Ano 7

Número 66

Decembro 2012

MaTHeSiS

Boletín de divulgación matemática

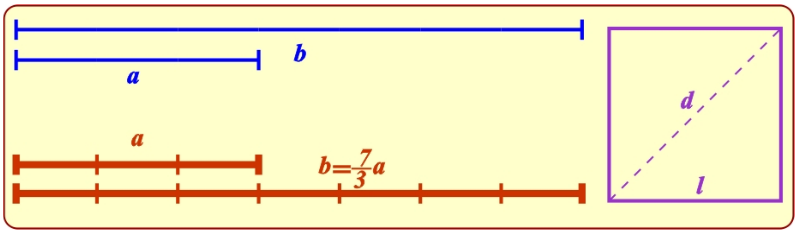
Depósito Legal: C-2693-06

http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/

Os ***pitagóricos*** pensaban que ***o número*** constituía a orixe e o fundamento de todas as cousas. O seu lema era ***Todo é número***. O número 1 era o xerador de todos os demais números, o principio de todo, o *número da razón*; o 2 era o primeiro *número femia*, o *número da opinión*; o número 3 era o primeiro *número macho*, o *número da harmonía* (razón máis opinión); o 4 era para os pitagóricos o *número da xustiza*, o 5 considerábano o *número do matrimonio* (primeiro número femia máis primeiro número macho)... Cando os membros da irmandade pitagórica acadaban a categoría de *matemáticos*, facían o seu xuramento de fidelidade diante do *número sagrado*: ***A Sagrada Tetractis***, o *número do Universo*.

Investiga: ***A Tetractis***. Podes obter algunha información consultando o número 31 de ***DousPiErre***, indo á sección do *Departamento de Matemáticas* dentro de Web do *IES Ramón Otero Pedrayo* e premendo na ligazón ***As nosas publicacións***.

A idea inicial dos ***pitagóricos*** era que se establecían unha *unidade de medida* para unha certa ***magnitude***, sempre poderían utilizala para determinar de maneira exacta o valor de calquera cantidade desa magnitude. Por exemplo: crían que calquera segmento ***b***, ou contén un numero enteiro de veces a outro segmento ***a*** ou, de non ser así, sempre haberá unha parte de ***a*** que poderá encaixarse en ***b*** un número enteiro de veces. Para a figura da dereita, o segmento ***a*** non está contido no segmento ***b*** un número enteiro de veces; sen embargo, un terzo de ***a*** cabe, de maneira exacta, sete veces en ***b***.



Ocorreu un bo día que os pitagóricos se puxeron a medir a *diagonal* dun cadrado tomando o *lado* dese cadrado como *unidade de medida* e, para a súa desesperación, constataron que ***é imposible atopar*** dous ***números enteiros*** que permitan expresar a relación existente entre ***d*** e ***l***. Produciuse tal conmoción na ***Irmandade Pitagórica*** que chamaron ***irracional*** ao número $\sqrt{2}$, o que nos dá a medida da diagonal dun cadrado utilizando o lado como unidade de medida.

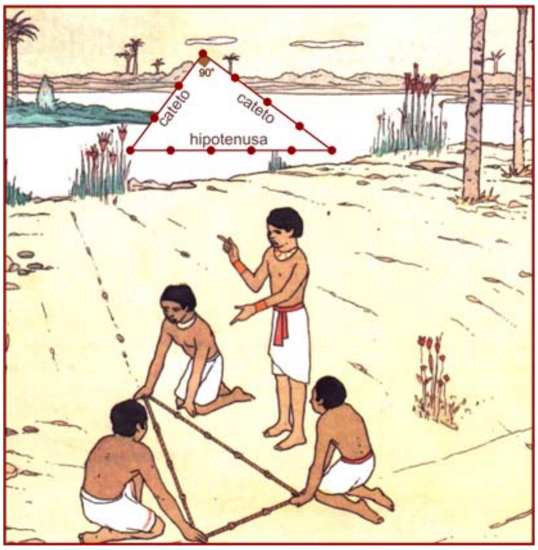
A escaseza de documentación fidedigna sobre ***Pitágoras***, a súa escola e os pitagóricos, provocou que se tomen como válidas moitas informacións que, de tanto repetilas, xa se admiten como certas.

