Ano 8
Número 80
Marzo 2015

MaTHeSIS
Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

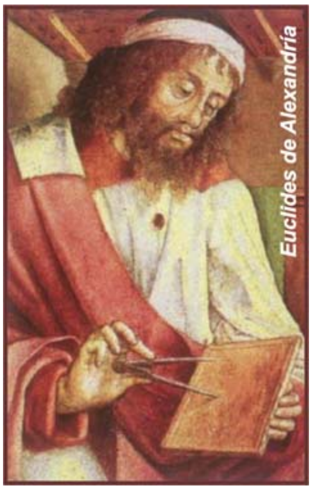
http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/

ÁNGULOS

Unha ***magnitude*** é, baixo o punto de vista da matemática clásica, toda propiedade que se pode ***medir*** e expresar mediante unha cantidade, por exemplo: a lonxitude, a masa, a presión, a amplitude dun ángulo...

Medir unha ***magnitude*** é comparala con outra similar previamente establecida, chamada ***unidade de medida*** ou ***patrón***. O que se pretende é determinar cantas veces a magnitude que queremos cuantificar ***contén ao patrón***.

O obxectivo central deste artigo vai ser recordar cuestións sobre ángulos no plano e a súa medida.

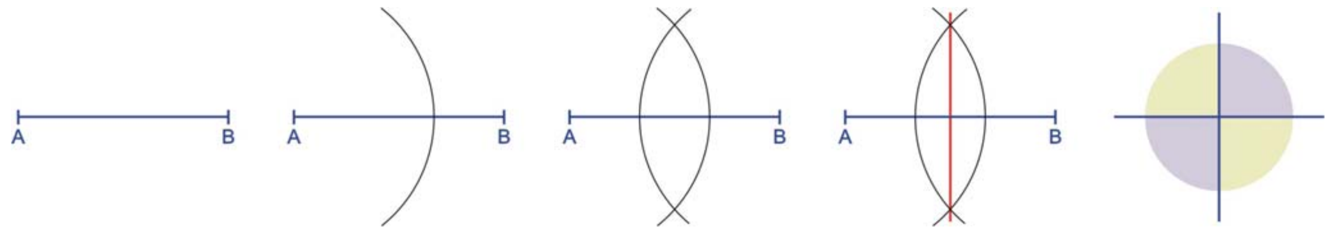


Un ***ángulo*** é cada unha das dúas ***rexións*** nas que queda dividido un ***plano*** por dúas ***semirrectas*** que teñen o mesmo punto de orixe, punto que neste caso denominaremos ***vértice***.

As primeiras referencias sobre o concepto de ángulo atribúense a ***Eudemo de Rodas*** (350 a.C.– 290 a.C.), considerado o primeiro historiador relevante das matemáticas. Importantes propiedades e resultados sobre ángulos son mencionados por ***Euclides de Alexandría*** (arredor de 325 a.C. – 265 a.C.) na súa obra máis coñecida e difundida: *Os Elementos*.

A primeira cuestión á que imos tratar darlle resposta vai ser a seguinte: ¿Que ángulos son os que se toman como modelo para obter a medida doutros?

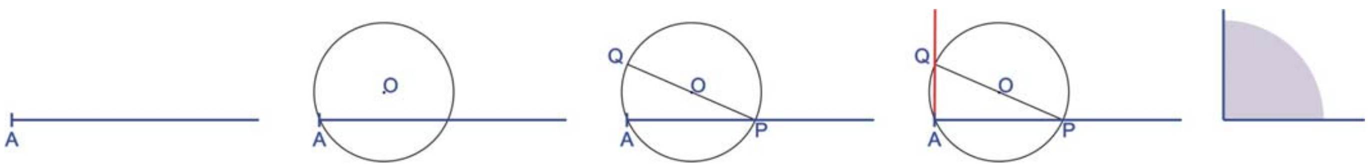
Na seguinte figura mostramos o procedemento que nos leva á construción da ***mediatriz*** dun segmento **AB**. ***Propoñémosche que poñas por escrito a descrición dos catro pasos dos que consta o proceso***.



