

Año 7

Número 67

Xanxiro 2013

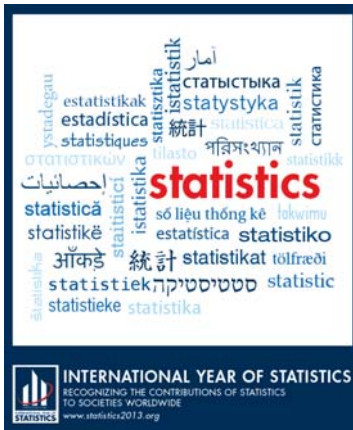
MATHEsis

Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

<http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropeyocoruna/>

30 000 DÍAS



Multitude de organizacións pertencentes a case cen países: universidades, institutos de investigación, centros de ensino, asociacións profesionais, organismos gobernamentais, empresas... desenvolverán durante este ano milleiros de actividades para promover a importancia da estatística na comunidade científica e en practicamente todos os ámbitos da vida social e cotiá. A razón é que o ano 2013 foi declarado como *Ano Internacional da Estatística*.

Desde os máis remotos tempos, os gobernantes mostraron moito interese por manter actualizados os seus inventarios referidos aos bens e ás persoas. Sempre tiveron grande importancia as respostas a preguntas semellantes a estas: ¿Qué extensión de terras fértiles ten o meu reino? ¿Cantas cabezas de gando existen en tal rexión? ¿Cantos homes teñen idade para poder formar parte dos exércitos? ¿Cantos impostos se poden recadar?...

A rama das matemáticas que se ocupou da recollida e estudo de datos denominouse clasicamente *estadística (a ciencia dos estados)*.

Hoxe en día é practicamente imposible ler un xornal sen que nos atopemos con multitude de *datos* e *gráficos estadísticos*. Actualmente poderíamos definir o termo *estadística* do seguinte modo: ciencia que *recolle, ordena* e *analiza* os datos dunha *mostra representativa* dunha certa *poboación*, e, a partir desa *mostra*, utilizando o *cálculo de probabilidades*, realízanse *inferencias* para tirar conclusión que teñan que ver coa *totalidade da poboación*.

Da estatística oficial de Galicia ocúpase o IGE, *Instituto Galego de Estatística* (<http://www.ige.eu/>), que é un organismo autónomo da Xunta de Galicia. A súa misión é promover o desenvolvemento do sistema estatístico de Galicia e presta servizos de recompilación e difusión da documentación de Galicia.

A nivel do estado español, o INE, *Instituto Nacional de Estadística* (<http://www.ine.es/>), é un organismo autónomo encargado da coordinación dos servizos estatísticos sobre demografía, economía e a sociedade española.

Ultimamente aparecen con bastante frecuencia, nos diferentes medios de comunicación, datos e estudos sobre a poboación galega e o seu envellecemento. Velaquí algúns exemplos tomados de *La Voz de Galicia*:



Galicia perderá en los próximos diez años el 4,7 % de sus habitantes

En ese tiempo se pasará de 21.600 nacimientos anuales a 16.200

Problema de habitabilidad por generación

Ourense y Lugo tienen, con Japón, el mayor envejecimiento mundial

Reclaman más geriatras para la asistencia en la sanidad pública gallega

El número de nacimientos cae en Galicia un 1,6 %, mientras el de fallecidos aumenta un 2,8 %

Galicia se llena de cuarentones

En solo tres decenios, la pirámide poblacional se ha invertido peligrosamente

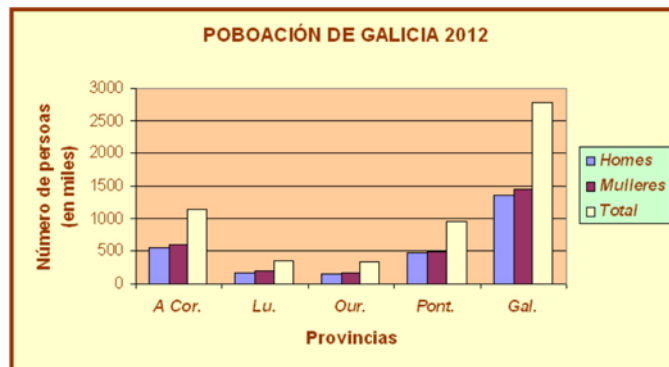
Galicia se queda sin casi 14.000 habitantes en un solo año

Las urbes intermedias crecen cinco veces más que las ciudades

Departamento de Matemáticas do IES Ramón Otero Pedrayo. A Coruña.

