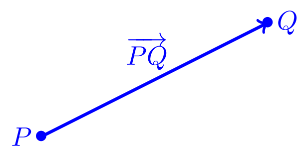
1 Nocións básicas de vectores

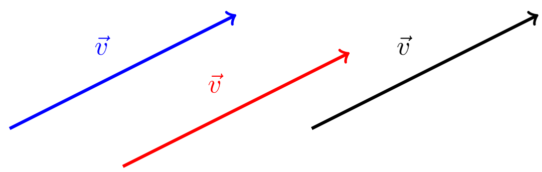
Un **vector fixo** é un segmento orientado. Represéntase por $\overrightarrow{PQ}$. O punto P chámase orixe e o punto Q chámase **extremo**.



Características dun vector As características dun vector $\overrightarrow{PQ}$ son:

- **Módulo:** é a súa lonxitude e represéntase por $|\overrightarrow{PQ}|$,
- **Dirección:** é a dirección da recta que o contén, e
- **Sentido:** é o que vai da orixe ao extremo.

Dous vectores son iguais se teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e o mesmo sentido, podendo ser a súa orixe calquera punto do espazo.



1.1 Propiedades das operacións

Propiedades da suma de vectores:

- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (Asociativa)
- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (Conmutativa)
- $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$ (Elemento neutro)
- $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$ (Elemento oposto)

Propiedades do poduto por un escalar:

- $a\cdot(b\cdot\vec{v})=(a\cdot b)\cdot\vec{v}$ (Asociativa)
- $(a+b)\cdot\vec{v}=a\cdot\vec{v}+b\cdot\vec{v}$ (Distributiva I)
- $a\cdot(\vec{v}+\vec{w})=a\cdot\vec{v}+a\cdot\vec{w}$ (Distributiva II)
- $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$ (Produto por 1)

Estas propiedades caracterizan a estrutura de **espazo vectorial**.

2 Asignando coordenadas aos vectores

Sistema de referencia

Unha base do espazo vectorial tridimensional $\mathcal{B}$ é un conxunto $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ de tres vectores calquera linealmente independentes.

Se os vectores da base $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ son perpendiculares dous a dous a base chámase **ortogonal.**

Se a base $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ é ortogonal e os vectores son unitarios (de módulo 1) chámase **ortonormal.**

Un **sistema de referencia** do espazo está formado por un punto O e unha base: $\{O,\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$. Precisamos dun sistema de referencia para poder traballar con coordenadas. Nós usaremos o **sistema de referencia**

$$\{O(0,0,0),\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)\}.$$

Para calquera punto P do espazo escribimos o vector $\overrightarrow{OP}$ como

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Dicimos que (x, y, z) son as coordenadas do punto P (e do vector $\overrightarrow{OP}$).

2.1 Operacións con coordenadas

Suma:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

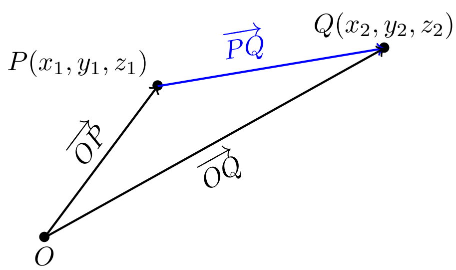
Resta:

$$(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$$

Produto por un escalar:

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

2.2 Coordenadas do vector definido por dous puntos



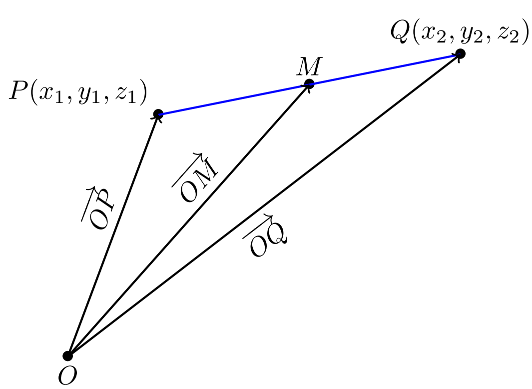
Dados dous puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ tense que

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \implies \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}.$$

Polo tanto,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

2.3 Coordenadas do punto medio dun segmento



Dados dous puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ tense que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OQ} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

Polo tanto,

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

3 Produto escalar

3.1 Produto escalar: definición

Definición 3.1 *O produto escalar de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{se } \vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}\\ 0 & \text{se } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0}\end{cases}$$

