Ano 2

Número 12

Novembro 2007

MaTHeSiS

Boletín de divulgación matemática

Depósito Legal: C-2693-06

ESAS INTERMINABLES COLAS DECIMAIS...

El Número Pi

El número Pi es digno de admiración
tres coma uno cuatro uno,
todas sus cifras siguientes también son iniciales,
cinco nueve dos, porque nunca se termina.
No permite abarcarlo con la mirada seis cinco tres cinco,
con un cálculo ocho nueve,
con la imaginación siete nueve
o en broma tres dos tres, es decir, por comparación
ocho cuatro seis con cualquier otra cosa
dos seis cuatro tres en el mundo.
La más larga serpiente después de varios metros se interrumpe.
Igualmente, aunque un poco más tarde, hacen las serpientes fabulosas.
El cortejo de cifras que forman el número Pi
no se detiene en el margen de un folio,
es capaz de prolongarse por la mesa, a través del aire,
a través del muro, de una hoja, del nido de un pájaro,
de las nubes, directamente al cielo
a través de la total hinchazón e inmensidad del cielo.
¡Oh, qué corta es la cola del cometa, como la de un ratón!
¡Qué frágil el rayo de la estrella que se encorva en cualquier espacio!
Pero aquí dos tres quince trescientos noventa
mi número de teléfono, la talla de tu camisa,
año mil novecientos setenta y tres, sexto piso
número de habitantes, sesenta y cinco céntimos
la medida de la cadera, dos dedos, la charada y el código
en el que mi ruiseñor vuela y canta
y pide un comportamiento tranquilo,
también transcurren la tierra y el cielo
pero no el número Pi, éste no,
él es todavía un buen cinco,
no es un ocho cualquiera,
ni el último siete
metiendo prisa, oh, metiendo prisa a la perezosa eternidad
para la permanencia.

Wislawa Szymborska.
Premio Nobel de Literatura 1996.

¡Non esquezades...!

Séguese tendo unha gran falta de coidado ao escribir números decimais e outras cantidades. A seguir facemos un par de citas literais tomadas do libro ***Ortografía de uso del español actual*** do que é autor *Leonardo Gómez Torrego*.

Para escribir los **números decimales,** la Real Academia Española, recomienda separar la parte entera de la parte decimal mediante una coma en la zona inferior (no en la superior). Sin embargo, también se permite en estos casos la utilización del punto. Ejemplos:

12,5   6.8

Para escribir los números de **más de tres cifras,** aunque tradicionalmente en castellano se separaba con puntos, la normativa internacional señala que se debe prescindir de él. Para facilitar la lectura de los millares, millones, etc., se recomienda dejar un espacio cada tres cifras (empezando por el final). Ejemplos:

1 000 000   3 256

10 250   32 000 000

Sin embargo, esta separación no debe utilizarse en la escritura de los años, en la numeración de las páginas ni en los números de las leyes, decretos o artículos.

π = 3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082...

Departamento de Matemáticas do IES Ramón Otero Pedrayo. A Coruña.

FRACCIÓNS CON EXPRESIÓN DECIMAL FINITA

A estas alturas xa temos, máis ou menos claro, que unha ***fracción*** representa unha relación de divisibilidade (un cociente indicado) entre dous ***números enteiros***.

Culturas e civilizacións que nos precederon hai milleiros de anos expresaban medidas ou calculaban empregando fraccións: Os exipcios escribían as cantidades fraccionarias e facían toda clase de cálculos empregando unicamente ***fraccións unitarias*** (as

do tipo $\frac{1}{n}$, sendo n 2, 3, 4...) ademais de ter símbolos especiais para $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$. Os babilonios chegaron a desenvolver unha notación para traballar con fraccións que lles permitía realizar cálculos moi precisos que aproveitaron para conseguir o valor de moitas raíces. Por último, na antiga China foron bos coñecedores das operacións con fraccións e empregaban como método o expresalas con denominador común.

Cando facemos a división do *numerador* entre o *denominador* dunha fracción para calcular a súa expresión decimal, obtemos números con aparencia bastante diferente; observade, por exemplo, que é o que pasa coas fraccións $\frac{45}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

A pregunta á que queremos dar resposta agora é a seguinte: ¿como saber, antes de facer a división, se a expresión decimal dunha fracción vai ter unha *cola decimal finita*?

Deámoslle a volta á cuestión: ¿cales son as fraccións que xeran os seguintes números?:

0,65 0,6554 1,125 ou 3,8

Contestariamos rapidamente a esta pregunta escribindo as fraccións seguintes, que teñen nos denominadores potencias de 10:

$$\frac{65}{100} \quad \frac{6\,554}{10\,000} \quad \frac{1125}{1\,000} \quad \frac{38}{10}$$

Fixádevos na relación que hai entre o número de cifras da cola decimal e o expoñente da potencia de 10 que se escribiu no denominador. Ademais, as fraccións que acabamos de poñer como exemplo, son simplificables e obtemos, respectivamente:

$$\frac{13}{20} \quad \frac{3\,277}{5\,000} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{19}{5}$$


Andrea Aguilella Merelas
Terceiro ESO-A.

