Ano 6
Número 57
Marzo 2012

MaTHeSiS
Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

http://www.edu.xunta.es/centros/iesoteropedrayocoruna/

LECTURA PARA MOITAS VIDAS

¡A poesía é o gran milagre do mundo!
Luis Pimentel.

Dende hai unhas semanas, nos andeis da sección de matemáticas da ***Biblioteca do IES Ramón Otero Pedrayo*** hai un libro de poesía. Este libro non é un libro calquera.

¿Que ten de especial? Para facer a súa lectura é indispensable dispoñer de MOITO tempo: ¡Necesítanse moito máis de *2 000 000 de séculos*!

Se isto é realmente certo, poderías pensar que estou a falar dun libro moi groso, con letra moi pequena. Nada máis lonxe da realidade: para encadernar o noso libro houbo que imprimir unicamente dez páxinas, en cada páxina catorce liñas e en cada liña catorce sílabas –¡1960 sílabas que fan agromar lectura para máis de *3 000 000 de vidas*!–.

Raymond Queneau (21 de febreiro de 1903 – 25 de outubro de 1976) foi un escritor francés cunha importante produción literaria. Graduouse en filosofía e psicoloxía na *Sorbona* de París e tamén alí estudou matemáticas (foi membro da *Sociedade Matemática de Francia*). Adquiriu, pois, unha sólida formación en ciencias e letras e traballou, fundamentalmente, como periodista. Pertenceu ao *movemento surrealista*.

En 1961 publicou un libro sorprendente: ***Cent Mille Milliards de Poèmes***. Partindo de dez páxinas nas que se imprimiran cadanseu soneto –catorce versos, pois, en cada páxina–, procédese a recortar unha a unha para que cada verso (cada liña) quedase nunha banda independente co obxectivo de poder combinalo cos outros trece versos de cada un dos dez poemas.


Así, as dez bandas que conteñen o primeiro verso de cada poema podémolas combinar coas dez bandas nas que están escritos os segundos versos e obteremos $10\times10 = 10^2 = 100$ posibilidades para os dous primeiros versos; a estas 100 posibilidades pódeselle xuntar o terceiro verso de cada un dos 10 poemas: teriamos $100\times10 = 10\times10\times10 = 10^3 = 1000$ composicións diferentes ao utilizar os tres primeiros versos...

Se proseguimos con este proceso ata o final, como dispoñemos de 14 versos por cada páxina recortada, o número total de poemas resultantes será: $10\times10\times10\times\overset{14}{\ldots}\times10 = 10^{14} = 100\,000\,000\,000\,000$ ***¡cen billóns de poemas!*** Ou, o que é o mesmo, ***¡cen mil millardos de poemas!*** (en decembro de 1995 A RAE aprobou o neoloxismo ***millardo*** para denominar a mil millóns).

$100 = 10^2$	Cen
$1\,000 = 10^3$	Mil
$1\,000\,000 = 10^6$	Un millón
$1\,000\,000\,000 = 10^9$	Mil millóns Millardo
$100\,000\,000\,000 = 10^{11}$	Cen mil millóns Cen millardos
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	Un billón
$100\,000\,000\,000\,000 = 10^{14}$	Cen billóns Cen mil millardos

Investiga:
Neoloxismo
Soneto
Verso alexandrino
Cesura
Hemistiquio

En novembro de 2011, para conmemorar o 50 aniversario da aparición do libro orixinal e como homenaxe a ***Raymond Queneau***, a editorial *Demipage* publicou ***Cien mil millones de poemas***. ¿Por que o título da versión española é este? ¡Vai ser que é cuestión de duro *marketing*!

Colle o libro na biblioteca e terás nas túas mans ***cen billóns de poemas***. Se utilizas un minuto para ler cada un, ¿cantos anos necesitarás para rematar a lectura?

FÓRMULA DE BENFORD

Na nosa vida moitas cousas suceden de forma *aleatoria*; por iso as matemáticas teñen parcelas de estudo dedicadas a cuestión relacionadas co *azar*. Por exemplo: ¿cantas veces che preguntaron cal é a probabilidade de que saia 1 ao lanzar un dado?

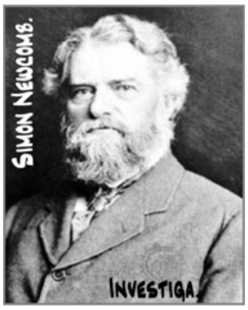
Se realizamos esta experiencia cun dado que non estea trucado, *a probabilidade* de obter 1 é a mesma ca de obter 4, ou 3, ou 6... a probabilidade de que ocorra un *calquera* destes ***sucesos elementais*** é, como sabemos, 1/6. Por esta razón, diremos que os resultados que podemos obter son ***sucesos equiprobables***.

Sen embargo, non todas as *experiencias aleatorias* se axustan a este modelo. Eu puiden comprobar que, para un determinado tipo de chinchetas, a probabilidade de que caeran coa punta cara arriba era do 65%, fronte a un 35% de probabilidade de que a punta quede cara un lado.