Un **censo** de poboación consiste en facer un recento da poboación a nivel nacional, realiza o INE cada dez anos. Os datos que utilizamos a seguir sobre a poboación galega recolléronse da páxina do IGE e son os facilitados polo INE, actualizados con data 1 de xaneiro de 2012.

	Homes	Mulleres	Total
A Coruña	550 009	593 902	1 143 911
Lugo	169 536	179 366	348 902
Ourense	159 175	171 082	330 257
Pontevedra	464 608	493 820	958 428
Galicia	1 343 328	1 438 170	2 781 498



Decatámonos que en Galicia hai 94 842 mulleres máis ca homes. Tendo en conta que a probabilidade de nacemento é do 50% tanto para os nenos coma para as nenas, esta diferenza lévanos a pensar que a **esperanza de vida** en Galicia é diferente para os homes que para as mulleres.

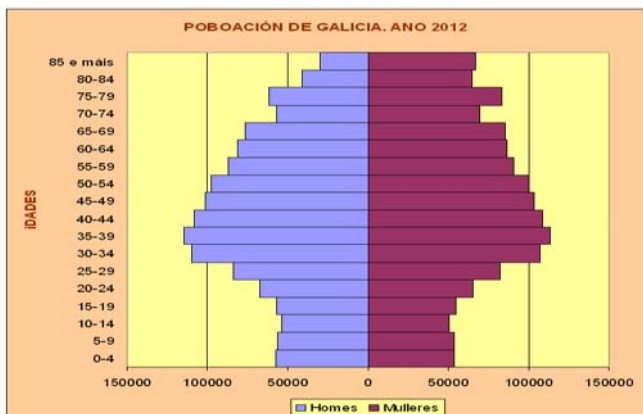
A **esperanza de vida** é a media da cantidade de anos que vive unha determinada poboación nun certo período de tempo. Vese influenciada por factores como a calidade da medicina, a hixiene, a alimentación, as guerras... etc. Actualmente adoitase referir ás persoas que teñen unha morte non violenta.

Segundo a ONU (*Organización das Nacións Unidas*) a definición de **esperanza de vida** é a seguinte: *Anos que un acabado de nacer pode vivir se os patróns de mortalidade por idades imperantes no momento do seu nacemento seguisen a ser os mesmos ao longo da súa vida.*

Na táboa da dereita resumimos os datos, relativos ao ano 2010, sobre **esperanza de vida** (expresada en anos), tomados na web do IGE.

	Homes	Mulleres	Total
A Coruña	78,5	85,2	81,9
Lugo	78,8	86,2	82,4
Ourense	79,4	85,7	82,5
Pontevedra	78,7	85,8	82,3
Galicia	78,8	85,6	82,2

Tendo en conta esta información a **media de esperanza de vida** que ten unha persoa galega ao nacer é actualmente duns 82,2 anos o que representa uns **30 000 días**.



Utilizando os datos sobre a poboación galega correspondentes ao 2012 (separándoos por sexos e distribuíndoos en grupos quinquenais de idade) construímos a **pirámide de poboación** que mostramos á esquerda.

Estamos diante dunha **pirámide regresiva**, a base da pirámide é máis estreita que os chanzos que están por enriba, o que deixa patente o paulatino envellecemento da poboación de Galicia.

22,86% dos 2 781 498 habitantes que formamos a poboación de Galicia.

A **taxa de natalidade** en 2010 era dun 7,9 por mil. A recesión económica volveu afundir a **taxa de natalidade** en Galicia tras unha etapa na que semellaba abrirse unha recuperación demográfica. Na actualidade somos a segunda comunidade autónoma con menos nacidos por cada mil habitantes.

A **taxa de mortalidade** é 10,6 por mil habitantes.

No ano 2011, houbo en Galicia 21 486 nacementos pero as defuncións ascenderon a 29 587 polo tanto estamos diante dun **crecemento vexetativo** de -8 101 habitantes. Deste modo, ademais do envellecemento da poboación, descende tamén o número de habitantes, sendo a actual **densidade de poboación** de 94 persoas por km² (superficie de Galicia 29 574,4 km²).



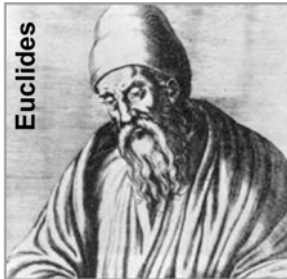
Iria Jorquera Fiaño.
Cuarto ESO-B.

