Ano 2

Número 19

Xuño 2008

MaTHeSiS

Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

LEONARDO PISANO, MATEMÁTICAS CON COELLOS

Polos últimos anos do século XII a República de Pisa desenvolvía unha importante relación comercial coas cidades do norte de África.

Á fronte da delegación comercial do nordés de Alxeria, na actual Bejaia (daquela chamada Bugia), atopábase *Guilielmo Bonacci*. Debido ao seu cargo, Guilielmo Bonacci realizou gran número de viaxes por todo o norte de África.

Leonardo de Pisa (Pisa, 1170 – Pisa, 1250) é quizais máis coñecido como ***Fibonacci*** (o *fillo de Bonacci*, pois seu pai foi Guilielmo Bonacci); ás veces tamén se adoita referirse a el co alcume de *Bigollo* (co que tamén se fai referencia a seu pai), verba que no dialecto da Toscana ten a dobre acepción de *home simple* e tamén *home moi viaxado*.

A educación de ***Leonardo Pisano***, ***Fibonacci***, desenvolveuse, por estas circunstancias do traballo de seu pai, entre Pisa e o norte de África. É alí onde descubre e se decata da superioridade das cifras indoarábigas sobre o sistema de numeración romano, á hora de facer cálculos que facilitaban enormemente as transaccións comerciais.

Debido ao seu grande interese polas cuestións matemáticas, Leonardo realiza viaxes para recoller ensinanzas dos mestres árabes sobre aqueles novos métodos de cálculo.

Arredor do ano 1200 Fibonacci volve para Pisa decidido a espallar toda a bagaxe matemática que adquirira.

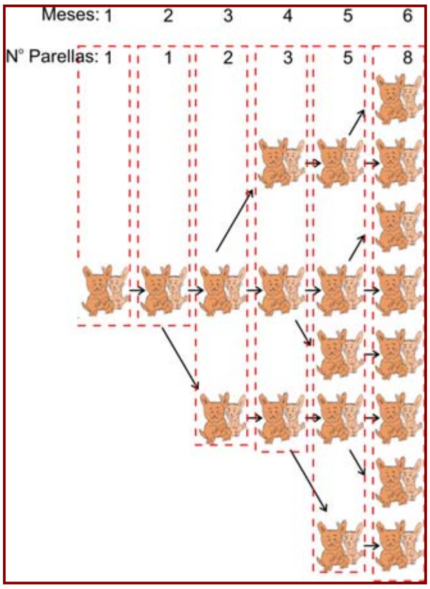
No ano 1202 aparece a primeira edición do seu libro ***Liber Ábaci***. Este libro constitúe unha verdadeira revolución para as matemáticas da época e pode ser considerado coma unha das portas pola que entra en Europa o sistema de numeración hindú, pois nel conta Leonardo os saberes matemáticos que aprendera dos árabes. Ademais de explicar como se fai a lectura e a escrita dos números, mostra como realizar contas básicas (suma, resta, multiplicación e división). Pero tamén fai referencia ás fraccións, ás raíces cadradas e cúbicas, ás proporcións, á xeometría e á álxebra, aos cálculos que se necesitan para o comercio, ao prezo das mercadorías máis comúns, ás conversións de moedas…

O *Liber Ábaci* non é a única obra escrita por *Leonardo de Pisa*, propoñémosche que investigues o título dalgunha outra obra deste autor. A pesar de que na época na que viviu era preciso facer a copia a man de cada libro, temos a sorte de que algúns exemplares dos seus escritos se conservaron ata a actualidade.

Curiosamente, o nome de *Fibonacci* quedou ligado para sempre a un problema do seu *Liber Ábaci* que ten por protagonistas a unha parella de coellos. A partir da resolución dese problema xurde unha sucesión numérica chamada ***Sucesión de Fibonacci*** arredor da que se teñen feito (e séguense a facer) infinidade de investigacións matemáticas. O problema en cuestión poderíase redactar así:

Un home ten unha parella de coellos nun lugar cerrado. Esta parella medra durante un mes e cando remata ese mes acada a idade fértil. A partir dese momento, ***cada mes*** *enxendra unha nova parella de coellos que tarda outro mes en nacer. ¿Cantas parellas de coellos haberá ao cabo dun ano se cada unha das que nacen se comporta da mesma maneira respecto á procreación?*

A Sucesión de Fibonacci



Imos tratar de dar resposta ao problema dos coellos proposto por Fibonacci. Na figura que presentamos indícanse cantas parellas de coellos existen ao comezo de cada mes, durante os primeiros seis meses do ano: 1, 1, 2, 3, 5, 8...