Dise dos ***pitagóricos*** que eran vexetarianos debido a que crían na transmigración das almas e por iso non sacrificaban ningún animal porque podería ser a nova morada da alma dalgún familiar ou amigo xa morto; a pesar diso, afírmase que os pitagóricos tiñan prohibido comer xudías (ou lentellas)...

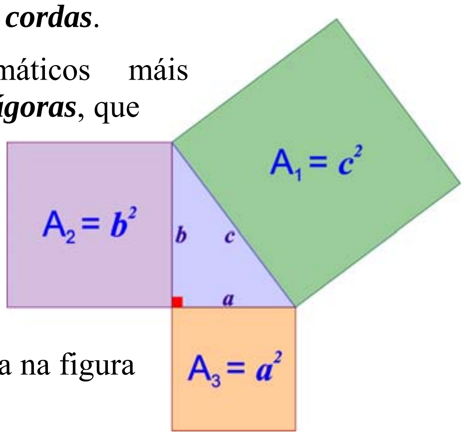
O mesmo ***teorema chamado de Pitágoras*** xa era coñecido con anterioridade en Babilonia. Hai quen xustifica a etiqueta *"Teorema de Pitágoras"* aducindo que foron os pitagoricos os que fixeron a primeira demostración. A lenda di que Pitágoras quedou tan impresionado que mandou sacrificar cen bois en honor aos deuses por serlle revelado tan grande resultado matemático, pero esta soada ofrenda aos deuses entra en contradición coa crenza pitagórica da transmigración das almas que citamos anteriormente.

Parece ser que as palabras ***filosofía*** ("amor pola sabedoría") e ***matemática*** (*"aquilo que se aprende"*) foron acuñadas por ***Pitágoras***.

DÚAS DEMOSTRACIÓNS DO TEOREMA CHAMADO DE PITÁGORAS

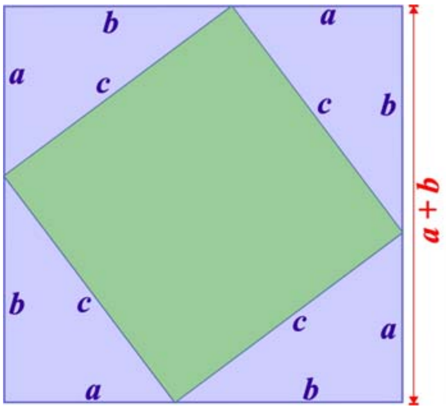


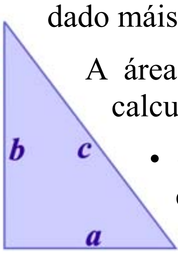
Un ***triángulo*** é ***rectángulo*** se ten un ***ángulo recto***; é dicir, se ten un ángulo que mida ***noventa graos sesaxesimais*** (90º). Nun *triángulo rectángulo*, o lado maior, o que está oposto ao *ángulo recto*, chámase ***hipotenusa*** e os outros dous lados denomínanse ***catetos***. Estas dúas palabras teñen orixe grega, ***cateto*** significa "*que cae perpendicular*" e ***hipotenusa*** quere dicir "*tensar por debaixo*", facendo referencia ao método que tiñan os construtores gregos e os agrimensores exipcios para trazar *ángulos rectos* ***tensando cordas***.



Un dos resultados matemáticos máis coñecidos é o ***Teorema de Pitágoras***, que está directamente relacionado cos *triángulos rectángulos*. Como todos sabemos, di así: *se tomamos un triángulo rectángulo calquera, a área do cadrado construído sobre a súa hipotenusa, coincide coa suma das áreas dos cadrados construídos sobre os seus dous catetos*. É dicir, se utilizamos a notación que se expresa na figura da dereita: $A_1 = A_2 + A_3$. Ou, o que é o mesmo: $\boldsymbol{c^2 = b^2 + a^2}$.

De todo ***teorema*** hai que facer a súa ***demostración***; é dicir, mostrar mediante razoamentos lóxicos que o que se afirma é verdadeiro. Existen varios centos de demostracións do ***Teorema de Pitágoras***, algunhas delas moi coñecidas, ligadas a personaxes famosos: A atribuída aos ***pitagóricos***, a de ***Euclides***, a de ***Platón***, a de ***Leonardo da Vinci***...





