GAMMA
setembro 2003

A RAÍZ CADRADA EN MESOPOTAMIA

(Non á guerra de Irak)

Ana Otero Baamonde
Antón Otero Baamonde
Carmen Otero Mazoy

A David,
presente na elaboración deste traballo

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Nos grandes vales fluviais do Nilo, Tigris e Eufrates, Indo e Iang-tse aparecen as civilizacións que empregan por primeira vez os metais. A cronoloxía respecto aos dous últimos é bastante incerta, pero si sabemos que, tanto en Exipto como en Mesopotamia, comeza a aparecer a escritura hai máis de 5 000 anos.

O desenvolvemento do coñecemento matemático nestas dúas zonas xeográficas ten moitas características comúns: a existencia de sistemas de numeración, o manexo sistemático de táboas de resultados e a ausencia de aspectos teóricos e demostracións, xa que sempre traballaban con datos concretos.

Sen embargo, hai importantes diferencias.

Na civilización exipcia:

- O soporte físico da escritura era o papiro; isto supuxo unha importante eiva para a conservación da información, aínda que, afortunadamente, teñen chegado ata nós algúns deles.
- O sistema de numeración era de base 10. Inicialmente utilizábanse distintos signos para representar as sucesivas potencias da base, repetindo estes símbolos as veces que fose necesario para escribir un número (6 sería representado por ¦¦¦¦¦¦) ; máis adiante, créanse símbolos especiais para as distintas cifras.
- A operación fundamental era a suma, que se empregaba continuamente. A multiplicación e a división facíanse por medio de sucesivas duplicacións e divisións entre 2.
- Empregaban números non enteiros utilizando as chamadas fraccións unitarias, é dicir, fraccións que teñen por numerador a unidade. Manexaban polo tanto números da forma 1/n e algunha fracción especial distinta, como 2/3. Calquera outra fracción había que descompoñela como suma de unitarias, e para isto dispuñan de múltiples táboas.
- Tanto esta última limitación como a ausencia de notación posicional foron claves para a superioridade da matemática babilónica sobre a exipcia.

Nos pobos mesopotámicos:

- O soporte físico era a taboiña de arxila, un soporte moito máis sólido que o papiro dos exipcios. Consérvanse hoxendía milleiros de taboas finas.
- O sistema de numeración era de base sesaxesimal, un sistema moito menos empregado ao longo da historia que o decimal. Aínda se conservan restos del, pensemos en cómo medimos hoxe o tempo e os ángulos. Estes sistemas de medida débenlles a a súa existencia aos estudios astronómicos dos pobos mesopotámicos.
- Empregaban só dous símbolos, un para o 1 e outro para o 10. Como cada número comprendido entre 1 e 59 debía ser escrito cunha soa cifra, escribían varios destes símbolos xuntos para representalo.
- Tiñan unha notación posicional; así unha agrupación de símbolos representaba as súas unidades (números entre 1 e 59), a seguinte agrupación representaba as súas decenas (números entre 60 e 60^2-1), etc.
- Usaban tamén este sistema para representar os números non enteiros. Non tiñan, xa que logo, ningunha limitación á hora de empregar as décimas, centésimas, milésimas,... (sempre en base

60). Isto permitía ter un algoritmo que resolvese coa mesma facilidade, por exemplo, a operación 32,75 x 0,327 que a 3275 x 327.

• Ademais da notación posicional, a posibilidade de empregar todo tipo de decimais, e a vantaxe dunha base con tantos divisores como ten 60 (2,3,4,5,6,...), permitían resolver moitos problemas aritméticos que non estaban ao alcance dos exipcios; un deles, do que falaremos en seguida, é o ***cálculo da raíz cadrada.***

Non todo eran vantaxes no seu sistema. Había ous problemas: O primeiro deles era a ausencia de 0, que supuxo serias dificultades para distinguir número os como 32 e 302. Normalmente o noso 0 substituía e por un espacio en branco, pero ás veces isto non parece claro.