¿Es capaz de continuar o gráfico para determinar cantas parellas de coellos teremos ao principio do sétimo mes? ¿E a principios do oitavo? Tomemos estes oito números como os oito primeiros termos dunha sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... Se nos fixamos, podemos descubrir unha pauta que nos permite seguir escribindo os seguintes termos da sucesión; isto é o que se chama en matemáticas unha ***lei de recorrencia***. Para este caso é a seguinte: *coñecido o primeiro termo, 1, e o segundo termo, 1, os demais termos, a partir do terceiro, obtéñense facendo a suma dos dous anteriores*.

Utilizando este criterio podemos escribir unha colección infinita de números que é mundialmente coñecida dentro do campo das matemáticas co nome de ***Sucesión de Fibonacci***. Velaquí os seus primeiro trinta termos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, 317 811, 514 229, 832 040...

É doado, pois, escribir unha *lei de recorrencia* para referirnos aos infinitos termos desta sucesión. Tarefa máis difícil resulta atopar unha fórmula que nos sirva para dar a *expresión do termo xeral*, sendo o matemático *François Edouard Lucas* (1842-1891) o primeiro que deu coa solución deste problema.

$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$	$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$
Lei de recorrencia para a Sucesión de Fibonacci	***Expresión do termo xeral da Sucesión de Fibonacci***

Os termos da *Sucesión de Fibonacci* cumpren unha gran cantidade de interesantes e sorprendentes propiedades. A seguir imos citar unhas poucas que comprobaremos para algún caso particular. Invitámoste a que ti tamén as comprobes para outros casos.

Calquera número natural pódese escribir mediante a suma dun número finito de termos da sucesión de Fibonacci.

Exemplos: 23= 21+ 2 47= 34+13 80= 55+21+3+1

Un termo de cada tres é par, un de cada catro é múltiplo de 3, un de cada cinco é múltiplo de 5, un de cada seis é múltiplo de 8, etc.

Exemplos: **34**,55,89 **144**, 233, 377, 610 34, **55**, 89, 144, 233 34, **55**, 89, 144, 233, 377

Cada número de Fibonacci é a media do termo que se atopa dúas posicións antes e o que se encontra na posición seguinte: $F_n = \frac{F_{n-2} + F_{n+1}}{2}$.

$$\text{Exemplos: } 233 = \frac{89+377}{2} \qquad 987 = \frac{377+1597}{2}$$

A suma dos *n* primeiros termos da sucesión coincide co termo que ocupa a posición *n+2 diminuído nunha unidade:* $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$

Exemplo: 1+1+2+3+5+8+13+21+34+55 = 144 – 1

O máximo común divisor de dous números de Fibonacci é outro número de Fibonacci; ademais, $M.C.D.(F_n,F_m) = F_{M.C.D.(n,m)}$.

Exemplo: M.C.D. (144,2584) = 8 (é dicir: M.C.D.(F_{12}, F_{18}) = F_6.

Para F_p = ***a****, tal que* ***a*** *é un número primo, resulta que p tamén é un número primo, coa única excepción* $F_4 = 3$.

Exemplos:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, 317 811, 514 229, 832 040...

A suma de dez números Fibonacci consecutivos é sempre 11 veces o sétimo termo desa colección.

Exemplo: ***13+21+34+55+89+144+233+377+610+987 = 2563 = 11 · 233***

1/1=**1**	2/1=**2**
3/2=**1,5**	5/3=**1,666...**
8/5=**1,6**	13/8=**1,625**
21/13=**1,61538...**	34/21=**1,61904...**
55/34=**1,61764...**	89/55=**1,61818...**
144/89=**1,61797...**	233/144=**1,61805...**
377/233=**1,61802...**	610/377=**1,61803...**
.	
.	
.	

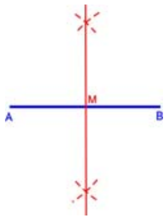
Os termos da sucesión de Fibonacci cumpren outras moitas sorprendentes propiedades. Para rematar, citemos a seguinte que queda ilustrada cos cálculos que se mostran á esquerda.