Comecemos cunha das demostracións máis tradicionais: Partimos dun ***triángulo rectángulo*** de lados ***a***, ***b***, ***c*** e construímos un *cadrado de lado a+b*, tal como se mostra na figura da esquerda. O cadrado que se constrúe queda formado por catro triángulos rectángulos iguais ao dado máis un cadrado central de lado ***c***.

A área do cadrado grande, o que ten de *lado a+b*, pódese calcular seguindo dous camiños:

- *Camiño 1*(utilizando a medida do seu lado): Como o cadrado ten *lado a+b*, a súa área será $\boldsymbol{A = (a+b)^2}$ ou, o que é o mesmo, $\boldsymbol{A = a^2+2ab+b^2}$. (1)

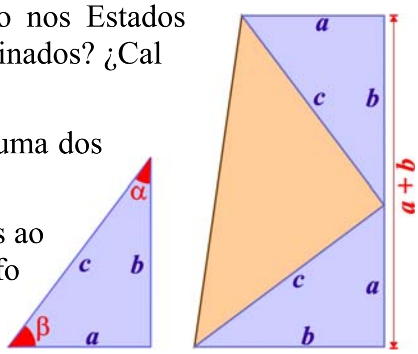
- *Camiño 2* (calculando as áreas das diferentes pezas e sumando): A área do *cadrado central* será $\boldsymbol{A_c = c^2}$, por ser ***c*** a medida do seu lado. Por outra parte, *cada un dos triángulos* terá de área ***a·b/2*** e, como son catro, a área de todos xuntos será: $A_T = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = 2a.b$. Logo, a área do cadrado grande tamén se pode expresar así: $\boldsymbol{A = A_c + A_T = c^2 + 2ab}$. (2)

Como (1) e (2) son dúas maneiras de expresar a área do mesmo cadrado, podemos escribir: $\boldsymbol{a^2+2ab+b^2 = c^2 + 2ab}$ e *restando 2ab nos dous membro* da expresión temos que: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$ que é a expresión do ***Teorema de Pitágoras***.

Xa dixemos antes que existen demostracións do teorema de Pitágoras realizadas por personaxes de sona. Á que me vou referir agora non corresponde a ningún matemático famoso, o autor é un presidente dos Estados Unidos.

James Abram Garfield (19-11-1831 – 19-9-1881) foi o vixésimo presidente dos Estados Unidos. Ademais de militar e político tamén foi profesor de Linguas Clásicas e afeccionado ás matemáticas.

É autor dunha sinxela e orixinal demostración do ***Teorema de Pitágoras*** que se publicou no *New England Journal of Education*. Mencionar, como curiosidade histórica, que Garfield foi o segundo presidente que morreu asasinado nos Estados Unidos (Investiga: ¿Cantos presidentes dos Estados Unidos morreron asasinados? ¿Cal foi o primeiro presidente que morreu por esta causa?)



Outra vez partimos triángulo rectángulo de lados a, b, c, (¿canto vale a suma dos ángulos α+β?). Construímos un trapecio de bases a, b e altura a+b.

O trapecio pódese descompoñer en tres triángulos rectángulos: dous iguais ao dado e outro isóscele de catetos c (se contestaches á pregunta do parágrafo anterior, saberás por que o novo triángulo tamén é rectángulo).

Entón a área do trapecio pódese obter seguindo dous camiños:

Paula Castanedo Gantes. CUARTO ESO-A.

- *Camiño 1* (Utilizando a fórmula para calcular a área dun trapecio): $A=\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{2}$.

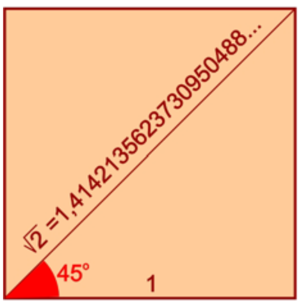
- *Camiño 2* (sumando as áreas dos tres triángulos): $A=2\cdot\frac{a\cdot b}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{2ab+c^2}{2}$.