¿Que ocorre cos denominadores destas fraccións irreductibles? A cousa está clara: os factores que interveñen na formación deses números son exclusivamente 2 e 5 (loxicamente, pois proceden das potencias de 10 que utilizaramos nun principio). En conclusión: nada máis ver unha fracción podemos saber se ten ou non unha expresión decimal finita; basta que comprobemos se o seu denominador se factoriza utilizando ***unicamente douses e cincos*** ou se interveñen outros números primos.

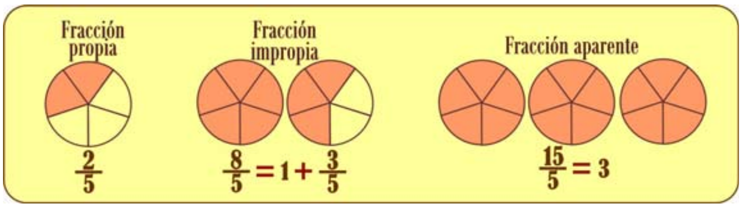
Vexamos se quedou claro. Sen utilizar calculadora, ¿cales das seguintes fraccións teñen unha expresión decimal finita?:

13/7 55/9 1/45 19/8 2/22 31/36 8/15 2/18 14/41 99/15

COLAS DECIMAIS INFINITAS

¿Quen non estivo nunca nunha cola? No mercado, para entrar nalgún sitio, para arranxar algunha cuestión burocrática... incluso hai quen ten que soportar a desagradable cola do paro. O termo cola, pois, tráenos á cabeza unha sucesión de persoas, obxectos, sucesos... que se van colocando ordenadamente uns detrás dos outros por algún motivo ou criterio.

Imos falar aquí dunhas colas moi especiais: as ***colas decimais*** que se obteñen a partir de fraccións. O sistema de numeración co que traballamos acotío é o ***sistema de numeración decimal*** (sistema ***posicional*** de ***base dez***); polo tanto, todo número escrito neste sistema é un número decimal. Sen embargo, adoitamos chamar ***números decimais*** aos que inclúen unha coma decimal.



O conxunto dos ***números racionais*** está formado por todos os números que poden expresarse utilizando unha fracción (expresión do tipo ***a/b***, sendo ***a*** e ***b*** dous ***números enteiros*** con ***b≠0***). Existen termos específicos para cualificar diferentes tipos de fraccións. Así, unha ***fracción aparente*** é a que ten por numerador un múltiplo do denominador e, polo tanto, representa un número enteiro; unha ***fracción propia*** posúe numerador menor que o denominador, mentres que nunha ***fracción impropia*** o numerador e maior que o denominador polo que se poderá descompoñer na suma dun número enteiro máis unha fracción propia.

Investiga a que nos referimos cando usamos as seguintes expresións: *fracción alxébrica, fracción continua, fracción inversa, fracción irreductible, fracción xeratriz, fraccións equivalentes.*

Acábase de tratar, no traballo anterior, o caso das fraccións que producen colas decimais finitas e estableceuse que son unhas fraccións cuxos denominadores se factorizan utilizando unicamente douses e cincos.

¿Que ocorre se na descomposición do denominador interveñen outros números primos? A resposta vai ser obvia: Obteremos un número que vai ter unha ***cola decimal infinita***. Fixádevos nas expresións decimais destas fraccións:

$$\frac{10}{3} = 3.3333333333333333333...$$

$$\frac{39}{41} = 0.95121951219512195121...$$

$$\frac{19}{15} = 1.2666666666666666666...$$

$$\frac{31}{12} = 2.5833333333333333333...$$

As colas decimais destas expresións numéricas están formadas por *bloques de cifras* que se repiten infinitamente. Cada un destes bloques chámanse ***período***. Nos dous primeiros exemplos o período comeza xusto despois da coma e por iso dicimos que esas fraccións teñen unha ***expresión decimal infinita periódica pura***. Nos outros dous casos, a parte que vai despois da coma comeza cun grupo de cifras (o *anteperíodo*) para continuar cos infinitos bloques que se repiten: son fraccións con ***expresión decimal infinita periódica mixta***. Tanto o *período* coma o *anteperíodo* poden estar formados por unha ou máis cifras; vexamos un par de casos máis "espectaculares" que os anteriores:

$$\frac{100}{61} = 1.639344262295081967213114754098360655737704918032786885245901639344262295 08...$$

$$\frac{1375}{4416} = 0.311367753623188405797101449275362318840579710144927536231884057971014492...$$

Todo número racional ten, pois, unha expresión decimal finita ou unha expresión decimal infinita que sempre cumpre a propiedade de ser periódica (pura ou mixta).

¿Que ocorre, entón, cos *números con expresión decimal infinita non periódica*? ***Eses números non poden expresarse utilizando unha fracción***. É o caso do número $\boldsymbol{\pi}$ ou do coñecido *número áureo*, ao que se acostuma representar coa letra grega $\boldsymbol{\Phi}$ e que ten unha ***expresión decimal infinita non periódica*** da que damos a continuación as primeiras 65 cifras da súa cola decimal, que se obteñen a partir da seguinte expresión:

Alberto Rivera Rey
Cuarto ESO-C.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270...$$

Pero isto é outra historia...

