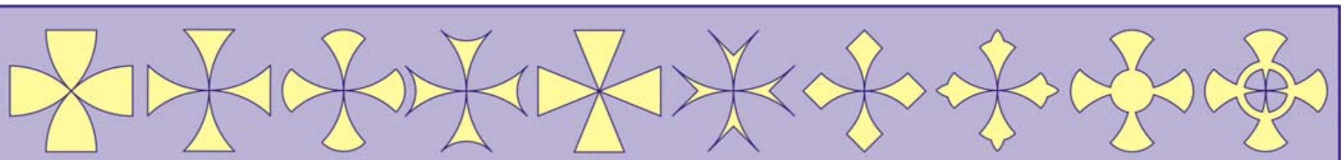
Ano 8
Número 72
Outubro 2013

MaTHeSiS

Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/



CORTE SAGRADO

No transcorrer do noso día a día, nas múltiples facetas da vida cotiá, estamos rodeados de *xeometría*. Pero por estarmos inmersos nela é habitual que nin nos decatemos da súa presenza. Hai ocasións nas que a xeometría se presenta baixo aspectos un tanto misteriosos: ¿tes reparado nas manifestacións xeométricas que ofrece unha catedral ou outros templos máis modestos? A cousa vén, pois, de centos de anos atrás. A construción destes impresionantes monumentos sería imposible sen as matemáticas.

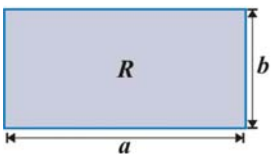
A Coruña, coma calquera outra cidade ou aldea, está chea de matemáticas. Para darlle sentido ao tema que imos tratar, cando camiñes polas súas rúas, repara na xeometría das súas igrexas. Por certo, ¿sabes como se denominan e onde se sitúan as que mostramos nas seguintes imaxes?

Se botamos unha ollada ás fachadas ou aos interiores destas igrexas, podemos comprobar que, tanto nos seus elementos arquitectónicos e decorativos (columnas, ventás, rosetóns…) coma nas súas dimensións, a xeometría xoga un papel fundamental.

Esta vertente da xeometría relacionada coa relixiosidade, denomínase ***Xeometría Sagrada***. É froito do traballo dunha multitude de mestres e artesáns que en moitas ocasións estiveron agrupados en loxas e gremios que mantiñan os seus saberes en secreto. Frecuentemente, esta xeometría quere representar a natureza (aos animais, á vexetación…) e tamén ao universo e á creación.

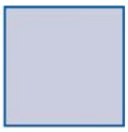
Centremos a nosa atención nunha figura xeométrica moi simple: o *rectángulo*. Como todos sabemos, un ***rectángulo*** é un *cuadrilátero paralelogramo* que ten catro ángulos rectos.

Tomemos un ***rectángulo R*** e designemos por ***a*** a medida da lonxitude dos seus lados maiores e por ***b*** a correspondente aos lados menores. Chámase ***módulo de R***, *mód(R)*, ao resultado da división *a/b*.



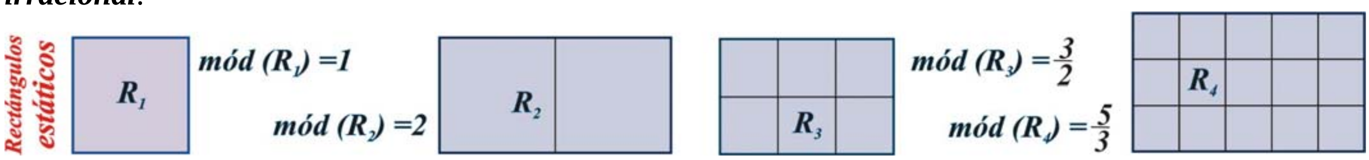
$mód\,(R) = \frac{a}{b}$

$mód\,(R) \geq 1$



Loxicamente, o módulo dun rectángulo sempre será un valor maior ou igual a 1; consideraremos ao *cadrado* como un rectángulo de módulo 1.