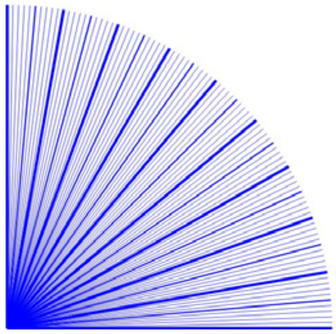
A partir da construción que acabamos de facer obtivemos catro rexións angulares de idéntica amplitude; cando un ángulo teña esa amplitude, diremos que é un ***ángulo recto***.

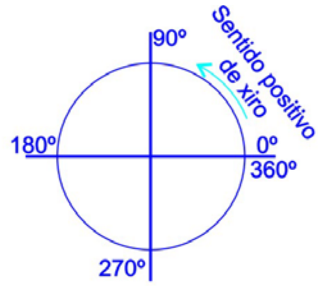
¿Como se constrúe un ángulo recto con vértice nun dos extremos dun *segmento* ou no punto inicial dunha *semirrecta*?

Non existe unha única maneira de dar resposta a esta pregunta; velaquí unha posible maneira de actuar: a) Marcamos un punto, ***O***, exterior á *semirrecta* e trazamos unha *circunferencia* con *centro* ***O*** e *raio* ***OA***. b) Trazamos o *diámetro* determinado polos puntos ***P*** e ***O***. c) Trazamos a *semirrecta* que parte de ***A*** e contén a ***Q***.



Como sabes, acostumamos utilizar o ***ángulo recto*** para construír unha ***unidade de medida*** que nos permita cuantificar a amplitude dos ángulos. É habitual dividir un ángulo recto en ***noventa partes*** iguais denominadas ***graos*** (que nada teñen que ver cos graos utilizados para medir temperaturas, existindo símbolos diferentes en cada caso: *onte, cando os raios do sol tiñan unha inclinación de 25º, había unha temperatura de 17 ºC*).





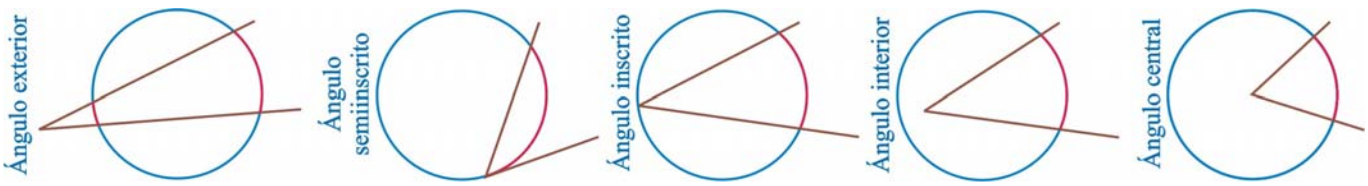
Cando un ángulo mide 360º dise que é un ***ángulo completo***

Para realizar medidas moi precisas, dividimos cada ***grao*** en ***sesenta minutos*** e cada ***minuto*** en ***sesenta segundos*** (unha vez máis debemos ser coidadosos e non confundir as unidades de medida da amplitude angular coas correspondentes á medida do tempo: *para percorrer un tramo de estrada cunha inclinación de 2º 51' 44'' un ciclista tardou 7 min 33 s*).

Cando traballamos con estas unidades de medida de ángulos, estamos utilizando ***graos***, ***minutos*** e ***segundos sesaxesimais***. As unidades que acabamos de citar non pertencen ao Sistema Internacional pero están aceptadas por el.

Partindo do ***ángulo recto***, e procedendo á súa división en partes iguais cun criterio diferente ao anterior, obtense outra ***unidade para a medida de ángulos*** sobre a que che propoñemos que fagas indagacións. ***Investiga***: ***Graos centesimais***. ¿Cal é o símbolo para indicar ***graos centesimais***? ¿Como se relacionan ***graos sesaxesimais*** e ***graos centesimais***?

Na seguinte figura móstranse situacións de *ángulos* en relación cunha *circunferencia*. Cada unha acompáñase do nome co que en matemáticas nos referimos a elas. Imos fixarnos a seguir nos tres últimos apartados (e propoñémosche a ti que ***definas*** os outros dous).