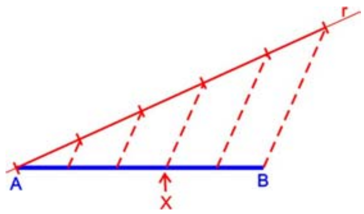
A razón entre cada par de termos consecutivos da sucesión de Fibonacci vai oscilando por enriba e por debaixo dun número moi coñecido, e achegándose cada vez máis a el. É dicir: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$.

Deste número, ϕ, falamos a seguir.

Media e extrema razón

Cando queremos expresar a ***razón*** de dous números reais *a* e *b*, utilizamos a notación: $\frac{a}{b}$ (que se le *a é* a *b*). Desta maneira indicamos o resultado da división (o *cociente completo*) de *a* entre *b*.

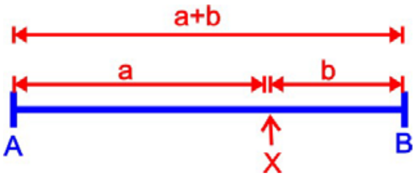




Nas figuras móstranse dous procesos ben coñecidos. No primeiro caso dividiuse un segmento de extremos ***A*** e ***B*** en dúas partes iguais. Procedeuse do seguinte xeito: Usouse un compás e, tomando unha abertura maior ca metade do segmento, fíxose centro en ***A*** e trazáronse arcos por enriba e por debaixo do segmento. Repetiuse o proceso facendo centro en ***B***. Deste modo púidose debuxar a ***mediatriz*** do segmento que determinou sobre el o punto ***M***, punto medio de $\overline{AB}$, producíndose unha partición simétrica do segmento $\overline{AB}$ xa que $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$.

Na segunda figura déixase indicado o procedemento da división dun segmento en partes iguais baseado na aplicación do *Teorema de Tales* ***(¿lembras o teorema e o método para facer a división do segmento?****)*. O punto ***X*** divide ao segmento de maneira asimétrica, cumpríndose: $\frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$.

O *Teorema de Tales*, pois, permítenos dividir un segmento en *n* partes que garden unhas determinadas relacións, botando man dunha recta auxiliar, ***r*** no debuxo.



Un problema clásico, xa tratado por *Euclides*, consiste en determinar un punto sobre un segmento dado que o divida en ***media e extrema razón***.

Dise que un segmento está dividido en media e extrema razón cando se divide en dúas partes desiguais de tal modo que a razón entre as medidas da parte grande é a pequena coincide coa razón entre a medida total do segmento e a medida da parte grande. É dicir, para o segmento $\overline{AB}$ da figura, tense que cumprir:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AX}} \text{ ou, o que é o mesmo, } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

No mundo clásico e no Renacemento considerábase que os obxectos, obras de arte e construccións que gardasen esta proporción, desprendían unha harmonía especial. *Luca Pacioli* chamáballe ***Divina Proporción***; *Kepler*, ***Sección Divina***; e *Leonardo da Vinci*, ***Sección Áurea***.

¿Cal é o valor numérico da razón que determina esta *divina proporción*?

Partimos da expresión da proporción $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ e dividimos o segundo membro entre b: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{b}}{\frac{a}{b}}$. Se facemos o cambio de variable $\frac{a}{b} = x$, quedaranos: $x = \frac{x+1}{x}$. Polo tanto $x^2 = x + 1$ e $x^2 - x - 1 = 0$. Se resolvemos esta ecuación de segundo grao obtemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. No noso razoamento $\frac{a}{b} > 1$(xa que *a*>*b*), polo tanto: $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é un número irracional (numero con expresión decimal ***infinita non periódica***) e debido ás anotación que se fixeron máis arriba adoita chamárselle ***Número de Ouro*** ou ***Número Áureo***. Represéntase habitualmente coa letra grega *phi* (*fi*), ϕ, en memoria do escultor e arquitecto grego *Phidias*, que dirixiu as obras do *Partenón*.

Vexamos unha aproximación decimal para o número ϕ. Velaí van as súas primeiras setenta cifras:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621354486227052604...$$

Neste momento podemos dar resposta á última cuestión que deixamos aparcada no apartado anterior:

*A razón entre cada par de termos consecutivos da sucesión de Fibonacci vai oscilando por enriba e por debaixo do **Número Áureo**, e achegándose cada vez máis a el. É dicir:* $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$.

Nas seguintes figuras móstrase como dividir un segmento en media e extrema razón e como construír un ***rectángulo áureo***. Trata de reproducir as construccións e de facer as xustificacións pertinentes. ¿Reparaches algunha vez nas dimensións do teu DNI ou dunha tarxeta de crédito?