Propoñémosche unha investigación: Sen facer a división, indica de que tipo (*finita*, *infinita periódica pura* ou *infinita periódica mixta*) é a expresión decimal das seguintes fraccións.

$$\frac{25}{21} \quad \frac{19}{18} \quad \frac{33}{50} \quad \frac{15}{39} \quad \frac{26}{15}$$

Fontes:
http://www.escolar.com/matem/08fracc.htm
http://www.escolar.com/avanzado/matema073.htm
Calquera libro de texto de matemáticas de 3º e 4º de ESO.

O TRANSCENDENTE NÚMERO PI

Os números ***irracionais*** son os que teñen unha cola decimal infinita non periódica. Reciben este nome porque non se poden obter como ***razón*** (cociente) de dous números enteiros. No traballo precedente, acábase de citar como exemplo o *número áureo* que se obtén como solución da ecuación $\boldsymbol{x^2-x-1=0}$. os números que se conseguen deste xeito, os que son *raíces de polinomios*, chámanse ***números alxébricos***. Pero o ***"número Pi"***, xunto a outros, pertence á familia dos ***números transcendentes*** pois non se poden obter como solucións de ecuacións polinómicas.

Pi expresa a relación que existe entre a *lonxitude dunha circunferencia* (o perímetro dun círculo) e o seu *diámetro*. No ano 1706 o matemático galés Willian Jones utilizou por primeira vez a letra grega π (inicial de perímetro: "περίμετρον") para designar este número; anque a difusión do símbolo en cuestión débese ao grande matemático Leonhard Euler.

No *Papiro Rhid* (uns 1700 anos a. de C.) déixase constancia de que os exipcios usaban como valor de π a fracción ***256/81***, con ela podían construír os seus silos para gardar os cereais. En Mesopotamia, uns 500 anos a. de C., tomábase ***3+1/8*** como valor para π. En Grecia, 450 anos a. de C. utilizábase $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Arredor do ano 215 a. de C., ***Arquímedes de Siracusa*** ideou un método para determinar o valor de π que consistía en inscribir e circunscribir polígonos regulares a unha circunferencia. Chegou a facelo con polígonos de ata 96 lados, e con esta estratexia estableceu que ***3+10/71<π<3+1/7***. Este método de Arquímedes foi utilizado por outros moitos matemáticos posteriores que empregaron polígonos regulares de moitos máis lados.

Existen moitas expresións famosas que nos permiten calcular aproximacións do valor de π, velaquí van algunhas:

Arquímedes $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$	Ptolomeo $\pi \approx \frac{377}{120}$	Tsu Ch´ung Chi $\pi \approx \frac{355}{113}$
John Wallis $\pi = 2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 ...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 ...} \right)$	G. W. Von Leibnitz $\pi = 4 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + ... \right)$	Leonhard Euler $\pi^2 = 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + ... \right)$

Na actualidade, grazas á utilización de potentes ordenadores, coñécense varios centos de miles de millóns de cifras do número π. Na primeira páxina deste boletín verás as primeiras seiscentas vinte.

Pódense citar moitas curiosidades arredor do número π: Existe unha película cuxo título é π; ademais, π ten que ver co argumento doutras moitas. Certos cantantes e grupos musicais interpretan temas nos que π é o protagonista. Poemas, libros...

A seguir mostramos poemas en varios idiomas que nos poden servir para lembrar as cifras do número π. Abonda que cambies cada palabra polo número de letras que a forman, tendo en conta que o número 0 vén representado por unha palabra de dez letras.

<table>
<tr>
<td>Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.</td>
<td>Now I, even I, would celebrate
In rhymes unapt the great
Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
Who in his wond'rous lore,
Passed on before,
Left men his guidance
How to circles mensurate.</td>
<td rowspan="2">¡Vai e fura o miolo ilimitado!
pi, Número Grial,
que amigo benamado
saberache atrapar.

Lembrarei por ti,
que semellas novo
cifras do número tolo
que sen cancelas ten pi.

Pitágoras, inimigo alleo,
anoxábanos de pequenos.
¡Teoremas fora!
¡A esquecelo!

Repasas e contas cincuenta ben,
contounas Galiñanes
que medidor vello é.
Emilio R. Galiñanes.</td>
</tr>
<tr>
<td>Voy a amar a solas, deprimido
no sabrán jamás que sueño hallarte,
perímetro difícil, escondido
que en mis neuronas late...
Oscuro el camino para ver
los secretos que tú ocultas
¿hallarlos podré?...</td>
<td>Que j'aime à faire apprendre ce nombre
utile aux sages ! Immortel Archimède,
artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils
avantages.</td>
</tr>
</table>

Fontes:

Hai que roelo. Emilio R. Galiñanes. Ed. Sotelo Blanco.
http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm
http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%CF%80
web.ukonline.co.uk/home52365/pi.htm
http://www.axiomatico.es/index.php?/categories/1-Matematicas (Mike Keith)

Sabela Rodríguez Lorenzo
Cuarto ESO-A.