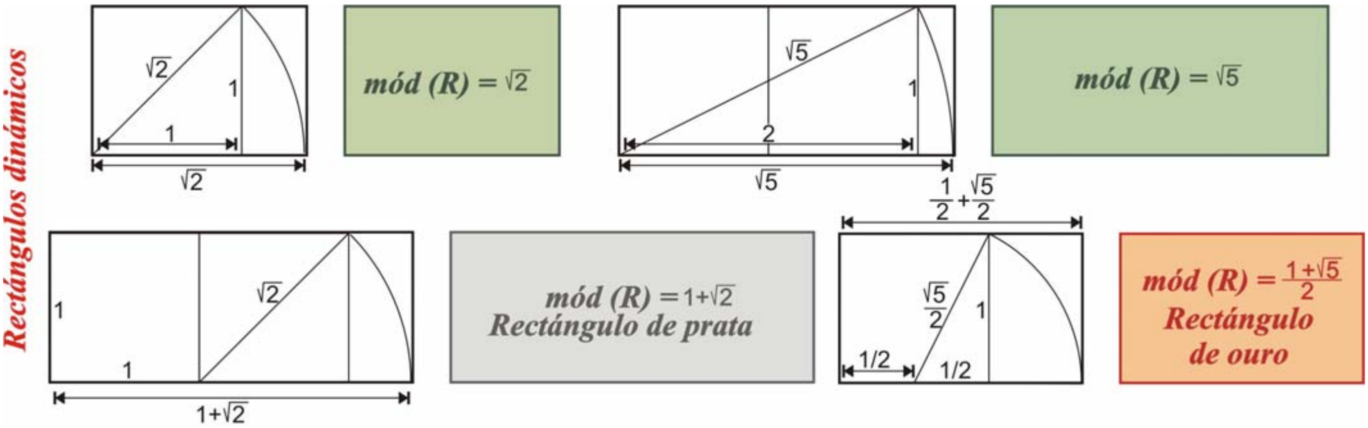
Os rectángulos que teñan por módulo un ***número racional*** denomínanse ***rectángulos estáticos*** e serán ***rectángulos dinámicos*** os que teñan como módulo un ***número irracional***.



Imos construír agora, a modo de exemplo, algúns ***rectángulos dinámicos***. Necesitaremos un compás e tamén coñecer o ***Teorema de Pitágoras***.

¿Canto mide a ***diagonal*** dun cadrado de lado 1? Fíxate na seguinte figura e trata de entender como a partir dun cadrado construímos un rectángulo de ***módulo*** $\sqrt{2}$. ¿Sabías que unha folla de papel DIN A4 é un rectángulo de módulo $\sqrt{2}$?

Seguindo o mesmo procedemento, a partir dun rectángulo de ***módulo 2***, construímos outro de ***módulo*** $\sqrt{5}$.



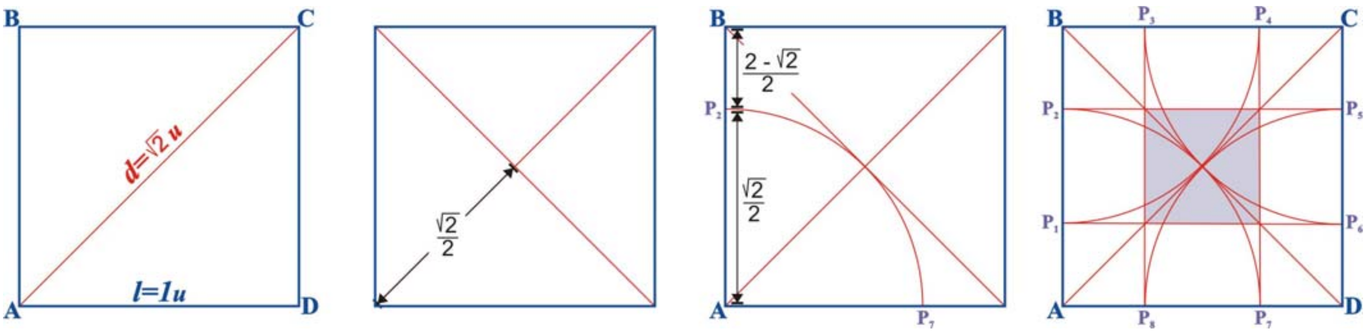
Como podes observar, na figura mostramos como se constrúen outros dous ***rectángulos dinámicos*** moi utilizados en pintura e arquitectura (tanto en contextos de carácter relixioso coma civil), son o ***rectángulo de prata*** con ***módulo*** $1+\sqrt{2}$ e o ***rectángulo de ouro*** que ten ***módulo*** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿Sabías que o DNI e as tarxetas de crédito son ***rectángulos áureos***?

