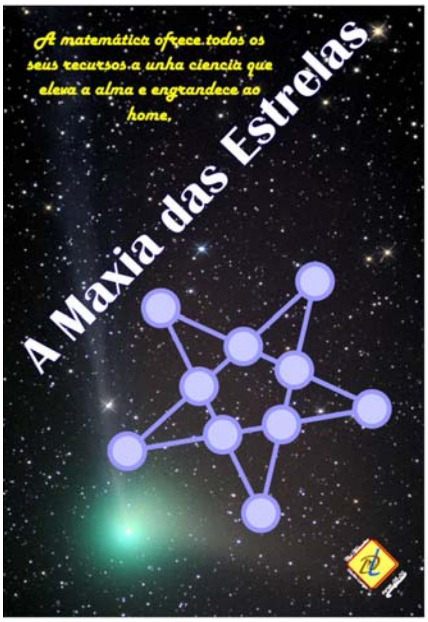
Ano 3
Número 29
Xuño 2009

MaTHeSiS
Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

http://centros.edu.xunta.es/iesoteropedrayo.coruna/drupal

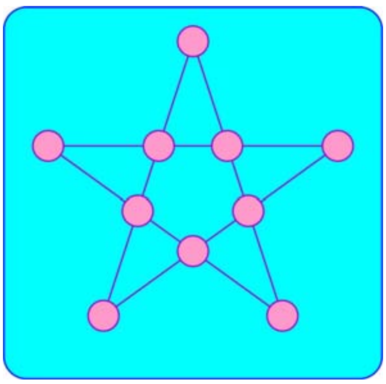


Un grupo de alumnas e alumnos, entre os que formaron parte do ***Club Matemático Durán Loriga***, estiveron traballando durante este curso en dous bloques de actividades: ***A maxia das estrelas*** e ***Coruña teselada***.

Estes títulos non foron elixidos por casualidade. Por unha parte, o 2009 foi declarado *Ano Internacional da Astronomía* e con este pretexto estivemos traballando arredor das estrelas máxicas. Por outro lado, o pasado 12 de maio, coma cada ano, celebrouse o *X Día escolar das matemáticas* que nesta edición tivo por lema **A cidade e as matemáticas**.

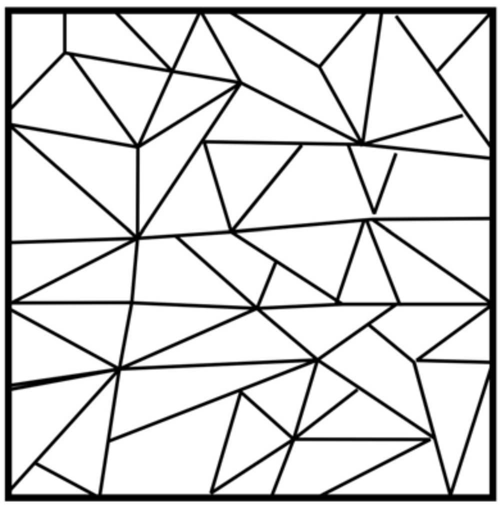
As actividades realizadas e os materiais que construímos xa foron presentados no *XIV Día da Ciencia na Rúa* e na *III Feira Matemática*. Como remate de curso, presentámolos unha vez máis dentro do contexto da ***X Semana Matemática do IES Ramón Otero Pedrayo***.

En matemáticas chámase estrela máxica a unha familia de números que se poden dispoñer sobre os vértices dun polígono estrelado de tal xeito que todas as liñas sumen a mesma cantidade.

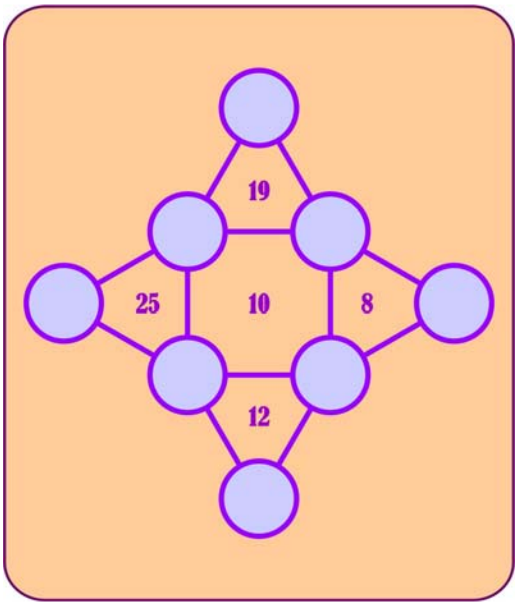


Coloca nesta estrela os números primos 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 41 e 43 de tal xeito que todas as liñas sumen 84.