O produto escalar de dous vectores **non-nulos** *$\vec{u}$ e $\vec{v}$ é cero se e soamente se son perpendiculares:*

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\iff\vec{u}\perp\vec{v}.$$

3.2 Produto escalar: aplicacións

Usando o produto escalar podemos calcular:

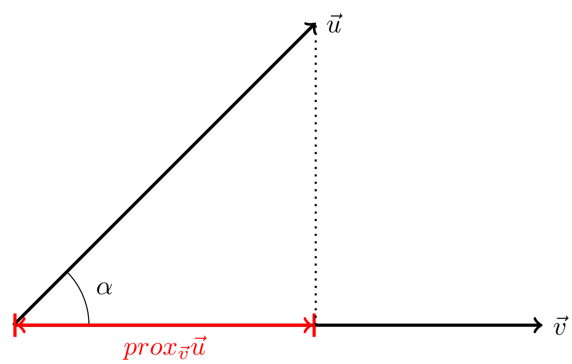
- O módulo dun vector: $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.
- O ángulo que forman dous vectores non-nulos:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}.$$

- O vector proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$prox_{\vec{v}}(\vec{u})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Proxección dun vector sobre outro



$$prox_{\vec{v}}\vec{u}=|\vec{u}|\cos\alpha \underbrace{=}_{\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha}\frac{|\vec{u}|\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

3.3 Produto escalar: propiedades

- Propiedade conmutativa:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}.$$

- Propiedade asociativa:

$$\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}.$$

- Propiedade distributiva:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}.$$

3.4 Produto escalar en coordenadas

Dado o **sistema de referencia**

$$\{O(0,0,0), \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)\}$$

temos que:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

e

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Usando as propiedades do produto escalar obtemos a súa **expresión analítica**:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Expresións en coordenadas

- O módulo dun vector:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

- O ángulo que forman dous vectores non-nulos:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

- O vector proxección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$prox_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

4 Produto vectorial

4.1 Produto vectorial: definición

Definición 4.1 *O produto vectorial de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é outro vector, que se denota por $\vec{u} \times \vec{v}$, que se define do seguinte modo:*

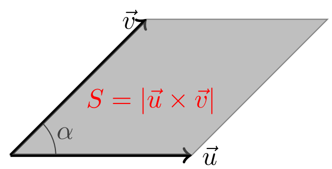
- *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son linearmente independentes, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vector que ten as seguintes características:*
  - *Módulo: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$,*
  - *Dirección: perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$,*
  - *Sentido: O que marca o polgar da man dereita cando desprazamos a man de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ polo camiño máis curto.*
- *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son linearmente dependentes, entón $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. (Nótese que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son linearmente dependentes se algún deles é $\vec{0}$ ou se teñen a mesma dirección.)*

4.2 Produto vectorial: propiedades

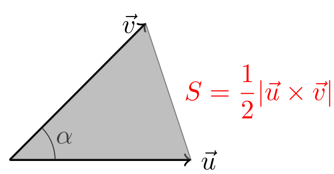
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ para calquera vector $\vec{u}$;
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ son paralelos;
- anticomutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$;
- asociativa: $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$ onde $k \in \mathbb{R}$;
- distributiva I: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
- distributiva II: $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$.

4.3 Produto vectorial: aplicacións

O modulo do produto vectorial de dous vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ coincide coa área do paralelogramo determinado por eles.



A área do triángulo determinado polos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$.



4.4 Produto vectorial: expresión analítica

A expresión analítica do produto vectorial de dous vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ obtense da seguinte forma:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo pola primeria fila queda:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ entón $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

5 Produto mixto

5.1 Produto mixto: definición

Definición 5.1 *Chámase produto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, e denótase por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, ao número que se obtén do cálculo*

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

5.2 Produto mixto: expresión analítica

A expresión analítica do produto mixto de tres vectores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ obtense da seguinte forma:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

5.3 Produto mixto: propiedades

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se e só se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linearmente dependentes.

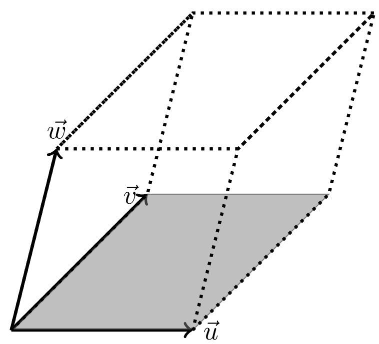
- $[x\vec{u}, y\vec{v}, z\vec{w}] = xyz[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ onde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

  Se lembramos as propiedades dos determinates lembramos as anteriores propiedades.