Postos os exemplos de rectángulos dinámicos, centremos de novo a nosa atención sobre o cadrado Construamos un cadrado **ABCD**. Xa fixemos referencia a que un cadrado que teña de medida de *lado* unha unidade, $l=1\ u$, terá unha *diagonal* con medida $d=\sqrt{2}\ u$.

As dúas *diagonais* do cadrado son *perpendiculares* é córtanse no seu punto medio, Tomamos un compás e, facendo *centro* no *vértice* **A**, trazamos un *arco* de *circunferencia* que teña como *raio* a metade da diagonal. Deste modo obtemos os puntos $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_7}$ sobre os dous lados do cadrado que parten do vértice **A**.

O *lado* **AB** quedou dividido en dous *segmentos*: $\mathbf{AP_2}$ e $\mathbf{P_2B}$. Estas son as medidas correspondentes:

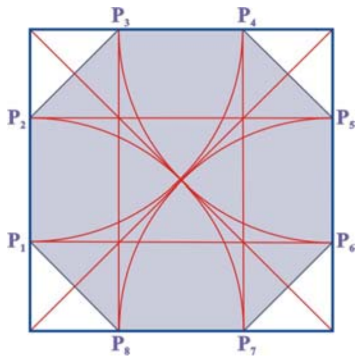
$$\mathbf{AB} = l = 1 \qquad \mathbf{AP_2} = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \mathbf{P_2B} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$



Repetindo o proceso anterior para os vértices **B**, **C**, e **D** obtemos os oito puntos **P1**, **P2**… **P8** que determinan os segmentos que se poden apreciar na figura. Esta construción que acabamos de realizar denomínase ***Corte Sagrado*** do cadrado **ABCD**. Hai autores que se refiren ao cadrado central, que destacamos no debuxo, como o ***Corte Sagrado*** do cadrado inicial,

Xorde agora unha pregunta: ¿Son os puntos **P1**, **P2**… **P8** os vértices dun octógono regular?

Para responder a esta cuestión temos que determinar as medidas dos segmento $\mathbf{P_1P_2}$ e $\mathbf{P_2P_3}$



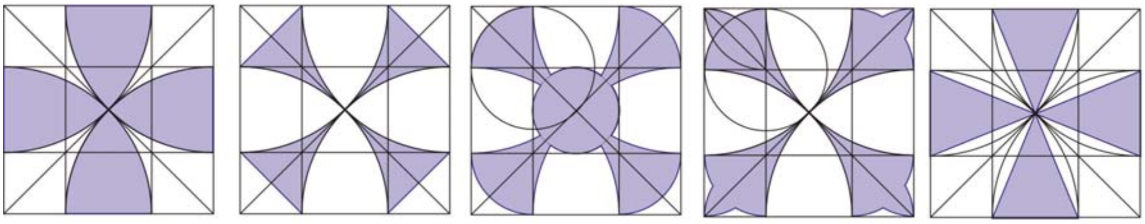
$$P_1P_2 = AP_2 - AP_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$(P_2P_3)^2 = (P_2B)^2 + (BP_3)^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$ Por tanto:

$$P_2P_3 = \sqrt{2\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$$

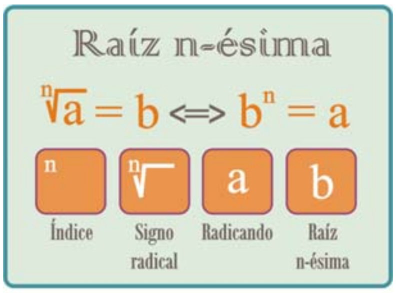
Así queda demostrado que a medida do segmento $\mathbf{P_1P_2}$ coincide coa medida do segmento $\mathbf{P_2P_3}$ polo que todos os lados do *octógono* teñen a mesma medida. Se xustificas ti que todos os ángulos miden tamén o mesmo, podemos asegurar que o ***octógono*** é ***regular***. ¿Cal é a medida do perímetro e a área do octógono?

A partir da construción realizada sobre o cadrado **ABCD** fixemos os deseños que están a seguir, ¡e aínda se poden obter moitos máis! Convidámoste a que atopes ti outros. Á vista destes debuxos, ¿é preciso xustificar por que estamos diante do ***Corte Sagrado*** do cadrado?



Inés Fandiño Porca
Cuarto ESO C.

RAÍZ DIXITAL



DIXITAL *adx.* 1. Pertencente ou relativo ós dedos; dactilar (*nervios dixitais*). [...] 3. Que se expresa en números díxitos (*reloxo dixital*). 4. Numérico, que se representa por medio de caracteres ou de sinais de valores discretos. [...]

Todos sabemos que a ***raíz n-ésima*** dun número ***a*** é outro número ***b*** que cumpre a seguinte condición: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$; sendo $\sqrt[n]{\ }$ o ***signo radical***, ***a*** o ***radicando*** e ***n*** o ***índice da raíz***.

Sabemos tamén que os *radicais* se poden expresar utilizando notación de *potencias* con expoñentes fraccionarios, do seguinte modo: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. E mesmo sabemos que a existencia ou non existencia, no *campo real*, da ***raíz n-ésima*** dun número depende do signo dese número e de se ***n*** é par ou impar. Por exemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ e $\sqrt[4]{-16}$ ***non existen no campo real***.

Facemos estas aclaracións por se ao ler o título deste traballo pensaches que íamos falar de *radicais*. En realidade, cando nos referimos á *raíz dixital* dun número nada ten que ver coa *raíz n-ésima* dese número.

A ***raíz dixital*** dun *número natural* ***n*** obtense ao sumar reiteradamente as *cifras* (os *díxitos*) que o forman ata conseguir outro *número natural* dun ***único díxito***. Para referirnos á ***raíz dixital*** dun número ***n***, utilizaremos a seguinte notación: ***dr(n)***, collendo as iniciais de *digital root*.

Exemplos:

dr(5) = 5 ***dr(17)*** = 8 ***dr(57)*** = dr(5+7) = dr(12) = 3 ***dr(963)*** = dr(9+6+3) = dr(18) = 9

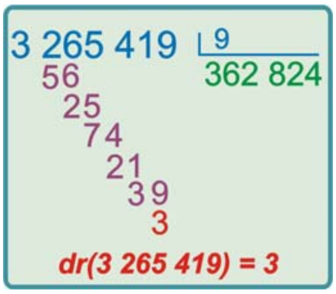
dr(98 975) = dr(9+8+9+7+5) = dr(38) = dr(3+8) = dr(11) = 2.

A raíz dixital dun número dun só díxito é el mesmo. Esta propiedade escrita en linguaxe matemática precisa expresase así; se $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow dr(n) = n$. Ademais *dr(n) = 0* se, e soamente se, *n = 0*.

Polo tanto, a *raíz dixital* dun número *n* sempre é menor que *n* se o número é maior ou igual a 10. Ou sexa: *dr(n) < n* se *n ≥ 10*.

Pódese comprobar que a ***raíz dixital*** dun número natural *n* ***coincide co resto da división dese número entre 9***.