SOCIABLES, AMIGOS E PERFECTOS

Un número é **primo** se é un número **enteiro positivo**, maior que 1, que só é divisible entre si mesmo e a unidade. Iso quere dicir que se dividimos un número primo entre outro número que non sexa o número 1 ou el mesmo, nunca obteremos un resultado enteiro.

Por exemplo: 5 é número **primo** porque só se pode obter resultado enteiro cando se divide entre 1 ou entre 5; e 4 é un número **non primo** porque ademais de obter resultado enteiro cando o dividimos entre 1 e 4, tamén obtemos resultado enteiro se o dividimos entre 2. Os números enteiros que non son primos, chámanse **números compostos**. Se un número é composto, pódese expresar como produto de factores primos dunha única maneira.

Non debes confundir os números **primos** con outro concepto matemático que “soa” de modo similar: os **números primos entre si**. Dous números enteiros son **primos entre si** cando non teñen ningún divisor primo común. Un exemplo de números primos entre si son 12 e 25, que non teñen ningún divisor primo en común (12 e 25 **son primos entre si** pero **non son números primos**). Fíxate que, sen embargo, 12 e 27 **non son primos entre si**, pois os dous son divisibles entre 3.



Euclides

A lista dos números primos comeza así: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41... É unha lista **infinita**, tal como probou **Euclides de Alexandria** no libro IX da súa obra **Os Elementos**. Para demostralo utilizou o método de **reducción ao absurdo**, como se redacta a continuación.

Supoñamos que existe un número finito de números primos e escribámolos TODOS en orde de menor a maior: 2, 3, 5, 7, 11, ... p . Será, pois, p o maior número primo que existe.

Construímos un número n da seguinte maneira: $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p + 1$.

As seguintes observacións son evidentes: n é maior que p ; ademais, se facemos a división de n entre calquera dos números primos que temos ao noso dispor (2, 3, 5, 7, 11, ... p) obteremos sempre de resto 1, o que quere dicir que n non se pode descompoñer en produto de factores primos. Ou sexa, n é un **número primo maior ca p** .

Chegamos a unha contradición que é froito de ter suposto que existe un número finito de números primos, o que demostra que **os números primos son infinitos**.

Arredor do ano 200 a. C. **Eratóstenes de Cirene** creou un **algoritmo** para atopar números primos que aínda hoxe se coñece co nome de **Criba de Eratóstenes**.

Un **número primo**, como dixemos ao comezo, ten só dous divisores. Pero, **¿Cantos divisores ten un número composto?** Para contestar a esta pregunta debemos facer a descomposición do número en factores primos e **fixarnos nos expoñentes** de cada un dos factores. Por exemplo o $8 = 2^3$ ten catro divisores, o $25 = 5^2$ ten tres divisores e o $200 = 2^3 \cdot 5^2$ ten 12 divisores ($12 = 4 \cdot 3$), compróboas:

$$\text{Div}(8) = \{1, 2, 4, 8\} \quad \text{Div}(25) = \{1, 5, 25\}$$

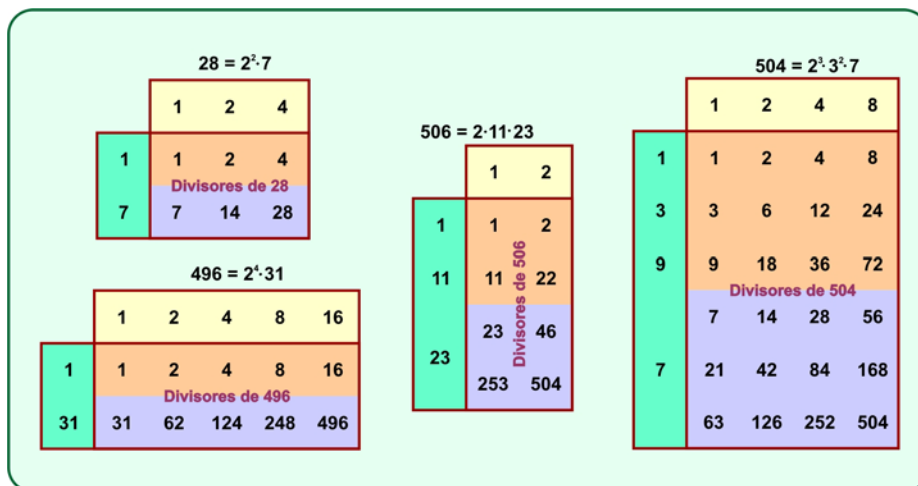
$$\text{Div}(200) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$$

Fíxate que os divisores de 8 son as potencias de base 2 con expoñentes 0, 1, 2 e 3; os divisores de 25 son as potencias de 5 con expoñentes 0, 1 e 2; mentres que os divisores de 200 obtémolos **combinando de todas as maneiras posibles** as anteriormente mencionadas potencias de bases 2 e 5.

