Ano 7
Número 65
Novembro 2012

MaTHeSiS

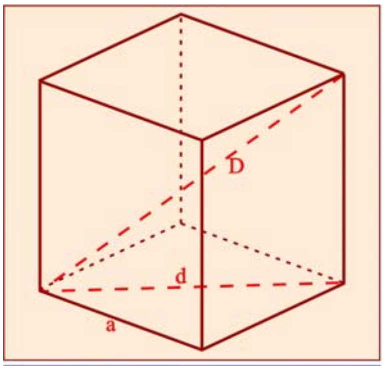
Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06
http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/

VISITA EFÉMERA AO PLANETA CUBO

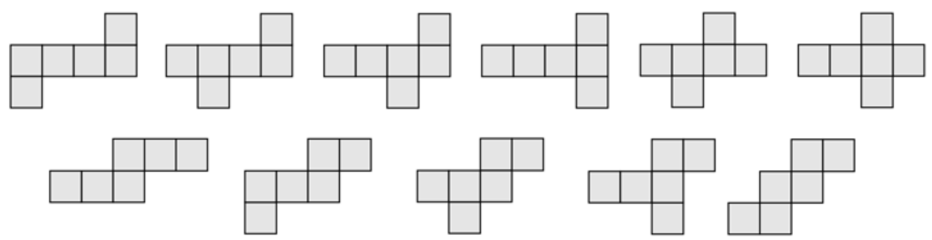
Moitas veces temos falado dos ***sólidos platónicos***, a familia de corpos xeométricos que se denominan actualmente ***poliedros regulares*** (*cubo*, *tetraedro*, *octaedro*, *icosaedro* e *dodecaedro*). Desta vez imos centrar a nosa atención no ***cubo*** e faremos tamén unha pequena digresión para referirnos ao ***octaedro***.

Platón, na súa obra ***Timeo***, estuda polo miúdo este conxunto de *poliedros* e dedícalle ao ***cubo*** e ao ***octaedro*** frases coma estas: *Asignémoslle á terra a forma cúbica, pois o cubo é o corpo que presenta as bases máis firmes. O aire estará ligado coa forma do octaedro, xa que o octaedro ocupa a posición intermedia entre o tetraedro e o icosaedro que representan, respectivamente, ao lume e a auga*.



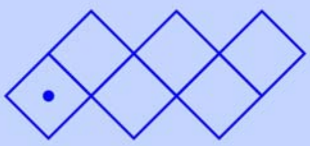
O cubo –***hexaedro regular***– é un ***paralelepípedo*** con todas as caras iguais. Estamos diante dun ***ortoedro*** formado por seis *caras* cadradas, oito *vértices* e doce *arestas*. Recorda que para todo ***poliedro convexo*** se cumpre a ***fórmula de Euler*** (*caras + vértices = arestas + 2*) e o ***cubo*** non vai quedar á marxe desta lei matemática, así: ***6 + 8 = 12 + 2***.

No número 40 de ***Mathesis*** fixemos referencia aos ***poliminós***. Daquela falamos da existencia de 35 ***hexaminós***. Entre esas 35 posibles configuracións formadas por seis cadrados, atópanse as que son os ***11 posibles desenvolvementos dun cubo***.



Os 11 posibles desenvolvementos dun cubo

Completa o seguinte
desenvolvemento dun cubo
para obter un
dado ben construído



Chamaremos ***dado ben construído*** ao que cumpra as seguintes dúas condicións:

As caras cos puntos 1, 2, 3 xúntanse nun vértice seguindo o ***sentido positivo de xiro***.

Os puntos das caras opostas suman 7.

¿Cantas solucións ten este exercicio?

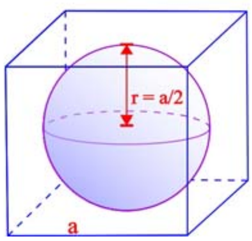
Se un cubo ten *arestas* de medida ***a***, as medidas da súa superficie e do seu volume expresaranse mediante as fórmulas: $S = 6a^2$ e $V = a^3$.