Na figura da dereita detallamos a división de ***3 265 419*** entre ***9***, sendo ***3*** o ***resto***. Se calculamos a súa ***raíz dixital*** utilizando a definición obtemos: ***dr(3 265 419) = dr(3+2+6+5+4+1+9) = dr(30) = 3.***



Recordemos que os ***múltiplos de nove*** teñen a propiedade de que a ***suma das súas cifras é nove ou múltiplo de 9***; polo tanto, *se* **n** *é múltiplo de 9* **dr(n) = 9** (aínda que o resto da división entre 9 sexa 0 pois, como dixemos anteriormente, *unicamente* **dr(0) = 0**).

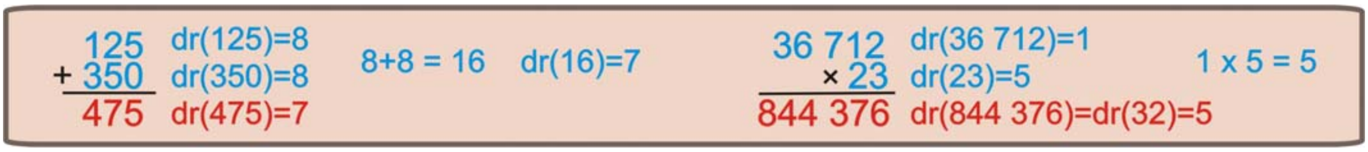
Tendo todo o anterior en conta podemos axilizar o cálculo da raíz dixital dun número *ignorando* os díxitos que, intervindo na súa escrita, sexan noves, ceros, e mesmo aqueles que sumen nove. No exemplo de cálculo da raíz dixital que fixemos antes, poderiamos ter actuado así:

dr(3 265 419) = dr(21) = 3

Existen moitas propiedades matemáticas relacionadas co cálculo da raíz dixital. Citamos algunhas a continuación. (Na figura que está a seguir constatamos o cumprimento de dúas desas propiedades, as relacionadas coa suma e a multiplicación; fai ti o mesmo para a resta e a división).

A ***raíz dixital da suma*** de dous números ***é a suma das raíces dixitais*** de cada un dos números. É dicir: ***dr(A+B) = dr(A) + dr(B)***.

A ***raíz dixital da resta*** de dous números coincide coa ***diferenza das raíces dixitais*** deses números. Ou sexa: ***dr(A-B) = dr(A) - dr(B)***.



A ***raíz dixital do produto*** de dous números coincide co ***resultado de multiplicar as raíces dixitais dos factores***. Isto é: ***dr(A·B) = dr(A) · dr(B)***.

Cando facemos a división enteira ***A:B*** obtemos un cociente, ***C***, e un resto, ***R***, que verifican a seguinte propiedade: ***A = B·C + R***. Cúmprese que: ***dr(A) = dr(B) · dr(C) + dr(R)***.

A utilización da ***raíz dixital*** permítenos comprobar, de maneira doada, se obtemos resultados incorrectos cando facemos cálculos manualmente. Usouse frecuentemente como método de corrección hai anos, cando o uso das calculadoras non era frecuente. A noutro tempo moi coñecida proba do nove, é unha aplicación das propiedades citadas máis arriba.


Pablo Cobas Ares
Cuato ESO A.

Na actualidade a ***raíz dixital*** segue tendo moitas aplicacións. Propoñémosche que indagues que ten que ver coa detección de billetes falsos.

Propoñémosche ademais que investigues: ***Raíz dixital*** e ***números cadrados***. ***Raíz dixital*** e ***números triangulares***. ***Raíz dixital*** e ***sucesión de Fibonacci***. Completa e continúa a seguinte táboa para conxecturar que ocorre coa ***raíz dixital*** dos ***números primos***:

Nº primo, ***p***	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	…
dr(p)	***2***	***3***	***5***	***7***	***2***	***4***	***8***	***1***	***5***	***2***	***4***							…