Un exemplo moi curioso do cálculo de probabilidades foi a experiencia que realizou en 1777 o matemático francés ***George-Louis Leclerc, conde de Buffon***. O experimento consiste en lanzar unha agulla sobre un taboleiro no que se debuxaran rectas paralelas separadas entre elas a medida da agulla; a probabilidade de que ao lanzar a agulla quede sobre o taboleiro cortando a unha das liñas é $2/\pi$.

Coas observacións anteriores queremos deixar claro que non son sempre ***equiprobables*** os ***sucesos elementais*** que se obteñen ao realizar unha ***experiencia aleatoria***. ¿A onde queremos chegar? Iniciemos xa o relato da historia principal.

As calculadoras, que agora usamos a todas horas, constitúen un recurso que se vén utilizando dende hai tan só uns corenta anos. Para facer os cálculos máis complicados algúns dos nosos profesores tiveron que botar man das ***táboas de logarítmos*** –libros que conteñen listados cos *logarítmos dos números*–.



En 1881 o matemático e astrónomo ***Simon Newcomb***, cando consultaba nunha biblioteca unhas *táboas de logarítmos*, fixouse en que as primeiras páxinas do libro estaban moito mais desgastadas que as follas finais. A partir dese feito ocorréuselle pensar que os logaritmos dos números que comezaban polas cifras mais baixas, e que estaban ao principio do libro, eran moito mais consultados que os que estaban escritos nas follas finais.

A súa intuición levouno a preguntarse se ocorría que, dos números que empregamos na nosa vida, os mais usados son aqueles que comezan pola cifra máis baixa, sendo 1 a cifra que máis se repite, e 9 a menos empregada.

Newcomb constatou as súas sospeitas utilizando series de datos tiradas da vida real. Comprobou que moitas colección de datos tiñan un comportamento similar e creou unha fórmula que asignaba a probabilidade de que as cantidades que aparecían nesas distribucións de datos comezasen por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Os resultados que obtivo quedan resumidos no gráfico de barras anterior. ***Simon Newcomb*** publicou un artigo cos resultados que descubrira pero ese escrito tivo moi pouca repercusión.

En 1938 *Frank Benford*, físico que traballaba na *General Electric*, ao parecer de maneira totalmente independente das investigacións de *Simon Newcomb*, decatouse do mesmo patrón de aparición do primeiro díxito en listaxes de datos coas que el traballaba.

Recolleu máis de 20 000 números pertencentes a mostras de natureza moi diversa (lonxitudes de ríos, poboacións de cidades, datos de competicións deportivas, táboas de datos tirados de revistas...) e comprobou que moitos deles cumprían a pauta citada anteriormente. Decatouse de algo máis: a tendencia observada cumpríase moito mellor cando mesturaba os datos procedentes de mostras de natureza diversa, incluso no caso de non cumprirse para unha ou varias delas se se tomaban de maneira independente.

Formulou a que agora se coñece como ***Lei de Benford*** ou ***lei do primeiro díxito***. Esta lei axustase a unha fórmula que nos permite calcular a probabilidade de que un determinado díxito ***n*** apareza en primeiro lugar:

$$P(n) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

¡RECORDA!

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

Primeiro díxito	*Porcentaxe segundo a Formula de Benford*	*Porcentaxe de aparición cos meus datos*	*Porcentaxe de aparición na sucesión de Fibonacci*
1	*30,1*	*27,7*	30,4
2	*17,6*	*16,7*	17,2
3	*12,5*	*9,1*	12,8
4	*9,7*	*10,2*	9,2
5	*7,9*	*8,1*	8,4
6	*6,7*	*9,4*	6,0
7	*5,8*	*6,9*	6,0
8	*5,1*	*7,1*	5,6
9	*4,6*	*8,9*	4,4

Colle a túa calculadora e aplica a fórmula anterior para calcular cal é a probabilidade de que o primeiro díxito das cantidades que aparezan nunha distribución de datos que se axuste á **Lei de Benford** sexa 1, 2, 3,... ou 9. Evidentemente, existen moitas distribucións de datos para as que non se verifica á **Lei de Benford**.

Eu recompilei un total de 394 datos, sacados das seguintes listas: Números primos menores de 1000 (170 datos), lonxitude de ríos de España (119 datos), constantes matemáticas (13 datos), constantes físicas (36 datos), poboación de países da Unión Europea (28 datos) e superficie deses países (28 datos). Tamén miramos na clase cal era o díxito polo que comezaba cada un dos 250 primeiros termos da ***Sucesión de Fibonacci***. Os resultados obtidos son os que se mostran na táboa precedente.

Apreciase unha certa similitude entre as porcentaxes que obtiven e as porcentaxes que son de esperar segundo a ***Lei de Benford***. As diferenzas son debidas, loxicamente, ao escaso número de datos que utilicei. Fíxate, ademais, que os poucos termos tomados da *Sucesión de Fibonacci* se axustan asombrosamente ben ao que estipula a fórmula.