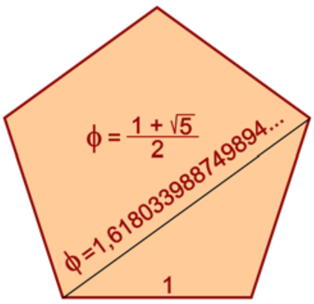
Igualando as dúas expresións: $\frac{a^2+2ab+b^2}{2}=\frac{2ab+c^2}{2}\Rightarrow a^2+2ab+b^2=2ab+c^2\Rightarrow \boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$.

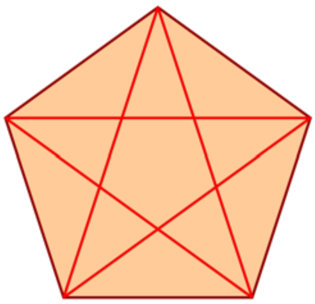
TANGRAM PITAGÓRICO

Os membros da ***comunidade pitagórica*** non tiñan todos a mesma consideración. Dentro da irmandade (ou seita, como se cualifica ás veces) existían varias escalas ou rangos para os que a base do ascenso era a aprendizaxe e o descubrimento de novas ideas e coñecementos que constituían o camiño para acadar a perfección do corpo e da mente.

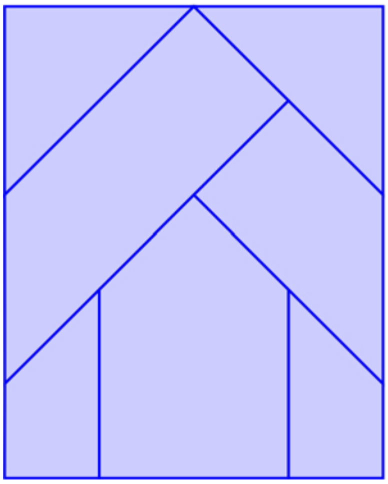
Xa fixemos referencia na páxina 1 á conmoción que se produciu cando descubriron os ***números irracionais*** por non poderen medir a diagonal dun cadrado utilizando o lado como unidade de medida, pero unha vez aberta esa cancela comezou a avanzar unha ringleira enorme de números irracionais que estaban agardando a súa oportunidade. Se no cadrado estaba agochado $\sqrt{2}$, no pentágono regular apareceu $\sqrt{5}$. Ademais, dese polígono de cinco lados e cinco ángulos iguais xurdiu a ***Pentalfa*** (o *polígono estrelado 5/2*, consulta ***Mathesis 62***) que adoptaron os ***pitagóricos*** como seu contrasinal.

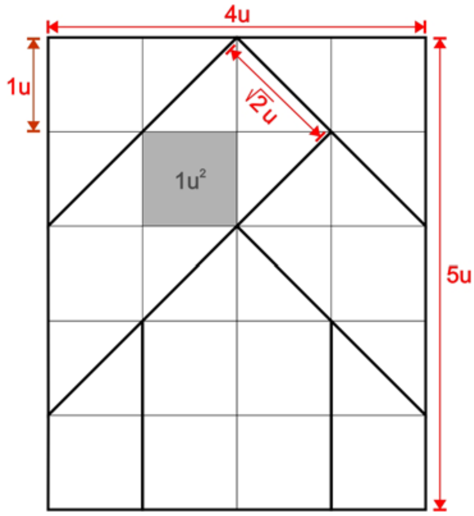


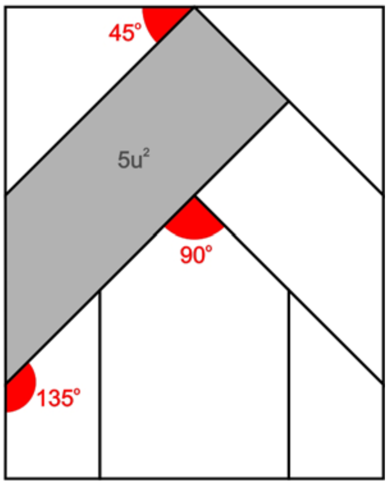




O ***tangram pitagórico*** é un puzle que se constrúe partindo dun ***rectángulo*** no que os lados estean en ***proporción 5/4***. Consta das seguintes sete pezas: Dous ***triángulos rectángulos isósceles*** iguais, catro ***trapecios rectángulos*** (un grande, un mediano e dous pequenos) e un ***pentágono non regular*** –tipo *pentágono casiña*–. Se observas as figuras da seguinte páxina para ver como se obteñen as diferentes pezas, seguro que non vas preguntar polo motivo do por que a este puzle se lle chama ***tangram pitagórico***.