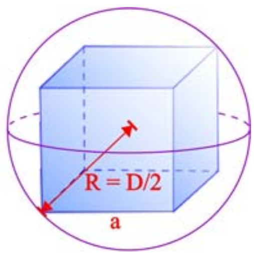
Para calcular as medidas dunha diagonal dunha cara ou dunha das diagonais do cubo (usando a notación indicada na figura da esquerda) utilizaremos o ***Teorema de Pitágoras***:

$$d^2 = a^2 + a^2 \quad \text{logo} \quad d^2 = 2a^2 \quad \text{e así} \quad d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$$D^2 = d^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \quad \text{polo tanto} \quad D = a\sqrt{3}$$

Podemos calcular cal é a relación existente entre os volumes das esferas *circunscrita* e *inscrita* a un cubo calquera. Se tomamos ***a*** como medida da aresta, tendo en conta que o raio da ***esfera***

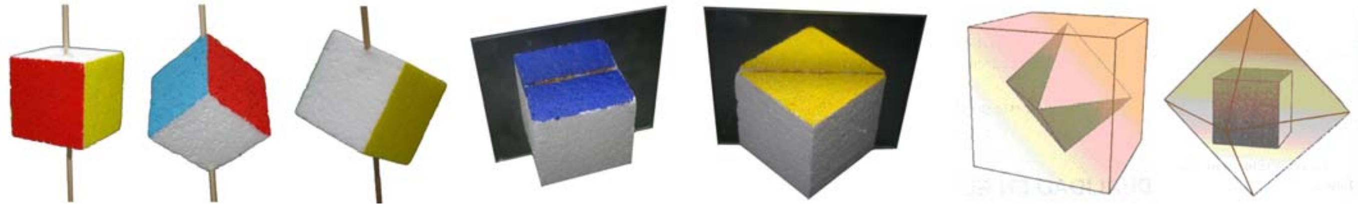




inscrita é r = a/2 e o da ***esfera circunscrita*** R=D/2, obteremos para as esferas inscrita e circunscrita: $V_{EI}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{4}{3\cdot 8}\pi a^3=\frac{\pi a^3}{6}$ e $V_{EC}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{4}{3\cdot 8}3\sqrt{3}\pi a^3=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. Entón:

$$\frac{V_{EC}}{V_{EI}}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}:\frac{\pi a^3}{6}=3\sqrt{3}$$

Nun cubo atopamos 3 ***eixes de rotación de orde catro*** (que pasan polos centros de caras opostas), 4 ***eixes de rotación de orde tres*** (que unen vértices opostos) e 6 ***eixes de rotación de orde dous*** (que pasan polos puntos medios de arestas opostas), un ***centro de simetría*** polo que pasan todos os ***eixes de rotación*** e 9 ***planos de simetría*** que son perpendiculares aos tres eixes cuaternarios e aos seis binarios.



O ***octaedro regular*** está formado por oito caras que son *triángulos equiláteros*, ten seis vértices e doce arestas (cúmprese, evidentemente a *fórmula de Euler*: 8 + 6 = 12 + 2). Observa que o número de caras do cubo coincide co número de vértices do octaedro e o número de caras do octaedro co número de vértices do cubo; ademais podemos colocar un octaedro dentro dun cubo facendo coincidir os vértices do octaedro cos centros das caras do cubo (e viceversa), por estes motivos dise que o ***cubo*** e o ***octaedro*** son ***poliedros duais***.

M. Cobas e ***I. Sandá***.

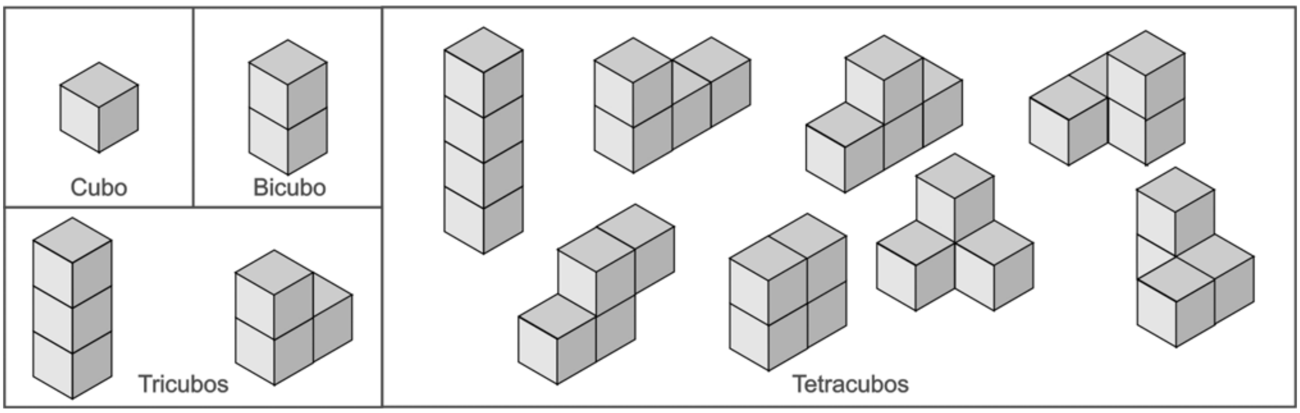
Investiga: ***¿Podes construír un paralelepípedo con todas as caras iguais que non sexa un cubo?***