Daniel Ríos Meizoso. Cuarto ESO-A.

¿Sabías que a ***Lei de Benford*** é unha ferramenta que se utiliza para detectar a fraude fiscal? ***Investígao***.

Fonte: ***La proporción áurea***. *Mario Livio*. Ariel.

NÚMEROS TRANSCENDENTES

¿Cantas veces temos falado dos números? ¿Qué sería da ciencia sen eles? ¿Quen pode vivir sen utilizalos? De maneira cotiá usámolos para poñer orde en multitude de situacións (*ordinais*) ou para expresar cantidades (*cardinais*) e todos os beneficios que nos prestan obtémolos a través da utilización de tan so dez ***cifras***, ***algarismos*** ou ***díxitos***: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Ao longo da ESO fixemos diferentes ampliacións dos nosos campos numéricos ata que chegamos ao reino dos ***números reais*** –parece ser, segundo nos din, que hai vida numérica máis aló dos ***reais***, mundos onde existen as raíces pares de números negativos... –.

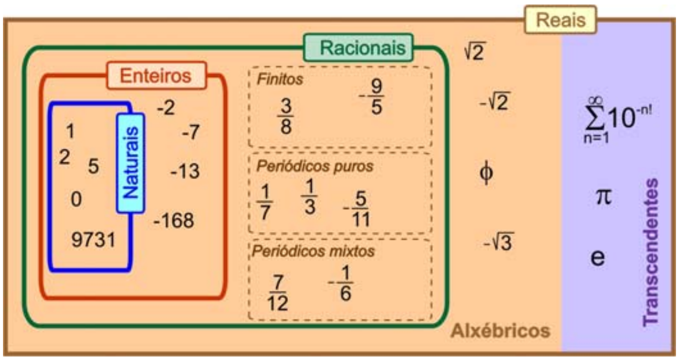
Temos feito *clasificacións* dos ***números reais***; frecuentemente separámolos en dúas importantes familias: ***racionais*** e ***irracionais***. Dentro dos ***racionais*** volvemos facer distinción entre os que teñen unha forma ***estritamente fraccionaria*** e os que son ***enteiros***, e neste último grupo segregamos os ***enteiros negativos*** dos ***naturais*** (¡os *naturais*!, os primeiros cos que traballamos. A *natureza* é moi sabia...).

Hoxe queremos facer unha clasificación dos números reais dende un novo punto de vista. Na táboa da dereita mostramos dúas sinxelas *ecuacións polinómicas* coas súas respectivas *solucións* (comproba que as solucións son correctas e di a que familia numérica pertence cada unha delas: ***naturais***, ***enteiros negativos***, ***fraccionarios***, ***irracionais***...).

Ecuación	*Solucións*			
$42x^2+x-1=0$		$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	
$x^4-6x^2+8=0$	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2

Os números que se poden obter como ***solución*** dunha ***ecuación polinómica*** con ***coeficientes racionais*** chámanse ***números alxébricos***. Polo tanto, os números ***enteiros***, os ***racionais*** e moitos ***irracionais*** son ***números alxébricos***.

Pero ***non todos os números reais son alxébricos***. ***Existen números irracionais*** que non se poden obter como ***raíces*** dun polinomio con ***coeficientes racionais*** (non son ***solucións*** de ***ecuacións polinómicas***), eses números foron bautizados como ***números transcendentes*** por ***Leibniz*** en 1684.



John Wallis, xa polo 1656, afirmaba que π non era ***número alxébrico***, pero a demostración de que π é un ***número transcendente*** foi realizada en 1882 por ***Karl Lindemann***.

A demostración de que o ***número e*** é ***transcendente*** deuna ***Charles Hermite*** en 1873.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Investiga: ¿De que maneira están relacionados ***Chardes Hermite*** e ***Juan Jacobo Durán Loriga***?

Factorial de n, *n!*

n! = n·(n-1)·(n-2)· ... ·3·2·1

Exemplos:
1! = 1
2! = 2·1=2
3! = 3·2·1= 6

Así e todo, o primeiro que conseguiu demostrar que un número era ***transcendente*** foi ***Joseph Liouville*** en 1844. ese número, que é coñecido como ***constante de Liouville***, é o seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}=10^{-1}+10^{-2}+10^{-6}+10^{-24}+\ldots=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{24}}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}=0{,}1+0{,}01+0{,}000001+\ldots=0{,}110001000000000000000000100\ldots$$

Lucas Fernández Fernández
Cuarto ESO-A

IN MEMORIAM

Wisława Szymborska
1923 - 2012

O pasado 1 de febreiro faleceu a poetisa polaca **Wisława Szymborska**. Foi ***Premio Novel de Literatura*** en 1996 e referímonos a ela no número 12 de *Mathesis* onde transcribimos o seu fantástico poema dedicado ao ***transcendente número π***.
Wisława Szymborska, paz para ti alá onde te atopes.

Busca o número 12 de Mathesis na web do instituto para ler o poema.