O segundo problema era que non existía un símolo de separación entre a parte enteira e a decimal, o ue fai que sexa difícil distinguir entre números como na nosa notación) 427; 42,7; 4,27; ... Era necesario studiar o contexto para saber de qué número se tratba.

MÉTODO BABILÓNICO DA RAÍZ CADRADA

Este método, que foi atribuído a Arquitas de Tarento e a Herón de Alexandría, é coñecido tamén olo nome de algoritmo de Newton, pero non hai ningunha dúbida de que é un froito da matemática mesopotámica.

Partimos dun número N ao que lle queremos calcular a(s) súa(s) raíz(ces) cadrada(s), é dicir, atopar outro número, x, tal que $x^2 = N$.

Facemos unha estimación desta raíz, tomamos un valor arbitrario, a. Para ver se acertamos ou non e, en todo caso, para encontrar o erro cometido, calculamos o número N/a.

Se o cociente fose a, entón: $N/a = a$, e o número estimado é a solución.

Se pola contra $N/a = b \neq a \Rightarrow N = ab$ resulta evidente que a non é a solución, e ademais, canto máis próximos estean a e b mellor será a nosa estimación. O verdadeiro valor de $\sqrt{N}$ debe estar entón entre a e b, polo que parece natural considerar a media aritmética destes dous números, $\frac{a+b}{2}$, como unha aproximación mellor que a anterior.

Se repetimos varias veces este proceso, é razoable pensar que obteremos unha boa estimación do valor $\sqrt{N}$

Tomemos un valor *por defecto*, a. Posto que $a^2<N$, existe un número $c>0$ tal que $N=a^2+c$

Sendo $a_1=a$, resulta $b_1 = \frac{N}{a_1} = \frac{a^2+c}{a}$,

e entón $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = a + \frac{c}{2a}$

Este valor de a_2 é o considerado habitualmente como unha aproximación de $\sqrt{N}$, que será tanto mellor canto o sexa $a_1 = a$; ou, por dicilo doutro xeito, canto menor sexa c.

Vexámolo en concreto con dúas aproximacións de $\sqrt{2}$:

Tomando $a_1=a=1$, resulta que $c=N-a^2=1$ (a e c son iguais, non parece que sexa unha boa aproximación), $b_1 = \frac{N}{a_1}$ e $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1,5.$

A aproximación, en efecto, non é boa, xa que $a_2{}^2 = 2,25$, pero si resulta mellor que $a_1=1$.

Ademais é interesante observar que $a_2{}^2 > 2$. Volveremos sobre isto máis adiante.

Afinemos máis. Tomemos agora $a_1 = a = 1,4$; temos entón que $c = N - a^2 = 0,04$ e, polo tanto, $b_1 =$

$\frac{N}{a_1} = 1,428571...$ e $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1,4142875...$

Agora a aproximación é moito mellor que antes, xa que $a_2{}^2 = 2,00020408...$ e unha vez máis, $a_2{}^2 > 2$.

Fagamos agora unha aproximación a $\sqrt{2}$ *por exceso*, $a_1 = a = 1,5$. Considerando, como antes, só dous sumandos, temos: $c = N - a^2 = -0,25$, $b_1 = \frac{N}{a_1} = 1,\widehat{3}$ e $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1,41\widehat{6}....$ que xa é unha aproximación aceptable de $\sqrt{2}$.