ACERCAMENTO AO ESTUDO DOS POLICUBOS

Na paxina anterior citamos un número de ***Mathesis*** no quen nos achegamos ao estudo de configuracións xeométricas construídas a partir de *cadrados*. Polo tanto, aquelas indagacións realizáronse nun mundo de *dúas dimensións*, un mundo sobre o *plano*. Imos avanzar agora un chanzo cara arriba, cara ao ***espazo***, moverémonos desta volta nun territorio en ***tres dimensións***.

Un ***policubo*** é un corpo que se obtén ao pegar por ***caras completas*** *cubos* da mesma *aresta*.

A ***orde*** dun ***policubo*** é o número de cubos que se necesitan para construílo. Evidentemente, só hai ***un*** policubo de ***orde un***, que é o propio ***cubo***. Tamén hai ***un*** único policubo de ***orde dous –bicubo–***, que se obtén ao pegar ***dous cubos*** por cadansúa cara (dá igual as caras que usemos para unir os dous cubos, xirando a nosa construción obteremos a posición desexada). Cando chegamos á ***orde tres*** conseguimos ***dous*** tipos de ***tricubos*** que se obteñen ao tratar de engadir ao ***bicubo*** un novo ***cubo*** de todas as maneiras posibles pero sen obter construcións repetidas.



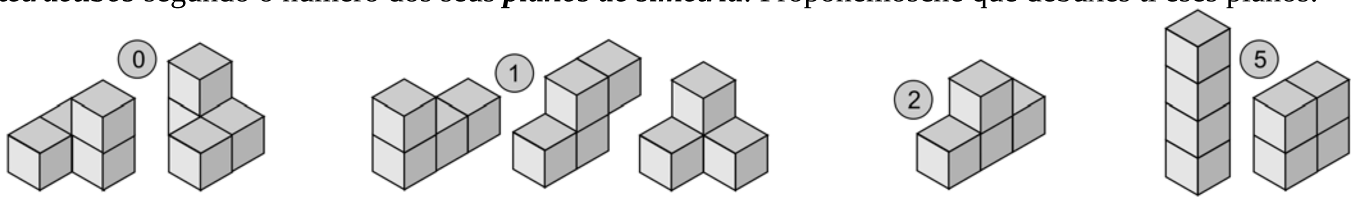
A medida que aumenta a ***orde*** das construcións o número de ***policubos*** é cada vez maior, pois van crecendo as posibilidades de *combinación* cando engadimos un novo ***cubo*** aos ***policubos*** construídos de ***orde*** anterior. Así vemos que a partir dos ***dous tricubos*** podemos crear ***oito tetracubos***, é dicir, ***oito policubos*** de ***orde catro***.

Calcular o ***volume*** dun ***policubo*** e moi fácil. Se facemos as construcións utilizando cubos con medida de aresta $\boldsymbol{a}$, o volume do ***cubo*** de partida será $\boldsymbol{a^3}$, o volume do ***bicubo*** será $\boldsymbol{2a^3}$, o dos ***tricubos*** $\boldsymbol{3a^3}$, $\boldsymbol{4a^3}$ para os ***tetracubos***, $\boldsymbol{5a^3}$ no caso dos ***pentacubos*** e así sucesivamente.

Para calcular as ***medidas*** das respectivas ***superficies***, deberemos contar o número de caras que quedaron visibles despois de construír cada un dos ***policubos*** (podes axudarte das figuras anteriores para facer o reconto). Obtemos $\boldsymbol{6a^2}$ para o ***cubo***, $\boldsymbol{10a^2}$ será a área do ***bicubo*** e $\boldsymbol{14a^2}$ para os dous ***tricubos***.