Se debuxamos o ***tangram pitagórico*** sobre unha trama de cadrados, observamos que é doado calcular as medidas dos perímetros, das superficies ou da amplitude dos ángulos interiores das diferentes pezas. Se nos fixamos, por exemplo, no *trapecio* máis grande, obtemos os seguintes resultados:

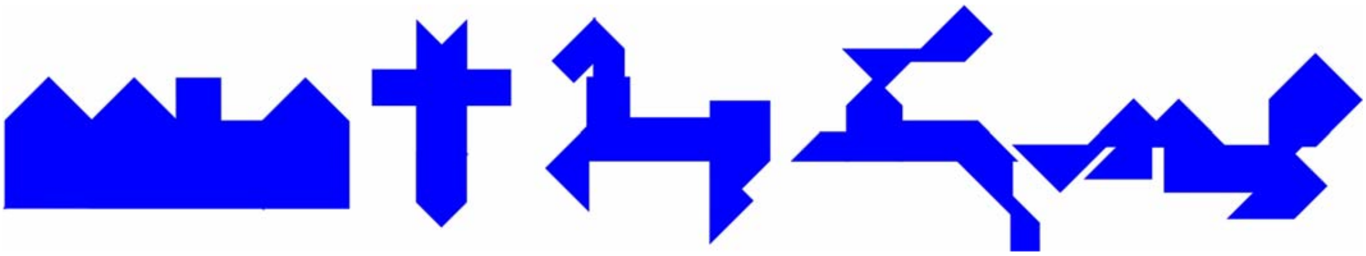
Suma das amplitudes dos ángulos interiores = 90º + 90º + 135º +45º = 360º (recorda que a suma das medidas dos ángulos interiores de calquera cuadrilátero é sempre 360º) ¿Canto suman os ángulos interiores dun pentágono?

$$Perímetro = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + 3\sqrt{2} = 2 + 6\sqrt{2} = 2\cdot(1 + 3\sqrt{2})\ u\ .$$

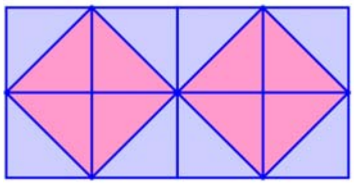
Simplemente observando a figura compróbase que *Area = 5 u²*, podes calcular tamén a área desta peza utilizando as medidas das bases e da altura e aplicando a fórmula correspondente: $A = \frac{\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{5\cdot 2}{2} = 5\ u^2$.

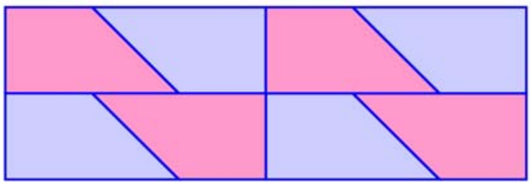
Calcula ti a medida dos perímetros, das superficies e dos ángulos interiores das demais pezas.

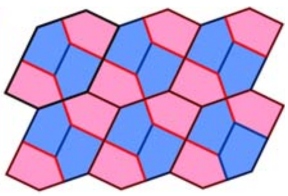
Con este tangram pódense obter siluetas recoñecibles de diversos obxectos. Constrúe un ***tangram pitagórico*** en cartolina e logo trata de reproducir as seguintes. Busca ti outras figuras.



As sete pezas deste tangram pódense utilizar como ***teselas***. Esta cuestión non ten dificultade para os dous triángulos e para os catro trapecios pois sabemos que con calquera *triángulo* ou *cuadrilátero* sempre se pode formar ***mosaico***. Temos constatado que co pentágono regular é imposible formar *mosaico*. ¿Que ocorre co ***pentágono*** que forma parte do tangram? Interpreta ti as seguintes figuras para dar resposta a esta pregunta.¿Por que se pode formar ***mosaico*** con este ***pentágono*** e non co ***pentágono regular***?







Melina Macarena Caviale.
Cuarto ESO-A.