<u>Xustificación</u>

Se a é unha aproximación de $\sqrt{N}$ e tomamos $N = a^2 + c$, resulta $\sqrt{N} = (a^2 + c)^{1/2}$

Desenvolvendo esta serie binómica (algo que, evidentemente, non sabían os babilonios), obtemos:

$$\sqrt{N} = (a^2+c)^{1/2} = \binom{1/2}{0} a^{2\,1/2} + \binom{1/2}{1} a^{2(1/2-1)} c + \binom{1/2}{2} a^{2(1/2-2)} c^2 + \binom{1/2}{3} a^{2(1/2-3)} c^3 + \binom{1/2}{4} a^{2(1/2-4)} c^4 \ldots =$$

$$1.a + \frac{1}{2} a^{-1} c + \frac{(1/2).(-1/2)}{2} a^{-3} c^2 + \frac{(1/2).(-1/2).(-3/2)}{6} a^{-5} c^3 + \frac{(1/2).(-1/2).(-3/2).(-5/2)}{24} a^{-7} c^4 + \ldots =$$

$$a + \frac{1}{2}\frac{c}{a} - \frac{1}{8}\frac{c^2}{a^3} + \frac{1}{16}\frac{c^3}{a^5} - \frac{5}{128}\frac{c^4}{a^7} + \ldots$$

Pois ben, a aproximación que nós tomamos ao considerar a_2 é, en realidade, a que corresponde a coller os dous primeiros sumandos desta serie infinita.

MÉTODO ITERATIVO

¿Que ocorre se non nos detemos no segundo termo, a_2?

Continuando, temos:

$$b_2 = \frac{N}{a_2} = 1{,}41176470588\ldots \text{ e } a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 1{,}4142156855..$$

Este último valor aparece xa na taboa fina *Yale 7289*, como valor de $\sqrt{2}$. Trátase do número $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$, que coa notación en base 60 dos babilonios e transcribíndoo a caracteres modernos, escribiriamos *1;24,51,10*.

O cadrado deste número é $a_3^2 = 2{,}000006006\ldots$. O erro é logo de ¡6 millonésimas! (e atención, unha vez máis maior que 2).

Traballemos agora con outro número.

Calculemos $\sqrt{1000}$ partindo dun valor inicial ben afastado: $a_1 = 1$. Teriamos:

$$b_1 = \frac{N}{a_1} = 1000 \text{ e } a_2 = \frac{1+1000}{2} = 500{,}5$$

e continuariamos:

$a_3 = 251{,}2490091\ldots$; $a_4 = 127{,}6145582\ldots$;
$a_5 = 67{,}72532738\ldots$; $a_6 = 41{,}24542608\ldots$;
$a_7 = 32{,}74526934\ldots$; $a_8 = 31{,}64201587\ldots$;
$a_9 = 31{,}62278245\ldots$; $a_{10} = 31{,}6227766\ldots$

Observamos que:

- Aínda que tomamos un valor de partida moi erróneo, os termos da sucesión asociada a $\sqrt{1000}$ parecen converxer a un número que sería do tipo *31,6227...*
- a_2 é maior que $\sqrt{1000}$ (como vén ocorrendo en todos os exemplos ata o de agora), e polo tanto o seu cadrado é maior que *1000*. Ademais, a partir dese momento a sucesión é decrecente e os valores parecen ser maiores que $\sqrt{1000}$.
- Se partimos dunha mellor aproximación, $a_1 = 30$ por exemplo, chegaremos máis rapidamente a ese *31,62...*, xa que nese caso $b_1 = \frac{1000}{30} = 33{,}\widehat{3}$ e estariamos xa situados á "altura" dos a_7 e b_7 anteriores.

Se tomasemos para $\sqrt{1000}$ un valor inicial, a_1, por exceso, chegariamos á mesma situación: a partir do segundo termo a correspondente sucesión coincidiría coa que se inicia co valor, por defecto, $b_1 = 1000/a_1$. Os restantes termos das dúas sucesións son iguais.

Parece deducirse, logo, que:

1. Independentemente do valor de a_1, o segundo termo é sempre maior que $\sqrt{N}$. A partir dese momento tamén son maiores todos os seguintes.
2. A partir do segundo termo a sucesión é decrecente.
3. Aínda que o primeiro termo da sucesión diste moito de $\sqrt{N}$, a sucesión converxe sempre a ese número.