¿Onde está a estrela de cinco puntas?

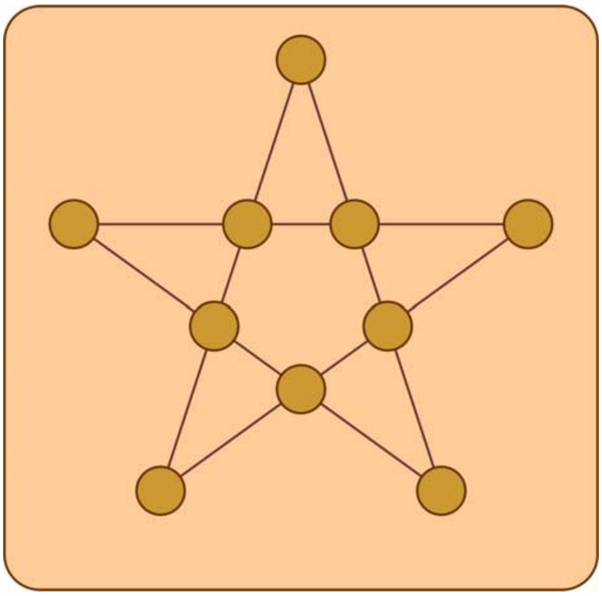


Estrela para Fibonacci



Colocas os oito primeiros termos da sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21) para obter as sumas que se indican en cada caso.

A estrela antimáxica



Coloca os números do 1 ao 10 nos vértices da estrela de xeito que todas as liñas teñan sumas diferentes.

SUCESIÓNS POR RECORRENCIA E NÚMERO PLÁSTICO

¿Cantas veces temos explicado que é unha *sucesión numérica*? Pois repitámolo unha vez máis: Cando falamos dunha ***sucesión numérica*** referímonos a unha colección *infinita* e *ordenada* de números. Isto é, falamos dun primeiro elemento ou termo inicial, dun segundo, dun terceiro... dun *n-ésimo* (o que ocupa o lugar xenérico n) e así sucesivamente. Na maioría dos casos existirá unha *lei*, unha *fórmula*, que nos permitirá calcular o valor de calquera termo a partir unicamente do lugar que ocupa. Con a_1 representaremos o valor do primeiro termo da sucesión, con a_2 o do segundo, ... con a_{1000} o que ocupa o lugar 1000 e, en xeral, con a_n o que se atopa no lugar xenérico n.

Así, por exemplo, a sucesión

2, 5, 10, 17, 26...

pódese escribir a partir da fórmula $\boldsymbol{a_n=n^2+1}$ que nos permite calcular o valor dun termo calquera (o que ocupa o lugar 15, poñamos por caso) sen máis que calcular o cadrado do lugar no que estamos e sumar 1 ($a_{15} = 15^2+1 = 226$).

Noutros casos, non dispoñemos da fórmula que nos permite calcular o valor dos termos dunha sucesión e, non obstante, podemos escribir todos os temos que queiramos *recorrendo* a algunha lei aplicada a uns poucos termos coñecidos. Dunha sucesión obtida desta maneira diremos que se escribiu ***por recorrencia***.

Por exemplo, a sucesión

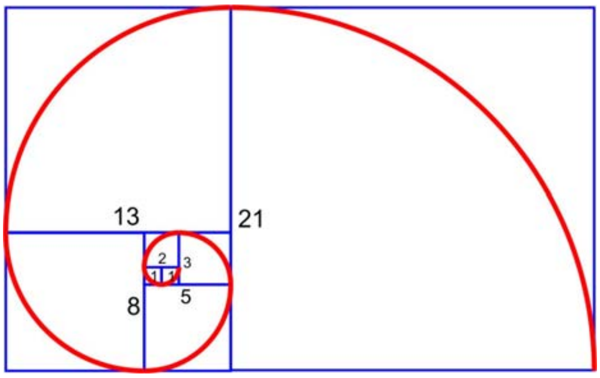
2, 3, 7, 23, 87...

constrúese tomando 2 como primeiro termo e os demais termos obtéñense multiplicando o seu anterior por 4 e restando 5. Esta *lei de recorrencia* exprésase matematicamente así:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 4a_{n-1} - 5 \end{cases}$$

Sen lugar a dúbidas, a sucesión máis coñecida entre as que se acostuma poñer como exemplo cando se fala de sucesións dadas por recorrencia, é a ***sucesión de Fibonacci***:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...



obtida a partir da lei: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$. É dicir, cada termo acádase sumando os dous anteriores, tomando os dous primeiros o valor 1.