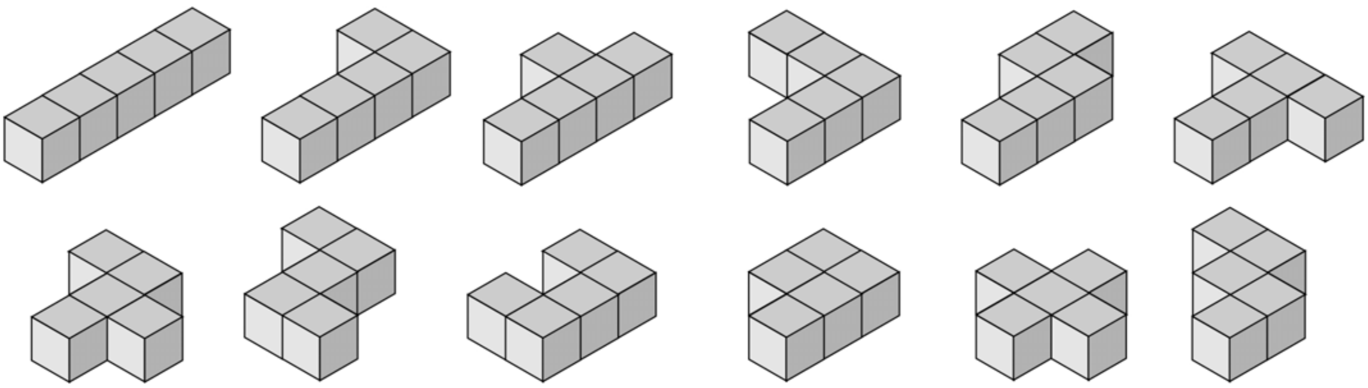
Unha primeira observación condúcenos a pensar que a área dos diferentes ***tetracubos*** é $\boldsymbol{18a^2}$, pero un deles ten $\boldsymbol{16a^2}$ de medida de superficie (¿cal é o ***tetracubo*** que ten esta área?).

Podemos facer un estudo dos ***policubos*** para ver cales teñen ***eixes de rotación***, indicando cal é a ***orde*** deses eixes. Ou investigar cales posúen ***planos de simetría***. No debuxo seguinte clasificamos os ***tetracubos*** segundo o número dos seus ***planos de simetría***. Propoñémosche que debuxes ti eses planos:

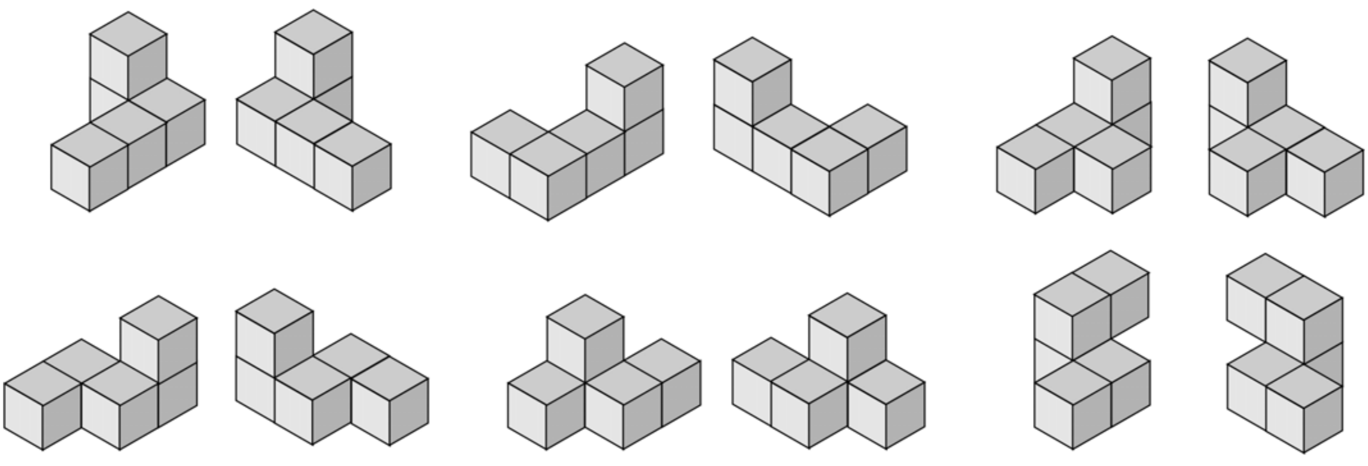


Observa que os dous ***tetracubos*** que forman o primeiro grupo, os que non teñen planos de simetría son ***simétricos entre eles***.