XUSTIFICACIÓN DO MÉTODO

Partimos de $N \geq 0$, pois en caso contrario non existe a raíz. Tomaremos ademais $a_1 > 0$.

Escollido arbitrariamente o primeiro termo, a partir del a sucesión defínese por recorrencia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad sendo \quad b_n = \frac{N}{a_n}$$

Se nalgún momento $a_n = \sqrt{N}$, os seguintes termos da sucesión serían todos iguais a , e esta sucesión tería por límite $\sqrt{N}$.

Consideremos entón a partir de agora que

$$a_n \neq \sqrt{N} \quad \forall n$$

1.- Como $a_1 \neq \sqrt{N}$, resulta que $b_1 = N/a_1 \neq a_1$; entón:

$(a_1 - b_1)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2\,a_1 b_1 > 0 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 + 2\,a_1 b_1 > 4\,a_1 b_1 \Rightarrow (a_1 + b_1)^2 > 4 a_1 b_1 \Rightarrow$

$\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2 > a_1b_1$ (tomando a raíz cadrada e tendo conta que $a_1, b_1 \geq 0$) $\Rightarrow$

$$\frac{a_1+b_1}{2} > \sqrt{a_1b_1}$$

En consecuencia, como $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e $N = a_1b_1$, temos que $a_2 > \sqrt{N}$.

Está demostrada a primeira hipótese: *O segundo rmo da sucesión é, sempre, unha aproximación por xceso de* $\sqrt{N}$.

Acabamos de ver, ademais, un resultado xa oñecido: "*Entre dous números positivos distintos a edia aritmética é maior que a xeométrica*".

Máis aínda, supoñendo $a_n > \sqrt{N}$, temos

$a_n - \sqrt{N})^2 > 0 \Rightarrow a_n^2 - 2a_n\sqrt{N} + N > 0$

$\Rightarrow a_n^2 + N > 2a_n\sqrt{N} \Rightarrow a_n + N/a_n > 2\sqrt{N}$

$$a_{n+1} = \frac{(a_n + N/a_n)}{2} > \sqrt{N}$$

o que queda probado por recorrencia que non só $a_2 > \sqrt{N}$, senón que, a partir dese momento, todos os termos on maiores que $\sqrt{N}$.

Polo tanto, a sucesión $\{a_n\}$ está ***acoutada infeiormente por*** $\sqrt{N}$ (a partir do segundo termo).

2.- Vexamos agora o cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\forall n \geq 2$; emos:

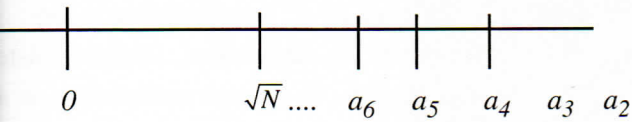
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{(a_n + N/a_n)}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{N}{a_n^2}\right)$$

como, para $n \geq 2$

$a_n > \sqrt{N} \Rightarrow a_n^2 > N \Rightarrow N/a_n^2 < 1$, entón $/2(1+N/a_n^2) < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$, $\forall n \geq 2$.

A sucesión é, a partir de a_2, ***monótona decreente***.

3.- Dos dous últimos apartados, xa que a sucesión a_2 , a_3 , a_4.... é monótona decrecente e acoutada nferiormente, salvo como máximo nun número nito de termos, deducimos que ***ten límite***.



Quédanos só o ***cálculo deste límite***.

Como $a_{n+1} = \frac{(a_n + N/a_n)}{2}$, se a_n tende a L,

tomando límites na expresión anterior, resulta:

$L = (L+N/L)/2 \Rightarrow 2L = L + N/L \Rightarrow 2L^2 = L^2 + N \Rightarrow L^2 = N \Rightarrow L = \sqrt{N}$ (tomando só a solución positiva xa que $a_n > 0$, $\forall n$).

Resulta, logo, que para todo valor de $a_1 > 0$, a sucesión anterior converxe a $\sqrt{N}$.

