva de ***arestas*** que nos permiten ir dun *nodo* ata o outro. Se un ***camiño*** comeza e remata no mesmo ***vértice***, chámase ***ciclo*** ou ***circuíto***. Nesta figura móstrase un ***camiño*** que vai de ***A*** a ***E*** (ou viceversa) e un ***ciclo*** que comeza e remata en **A** (ou en calquera dos outros *vértices* que interveñen no *ciclo*). Un ***camiño simple*** non pasa dúas veces pola mesma aresta.

Existen *grafos* nos que *calquera* par de vértices están *conectados* por un *camiño*, dise que son ***grafos conexos***. Pero noutros casos pode ocorrer que atopemos vértices para os que non exista un camiño que os una (se te fixas no exemplo que puxemos na páxina anterior, no que se buscaban números de dúas cifras divisibles entre 3, poderás observar que non existe camiño para ir do nodo 2 ao nodo 6, poñamos por caso) ese grafo é ***non conexo***.



Reparemos agora nestes tres *grafos* que debuxamos á dereita. Teñen unha aparencia diferente, pero é doado comprobar que nos tres casos os *vértices* están relacionados de forma idéntica (as *arestas* determinan as mesmas conexións). Sen embargo, o primeiro deseño contén *arestas que se cortan* mentres que nos outros dous as arestas só se xuntan nos vértices. Un grafo que se poida debuxar sen que as súas arestas se corten unhas ás outras chámase ***grafo plano***; se o debuxamos sen interseccións estamos facendo unha ***representación propia***.



O que imos tratar a continuación vaiche soar moito, estou seguro. Quen non intentou nunca debuxar figuras parecidas a estas sen levantar o lapis do papel nin pasar dúas veces sobre o mesmo segmento? (Trata de reproducilas ti agora).

As condicións deste reto son as mesmas que debían cumprir os habitantes de ***Königsberg*** cando pretendían facer paseos sen cruzar dúas veces a mesma ponte.

O grafo da figura ***A*** pode percorrerse sen levantar o lapis do papel e sen pasar dúas veces pola mesma aresta; é dicir, admite un ***camiño simple*** que contén a ***todas*** as súas arestas (permítese pasar máis dunha vez polo mesmo vértice). Un camiño deste tipo coñécese na actualidade como ***camiño euleriano***.

O da figura ***B*** admite un ***ciclo*** que contén a ***todas*** as arestas sen pasar dúas veces por unha delas. É dicir, pode debuxarse sen levantar o lapis do papel, comezando e rematando no mesmo vértice. Un *circuíto* deste tipo chámase ***circuíto euleriano*** e o grafo será un ***grafo euleriano***.

Cando ***Leonhard Euler*** se puxo a traballar no que agora se coñece como ***teoría de grafos***, estableceu (demostrou) importantes resultados dos que imos citar algúns utilizando unha linguaxe actual, por exemplo:

Un grafo sempre contén un número par de vértices con grao impar.

Un grafo conexo admite un ***camiño de Euler*** *se ten exactamente dous vértices impares*. Neste caso estamos diante dun grafo (dunha figura) que se pode percorrer sen levantar o lapis do papel e sen pasar dúas veces pola mesma Aresta. Ademais, debemos comezar nun dos vértices con grao impar e rematar no outro.


José Pazos Pérez
Terceiro ESO-A

Un grafo conexo admite un ***circuíto de Euler*** *se todos os seus vértices teñen grao par*.

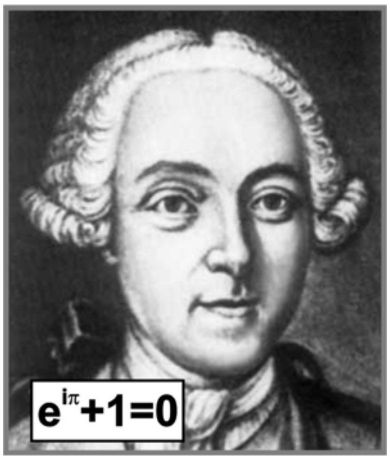
Despois do que levamos dito, debes ter elementos suficientes para dar a solución ao ***problema das pontes de Königsberg*** e tamén para realizar as investigacións que propoñemos deseguido.