Polo tanto se un número enteiro positivo n se descompuxese así: $n = a^p \cdot b^q \cdot c^r$, sendo a , b e c números primos, o **número de divisores** de n será $(p+1) \cdot (q+1) \cdot (r+1)$.

factorizar(6)	→	2 · 3
factorizar(28)	→	2 ² · 7
factorizar(220)	→	2 ² · 5 · 11
factorizar(284)	→	2 ² · 71
factorizar(496)	→	2 ⁴ · 31
factorizar(504)	→	2 ³ · 3 ² · 7
factorizar(506)	→	2 · 11 · 23
factorizar(12496)	→	2 ⁴ · 11 · 71
factorizar(1264460)	→	2 ² · 5 · 17 · 3719

Xa sabemos, pois, cantos divisores ten un número enteiro positivo. Agora a pregunta é: **¿Como podemos conseguir o listado deses divisores?** Existe un método para obtelos utilizando as potencias que forman a súa descomposición en produto de factores primos, construíndo a partir delas unha táboa. Observa as táboas que che presentamos neste debuxo e deduce ti o método.



Agora sumemos os **divisores propios** dalgún destes números; é dicir, os divisores que son menores que o número co que esteamos a traballar. Comecemos sumando os divisores de 504 e 506. Suma dos **divisores propios** de 504:

$$1+2+3+4+6+7+8+9+12+14+18+21+24+28+36+42+56+63+72+84+126+168+252 = 1\ 056$$

Suma dos **divisores propios** de 506: $1+2+11+22+23+46+253 = 358$.

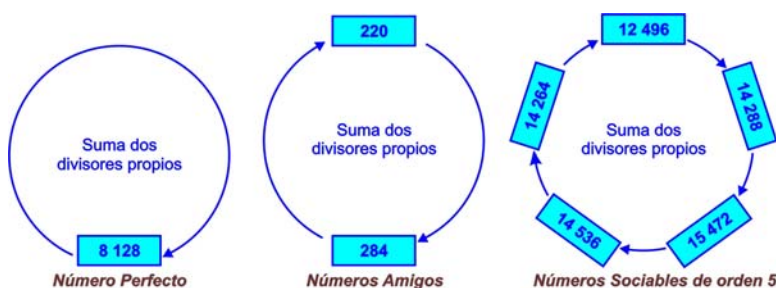
Observa que a suma dos divisores propios de 504 ten un valor **maior** ca 504, aos números enteiros positivos que teñan esta propiedade chamáremoslle **números abundantes**. Pola contra, a suma dos divisores propios de 506 é **menor** que 506, os números aos que lle pasa isto denomínanse **defectivos** ou **defectuosos**.

Sumemos agora os divisores propios de 28: $1+2+4+7+14 = 28$ 😊. E sumemos tamén os divisores propios de 496: $1+2+4+8+16+31+62+124+248 = 496$ 😊.

Os números enteiros positivos que teñen esta propiedade chámanse **números perfectos**. Velaquí unha pequena colección cos primeiros números perfectos, comproba que cumpren a condición que acabamos de citar:

$$6, 28, 496, 8\ 128, 33\ 550\ 336, 8\ 589\ 869\ 056, 137\ 438\ 691\ 328...$$

Se seguimos traballando coas sumas dos divisores propios dos números podemos atopar cousas sorprendentes. Por exemplo, sumemos os divisores de 220: $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284$. Sumemos agora os divisores de 284: $1+2+4+71+142 = 220$ (!!). Destes dous números dise que son **números amigos**. Busca ti outras parellas de **números amigos** e comproba que realmente o son.



número do que partimos. Cando isto ocorre temos unha colección de **números sociables**. Comproba que os números 12 496, 14 288, 15 472, 14 536 e 14 264 forma unha familia de **números sociables de orde 5**. Investiga outras coleccións de **números sociables**.

Nota: O capítulo 11 do libro *Festival mágico-matemático* de Martin Gardner leva por título *Perfectos, amigos y sociables*.



Inés Nóvoa Abelleira.
Cuarto ESO-A.