Na figura mostramos como se pode trazar unha espiral a partir dos cadrados que teñen como medida dos seus lados os termos da *sucesión de Fibonacci*.

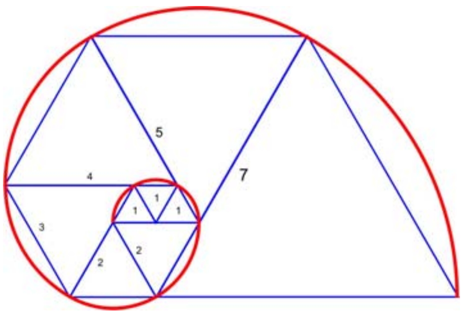
O matemático francés ***Édouard Lucas*** debe parte do seu recoñecemento aos estudos que realizou arredor das chamadas *sucesións xeneralizadas de Fibonacci*, que comezan por dous enteiros positivos calquera e, a partir deles, obtéñense cada un dos demais termos da sucesión facendo a suma dos dous termos precedentes.

A sucesión definida así: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \end{cases}$ que vén sendo ***1, 3, 4, 7, 11, 18, 29***... coñécese hoxe en día como a ***sucesión de Lucas***.

Lucas chegou a dar unha fórmula explícita para calcular o n-ésimo termo da sucesión de *Fibonacci* a partir do lugar que ocupe ese termo, sen ter que *recorrer* aos termos anteriores:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

En números anteriores de ***Mathesis*** (vede os boletíns 19 e 25) témonos referido ao famosísimo ***Número de Ouro*** e, en xeral, aos ***números metálicos***. Puxemos de manifesto que o *número de ouro*, ***Φ***, é un *número irracional* que coincide cunha das solucións da ecuación $\boldsymbol{x^2-x-1=0}$ e ten valor aproximado ***1.6180339887...*** Ademais, *a razón entre cada par de termos consecutivos da sucesión de Fibonacci vai oscilando por enriba e por debaixo do valor do número de ouro, achegándose cada vez máis a el.* Ou sexa: ***a sucesión formada polos cocientes de termos consecutivos da sucesión de Fibonacci, ten por límite o número de ouro, Φ***.



Ímonos ocupar agora doutras dúas famosas sucesións obtidas ***por recorrencia***.

A partir de $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_n = a_{n-3} + a_{n-2} \end{cases}$ obtemos:

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28... que se coñece como ***sucesión de Padovan***. Denomínase así na honra do arquitecto *Richard Padovan*, nacido en 1935.

Unha sucesión con lei de formación similar á de Padovan, pero que utiliza diferentes valores iniciais, foi estudada por *Édouard Lucas* en 1876. En 1899 as súas ideas foron desenvolvidas por ***R. Perrin*** e por iso se coñece como ***sucesión de Perrin***. Defínese do seguinte modo:

$\begin{cases} a_1 = 3,\ a_2 = 0,\ a_3 = 2 \\ a_n = a_{n-3} + a_{n-2} \end{cases}$, o que nos dá: 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90...

¿E que pasa se nos poñemos a dividir termos consecutivos das sucesións de *Padovan* e *Perrin*, de forma similar ao que se fixo coa sucesión de Fibonacci?

É fácil comprobar que, en ambos casos, as correspondentes sucesións de cocientes tenden cara un límite común: o número $\psi = 1{,}32471795$... que se denomina ***NÚMERO PLÁSTICO***.

O ***número plástico foi*** descuberto en 1928 polo arquitecto, convertido a monxe benedictino, ***Dom Hans van der Laan*** (1904-1991). O nome de *plástico* é debido á estreita relación que garda coa arquitectura e as artes plásticas, pois *Dom Hans van der Laan* construíu un sistema de proporcións arquitectónicas baseadas nel.

De maneira similar a como acontece co *número de ouro*, o ***número plástico*** é un *número irracional* que se pode obter como solución dunha ecuación polinómica, neste caso: $x^3-x-1=0$. O seu valor vén dado pola seguinte expresión:

$$\Psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

Investiga: ¿Por que ao ***número de ouro*** e ao ***número plástico*** se lles chama ***números mórficos***?

2009, ANO DARWIN

ROBERT CHARLES DARWIN
(12 de febreiro de 1809 - 19 de abril de 1882)

Por cumprirse neste ano o 200 aniversario do nacemento de *Darwin*, estánselle rendendo milleiros de homenaxes a nivel mundial.
Ademais, no 2009 tamén se cumpre o sesquicentenario (o 150 aniversario) da publicación da súa obra *A orixe das especies*, fito que tivo lugar en 1859.

Investiga:
Biografía de Darwin
Busca todos os divisores dos números 1809, 1859 e 2009

CORUÑA TESELADA