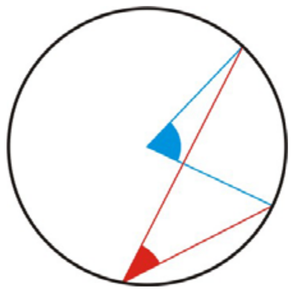


Un ***ángulo inscrito*** ten o seu ***vértice*** sobre a *circunferencia* e os seus ***lados*** son ***secantes*** a ela. Un ***ángulo interior*** ten o ***vértice*** nun punto da zona interior á circunferencia; cando o ***vértice*** coincide co ***centro*** da circunferencia temos un ***ángulo central***.

Fixémonos que cando os lados dun ángulo central determinan sobre a circunferencia un ***arco*** que mida, por exemplo, a ***cuarta parte da lonxitude da circunferencia***, tamén a ***amplitude do ángulo*** será a ***cuarta parte da amplitude do ángulo completo***. De igual modo, se o ángulo central determina un ***arco*** que mida *a metade, a quinta parte, a décima parte*… da ***lonxitude da circunferencia***, tamén as ***amplitudes*** correspondentes a eses ***ángulos*** medirán *a metade, a quinta parte, a décima parte*… ***de 360º***.

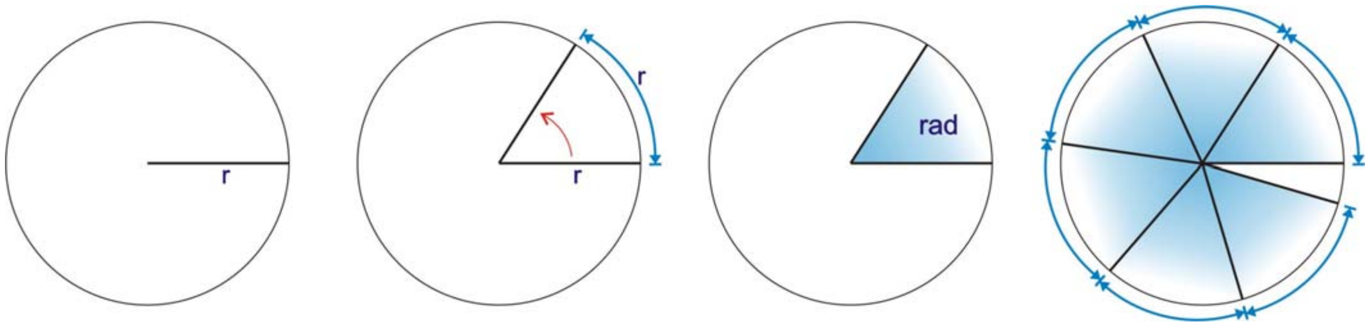
Así, pois, a ***medida da amplitude*** dun ***ángulo central*** está directamente relacionada coa ***medida do arco*** que determinan os seus lados sobre a circunferencia.

Propoñémosche que ***investigues*** como se demostra a seguinte propiedade: *Se sobre unha circunferencia un* **ángulo central** *e un* **ángulo inscrito** *abarcan o* **mesmo arco***, a amplitude do ángulo inscrito coincide coa* **metade** *da amplitude do ángulo central*.



O método que utilizamos ao comezo para construír un ángulo recto con vértice no punto inicial dunha *semirrecta* baséase na propiedade anterior, ***xustifícao***.

Na figura seguinte construímos un ***ángulo central*** que abarca sobre a circunferencia ***un arco de medida igual que o raio***. O ángulo que obtemos mediante este procedemento chámase ***radián***.