¡Sempre podemos aproximar a raíz dun número por este método!

¿Que ocorre coa sucesión $\{b_n\}$?

Dado que $b_n = N/a_n$, e a partir do segundo termo se verifica $a_n > a_{n+1}$, entón $N/a_{n+1} > N/a_n$, é dicir, $b_{n+1} > b_n$, e esta sucesión é entón *monótona crecente* (en realidade estrictamente crecente) a partir do segundo termo. Ademais, (sempre a partir de $n=2$) a nova sucesión está *acoutada superiormente* por $\sqrt{N}$; en efecto, $b_n = N/a_n < N/\sqrt{N} = \sqrt{N}$. Polo tanto *ten límite*, e resulta doado comprobar que tamén é $\sqrt{N}$

Para rematar este apartado, aínda que en Mesopotamia non se traballaba con números negativos, ¿que ocorrería se tomasemos $a_1 < 0$?

Considerando a sucesión de termo xeral $c_n = -a_n$, teriamos como resultado $\{c_n\} \to \sqrt{N}$ e, en consecuencia, $\{a_n\} \to -\sqrt{N}$.

Neste caso tamén $b_1 < 0$ e, polo tanto, $\{b_n\} \to -\sqrt{N}$.

Resulta entón que segundo partamos dun valor positivo ou negativo do primeiro termo, a_1, obtemos a solución positiva ou negativa da raíz cadrada.

AS MEDIAS

A sucesión $\{a_n\}$ está definida, a partir do primeiro termo, coa *media aritmética*, pero ao longo de toda a exposición anterior aparecen tamén as *medias xeométrica* e *harmónica*. En efecto:

$b_n = N/a_n \Rightarrow N = a_nb_n \Rightarrow \sqrt{N} = \sqrt{a_nb_n}$

co que $\sqrt{N}$, o límite das sucesións $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, é a **media xeométrica** de calquera parella de termos que se correspondan (ocupen a mesma posición) nas anteriores sucesións.

Ademais xa que:

$$b_{n+1} = \frac{N}{a_{n+1}} = \frac{a_nb_n}{(a_n + b_n)/2} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$$

co que resulta que cada termo da sucesión $\{b_n\}$, a partir do segundo, é a **media harmónica** dos termos que ocupan o lugar anterior nas dúas sucesións.

Aparecen así, no exposto ata agora, unha serie de coñecidas propiedades destas medias:

1. *O producto da media aritmética pola harmónica é o cadrado da xeométrica*:

$$\frac{a_n + b_n}{2} \bullet \frac{2a_n b_n}{(a_n + b_n)} = (\sqrt{a_n b_n})^2$$

que é simplemente a expresión que manexamos continuamente $a_{n+1}\, b_{n+1} = N$.

2. *A media aritmética é sempre maior que a xeométrica.*

En efecto, dende o segundo termo, a_n, calculado como unha media aritmética, é maior que $\sqrt{N}$, media xeométrica:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{N}$$

3.- *A media harmónica é a menor das tres,* xa que $b_n < \sqrt{N}$, a partir do segundo termo.

ARQUÍMEDES E O CÁLCULO DE π

É dabondo coñecido que Arquímedes estimou, con gran precisión, o valor de π. Na proposición 3 da súa obra *A medida do círculo* enuncia que:

" A circunferencia dun círculo é igual ao triplo do diámetro e unha parte deste menor que a sétima, e maior que dez setenta e un avos do diámetro".

Para demostralo comeza calculando a relación entre o radio da circunferencia e a metade do lado do hexágono circunscrito, que é $\sqrt{3}$, e que toma como *265/153*. A partir deste dato, duplicando o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos, ata chegar aos de *96* lados, acouta π entre os valores *3+10/71* e *3+1/7*.