Investiga: 1.- Deseña grafos que se poidan debuxar sen levantar o lapis do papel: a) comezando nun vértice e rematando noutro vértice diferente. b) Comezando e rematando no mesmo nodo.

2.- Que relación existe entre ***grafos planos*** con ***representación propia*** e a ***fórmula de Euler para poliedros convexos***? (Consulta *Matheis 84*).

3.- Un Comercial que vive na Coruña ten que visitar hoxe a tres clientes que se atopan nas capitais das outras tres provincias galegas e logo volver para A Coruña. Considerando a información que se dá no grafo ponderado da esquerda, que ruta debe escoller para percorrer o menor número de quilómetros?

A fórmula máis fermosa



Cando andamos buscando a ***raíz cadrada*** dun número ***a*** o noso obxectivo é atopar outros números que ao ***elevalos ao cadrado*** dean como resultado ***a***. Ocorre de igual modo cando queremos obter $\sqrt[n]{a}$ (raíz n-ésima de a), o que buscamos son os valores que ***elevados*** a ***n*** dean ***a***.

Desta maneira, cando traballamos no campo dos ***números reais***, dicimos que 5 e -5 son as ***raíces cadradas*** de 25, pois, $5^2 = 25$ e $(-5)^2 = 25$. Tamén dicimos que as raíces cuartas de 2, $\sqrt[4]{2}$, son 1,1892… e -1,1892 e que $\sqrt[3]{-8} = -2$ xa que $(1{,}1892\ldots)^4 = 2$, $(-1{,}1892\ldots)^4 = 2$ e $(-2)^3 = -8$.

Tendo en conta as consideracións anteriores, debemos admitir que, no conxunto dos ***números reais***, ***non existen*** *raíces pares de números negativos*, pois cando calculemos unha potencia par dun número real, o resultado será sempre positivo. Non existen, poñamos por caso, nin $\sqrt[6]{-64}$ nin $\sqrt{-1000}$ xa que ningún número real elevado ao cadrado ou á sexta potencia terá resultado negativo.

Como consecuencia do anterior, ecuacións tales como $x^2+1=0$, $x^2-2x+2=0$, $x^2+9=0$ ou $x^4+16=0$ non teñen solución en $\mathbb{R}$.

O campo dos ***números complexos***, $\mathbb{C}$, contén a todos os conxuntos numéricos cos que temos traballado ata agora na ESO, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$, e nel pódense atopar respostas ás limitacións que acabamos de mostrar para $\mathbb{R}$.

Todo comezou coa definición da ***unidade imaxinaria*** $i = \sqrt{-1}$ o que nos leva a $i^2 = -1$. A aceptación deste concepto por parte dos matemáticos produciu un importante avance das matemáticas e nos fundamentos teóricos doutras ciencias. Os ***números complexos*** viñeron a resolver múltiples problemas.

Cando traballamos en $\mathbb{C}$ temos que $\sqrt{-9} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = \pm 3i$ e as solucións da ecuación $x^2-2x+2=0$ serán:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1-i} \text{ e } \boldsymbol{x_2 = 1+i}.$$

Leonhard Euler fixo grandes avances no estudo dos números complexos. A utilización do símbolo ***i*** para denotar a ***unidade imaxinaria*** é da súa autoría. Entre as súas achegas neste campo destaca a chamada *fórmula de Euler para números complexos*. Un caso particular desa fórmula é a súper coñecida ***identidade de Euler*** que, para unha grande maioría, é ***a fórmula máis fermosa***, exprésase así:

Gianny Alejandro Uffo Pérez
Cuarto ESO-A

$$e^{i\pi}+1=0$$

Nesta fórmula interveñen cinco das máis importantes constantes matemáticas: O número 0, ***elemento neutro da suma***; o número 1, ***elemento neutro da multiplicación***, os números ***e*** e ***π***, números ***irracionais transcendentes***; e a ***unidade imaxinaria***, ***i***.