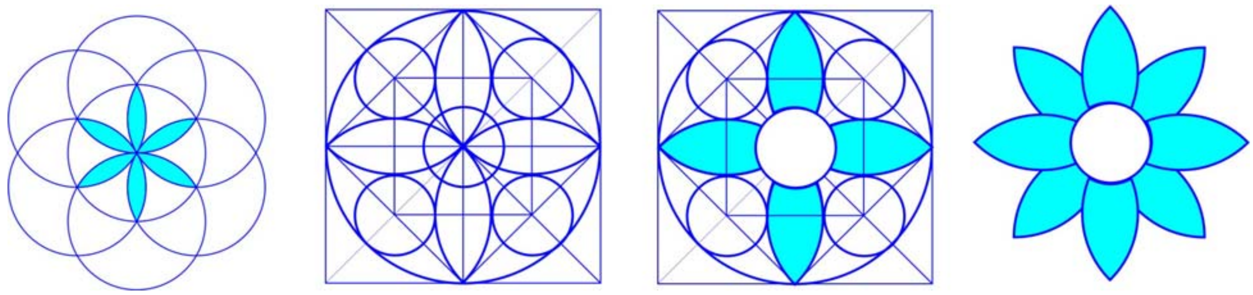


Como sabemos, a lonxitude dunha circunferencia depende unicamente da medida do seu raio ($L=2\pi r$), polo tanto a división da lonxitude dunha circunferencia entre a medida do seu raio será sempre unha cantidade constante que non depende da circunferencia coa que se traballe: $\frac{2\pi r}{r}=2\pi$. En conclusión: o ***radián*** pódese utilizar como patrón para calcular a medida da amplitude de ángulos e, como acabamos de ver, $360^o \equiv 2\pi$ ***rad***, O ***radián*** é unha unidade de medida de ángulos planos pertencente ao Sistema Internacional.

Graos sesaxesimais	*0º*	*30º*	*60º*	*90º*	*180º*	*270º*	*360º*
Radiáns	$0\ rad$	$\frac{\pi}{6}\,rad$	$\frac{\pi}{3}\,rad$	$\frac{\pi}{2}\,rad$	$\pi\ rad$	$\frac{3\pi}{2}\,rad$	$\pi\ rad$

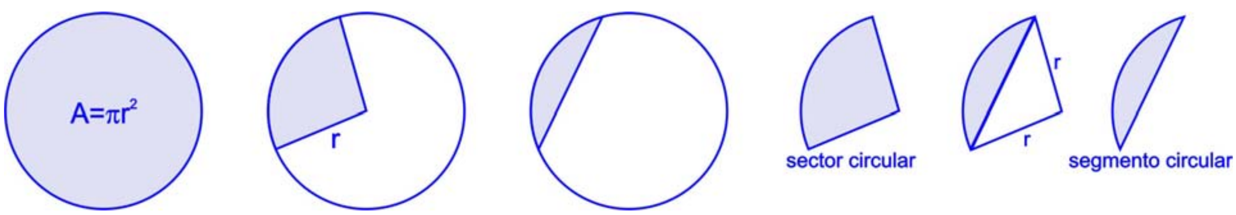
Recorda que a túa calculadora ten unha tecla que che facilita realizar operacións con ***graos sesaxesimais*** de modo rápido e tamén permite utilizar ***graos sesaxesimais***, ***graos centesimais*** ou ***radiáns*** cando o necesites.

CÍRCULOS, SECTORES, SEGMENTOS E FLORES



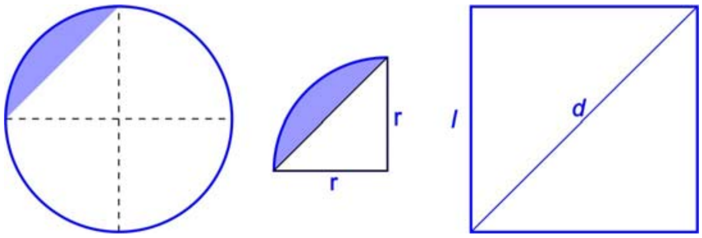
¿Que é un círculo? ¿Como se calcula a súa área? A estas preguntas é *case seguro* que sabemos darlle resposta. Imos recordar, por se acaso queda algún despistado, outros dous conceptos que teñen relación co círculo.

Un ***sector circular*** é unha porción dun *círculo* limitada por dous *raios* e un *arco* da *circunferencia*. Un ***segmento circular*** é unha porción do círculo limitada por un *arco* e a súa *corda*.



Como a seguir necesitamos calcular varias áreas de segmentos circulares asociados a un ángulo central de 90º, imos determinar antes de nada unha fórmula, en función do raio do círculo, para utilizala as veces que precisemos.