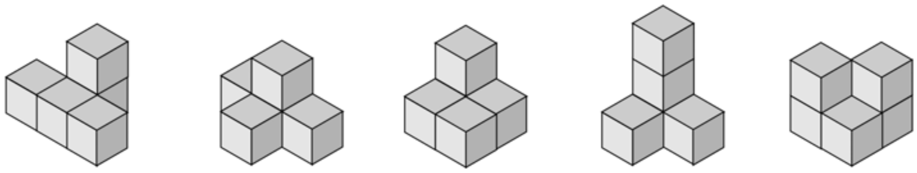
¿Imaxinas cantos ***pentacubos*** existen? A resposta é ***29***. Imos representalos a continuación agrupándoos en tres categorías. En primeiro lugar, velaquí os doce ***pentacubos*** que poden ser considerados coma a versión no espazo dos doce ***pentaminós:***



Agora outros doce que forman seis parellas con ***pentacubos simétricos entre si***:



E, por último, os cinco restantes (¿que teñen en común estes cinco pentacubos?):



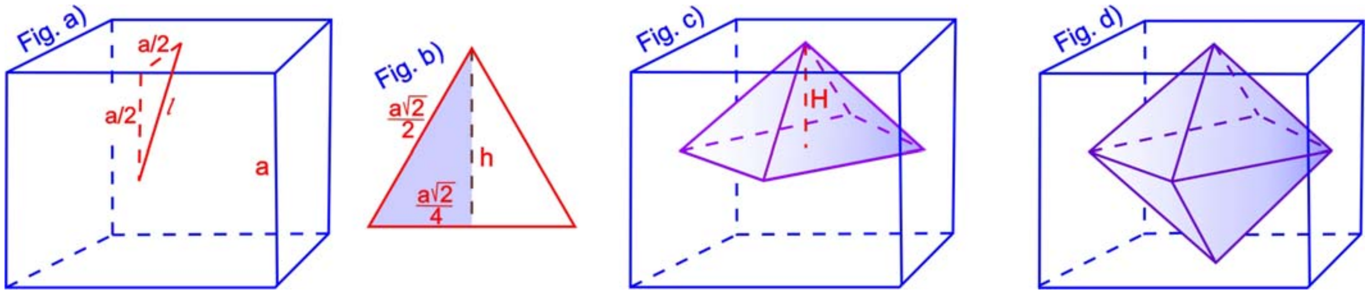
Manuel Cobas Ares.
Cuarto ESO A.

O OCTAEDRO INSCRITO NO CUBO

Dixemos anteriormente que o ***hexaedro regular*** e o ***octaedro regular*** son ***poliedros duais***.

Vai ser agora o noso obxectivo establecer cales son as relacións que existen entre as superficies totais e os volumes dun cubo de ***aresta a*** e a do octaedro nel inscrito.

Imos comezar calculando cal é a medida da aresta, ***l***, do octaedro. Esa medida coincide coa do segmento que une os centros de dúas caras do cubo que teñan unha aresta común. Aplicando o *teorema de Pitágoras* (observa a ***Fig. a***), temos: $l=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{2\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. As caras do octaedro (ten en conta agora as ***figuras b*** e ***d***) son ***triángulos equiláteros*** que teñen lados de lonxitude ***l***. A medida do perímetro destes triángulos será, evidentemente, $P=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.



¿E cal é a medida da superficie deses triángulos? Fixémonos na ***Fig. b)***: a medida da base coincide coa lonxitude do segmento ***l*** e para calcular a altura utilizaremos outra vez o *teorema de Pitágoras*.

$h=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}-\frac{2a^2}{16}}=\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{8}}=\sqrt{\frac{3a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Así a área do triángulo será:

$S_T=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a\sqrt{6}}{4}=\frac{a^2\sqrt{12}}{16}=\frac{2a^2\sqrt{3}}{16}=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. E a área do octaedro –oito caras–: $\boxed{S_O=8\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{8}=a^2\sqrt{3}}$

A relación das superficies entre cubo é octaedro é pois: $\frac{S_C}{S_O}=\frac{6a^2}{a^2\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$.

O octaedro non deixa de ser unha ***bipirámide***. Fixémonos na ***pirámide*** que temos na ***Fig. c)***: a base é un cadrado de lado $l=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ e a súa altura é $H=\frac{a}{2}$. A área da base será: $A_B=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$.

Calculamos o volume da pirámide e do octaedro: $V_P=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{12}$ e $\boxed{V_O=2\cdot V_P=2\cdot\frac{a^3}{12}=\frac{a^3}{6}}$

Iago Sandá Gómez.
Cuarto ESO A.

¡Parece mentira pero o volume dun cubo é equivalente a seis dos seus octaedros inscritos!: $\frac{V_C}{V_O}=6$.