Non se sabe con exactitude cómo chega a este valor de $\sqrt{3}$, xa que Arquímedes non aporta ningún dato, pero seguramente aplicando o método dos babilonios. Suxerimos tres posibilidades:

1.- Chegando ata a_2 e axustando o resultado despois, a_1=a=17/10=1,7. Neste caso c=3-1,7^2=0,11=11/100. Entón

$$\sqrt{3} \approx a + c/2a = 17/10 + 11/340$$

Agora ben, como este resultado é maior que $\sqrt{3}$ habería que descontarlle ao valor de c=11/100=99/900 tomando por exemplo, c=98/900. Neste caso obtemos para o valor $\sqrt{3}$.

$$17/10 + \frac{1}{2}\ \frac{98/900}{17/10} = 265/153$$

2.- Tomando a_1 = 1,7 e chegando ata a_3 tomando sempre catro cifras decimais. Teremos así:

$a_1 = 1{,}7$ $\quad b_1 = 1{,}7647$

$a_2 = 1{,}7323$ $\quad b_2 = 1{,}7318$

e finalmente $\quad a_3 = 1{,}7320 \approx 265/153$

3.- Chegando tamén ata a_3 con fraccións, teriamos:

$a_1 = 17/10$ $\quad b_1 = 30/17$

$a_2 = 589/340$ $\quad b_2 = 1020/589$

e xa, $\quad a_3 = 693721/400520$, fracción irreducible aproximadamente igual a *265/153.*

ALGUNHAS ORIENTACIÓNS PEDAGÓXICAS

No primeiro ciclo da ESO pode utilizarse esta maneira de calcular a raíz cadrada dun xeito natural; evidentemente debe utilizarse a calculadora para facer as operacións cunha certa rapidez.

No segundo ciclo poden remarcarse na clase algunhas cuestións:

- O concepto de media aritmética.
- A idea de sucesión.
- A idea de aproximación e de erro.
- Unha idea intuitiva de límite.

No 1° curso de Bacharelato pódese profundar máis en todo o anterior. Agás a serie binomial infinita e, quizais, a formalización dalgunha demostración, todo o demais pode ser abordado sen dificultade.

Pode resultar interesante tratalo na clase como unha unidade didáctica en si. Resaltariamos entón:

- As orixes da matemática. Distintos sistemas de numeración. O sistema sesaxesimal e as súas vantaxes. Pervivencia actual do sistema.
- Os intentos de resolución dun problema (a raíz cadrada), elemental hoxendía, de forma natural e por medio de aproximacións. Importancia histórica deste problema e utilización deste método por Arquímedes para aproximar o valor de π.
- O método de traballo (científico).

Importancia da experimentación para ter unha idea do que ocorre, facer conxecturas, comprobar e demostrar estas conxecturas.

- Distintos tipos de medias e as relacións entre elas.
- Conceptos sobre sucesións: acoutación, monotonía, límite,...
- O feito de que o comportamento dos primeiros termos dunha sucesión, mesmo de calquera número finito de termos, non marca o seu carácter (posible límite, acoutacións,...), o que interesa é o que ocorre "a partir dun certo momento" ou "máis adiante deses termos".
- Pódese mesmo resaltar o feito de que unha sucesión de intervalos pechados encaixados: $[b_1, a_1], [b_2, a_2], [b_3, a_3], \ldots$ tales que a sucesión de lonxitudes tende a 0, definen un único punto ($\sqrt{N}$, neste caso).

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, C.B.(1986), *Historia de las Matemáticas*, Madrid: Alianza Universidad Textos.

COLERUS, E.(1973), *Breve historia de las Matemáticas*,. Madrid: Libro Joven de Bolsillo.

COLLETTE, J.P. (1985), *Historia de las Matemáticas II*, Madrid: Siglo XXI de España Editores.

KLINE, M.(1992), *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I*, Madrid: Alianza Universidad.

VERA, F. (1970), *Científicos Griegos II* (recompilación), Madrid: Aguilar S.A. de Editores.

WUSSING, H. (1998), *Lecciones de historia de las matemáticas*, Madrid: Siglo XXI de España Editores.