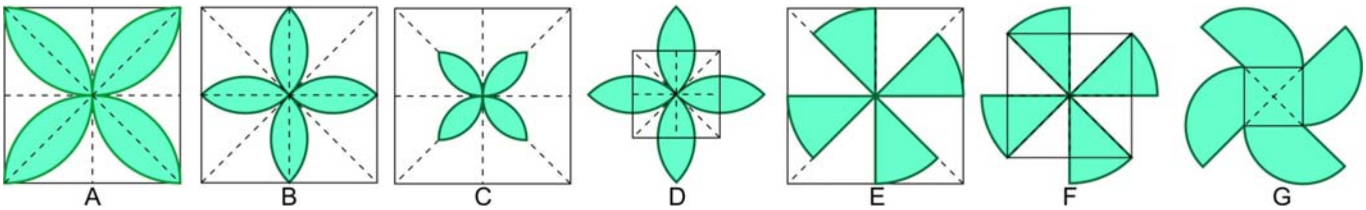
Ademais utilizaremos a relación que hai entre o lado dun cadrado e a súa diagonal, polo que tamén a lembramos agora.



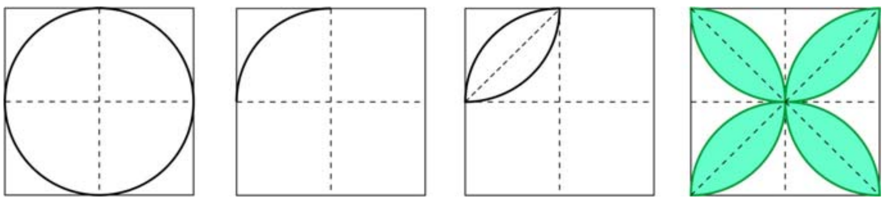
Na figura da dereita móstrase que un ***segmento circular***, correspondente a un cuadrante, obtense recortando un ***triángulo rectángulo isósceles*** dun ***sector circular*** que coincide coa cuarta parte dun círculo, polo tanto:

$$A_{Segmento} = A_{Sector} - A_{Triángulo} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{2r^2}{4} = \frac{(\pi - 2)r^2}{4} \qquad d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

O obxectivo que nos propoñemos é calcular a medida da superficie das zonas coloreadas que aparecen na seguinte figura, de modo que a área de cada unha delas quede expresada en función do lado, ***l***, do cadrado utilizado para facer cada construción. Detallamos os dous primeiros apartados e propoñémosche que investigues a solución dos outros.



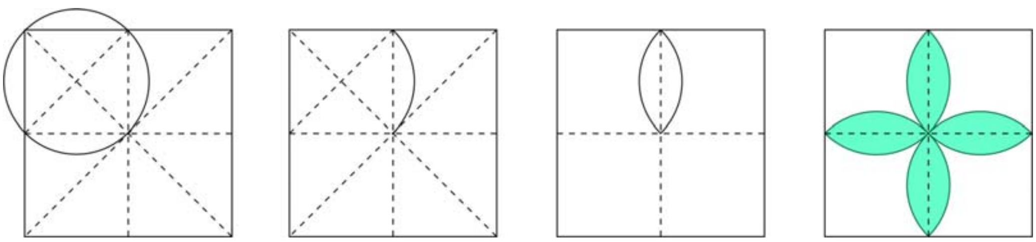
A figura **A** construíuse xuntando oito ***segmentos circulares*** que abarcan un cuadrante dun círculo de raio ***l/2***, tal como se indica na seguinte secuencia:



Polo tanto:

$$A_{Segmento} = \frac{(\pi - 2)\left(\frac{l}{2}\right)^2}{4} = \frac{(\pi - 2)l^2}{16} \qquad A_{Coloreada} = 8 \cdot \frac{(\pi - 2)l^2}{16} = \frac{(\pi - 2)l^2}{2}$$

Cada un dos oito ***segmentos circulares*** que se utilizan no apartado **B** construíronse a partir dun círculo con raio a cuarta parte da diagonal:



Obtemos:

$$A_{Segmento} = \frac{(\pi - 2)\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2}{4} = \frac{(\pi - 2)\frac{2l^2}{16}}{4} = \frac{(\pi - 2)l^2}{32} \qquad A_{Coloreada} = 8 \cdot \frac{(\pi - 2)l^2}{32} = \frac{(\pi - 2)l^2}{4}$$