5.4 Produto mixto: aplicacións

O volume do paralelepípedo determinado por tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, é

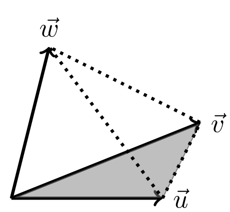
$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|.$$



$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

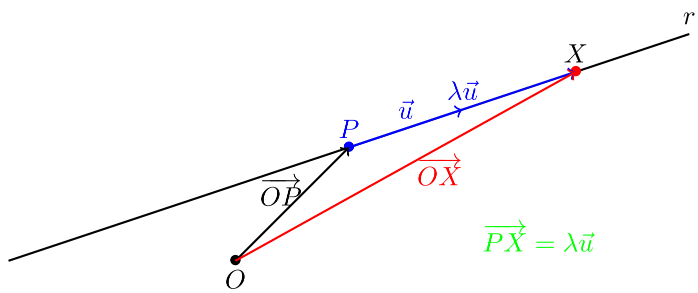
Produto mixto: volume dun tetraedro
O volume do tetraedro determinado por tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$, é

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{1}{6}|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|.$$



$$V = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

6 Ecuacións da recta no espazo



Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2)$ entón
Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases}$$

Despexando λ en cada ecuación e igualando obtemos a
Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Pódese escribir como

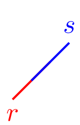
$$\begin{cases} u_2(x - x_0) = u_1(y - y_0) \\ u_3(x - x_0) = u_1(z - z_0) \\ u_3(y - y_0) = u_2(y - y_0) \end{cases}$$

As tres ecuacións non son independentes e tomando dúas independentes chegamos ás
Ecuacións implícitas da recta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

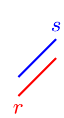
7 Posición relativa de dúas rectas no espazo

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



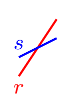
COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común



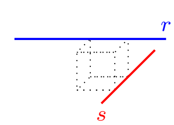
PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común



CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común



CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

7.1 Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d_r}$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d_s}$.

Se $\operatorname{ran}(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 1$ (é dicir, $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s}$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

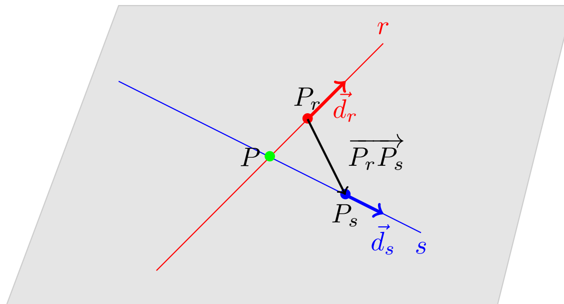
Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\text{ran}(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$ (é dicir, $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}).$$

Son SECANTES

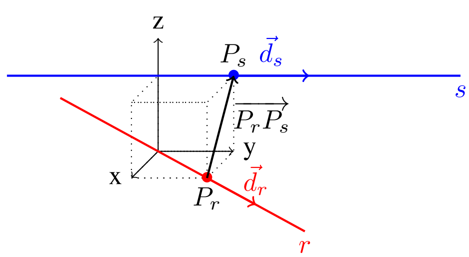


se e soamente se

$$\text{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2.$$

- $\vec{d_r}$ e $\vec{d_s}$ son linealmente independentes
- $\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}$ e $\vec{d_s}$ non son linealmente independentes

CRÚZANSE



se e soamente se

$$\text{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}$ e $\vec{d_s}$ son linealmente independentes.

7.2 Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d_r}$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d_s}$.

Se $\text{ran}(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 1$ (é dicir, $\vec{d_r} \parallel \vec{d_s}$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\text{ran}(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$ (é dicir, $\vec{d_r} \nparallel \vec{d_s}$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\text{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\text{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

7.3 Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d_r}$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d_s}$.

- Se $\operatorname{ran}(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 1$:
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(\vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$:
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}) = 3$ as rectas crúzanse.

8 Posición relativa de dúas rectas en forma implícita

Dadas as rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right. \quad \text{e} \quad s : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0, \\ a'''x & + & b'''y & + & c'''z & + & d''' & = & 0. \end{array} \right.$$

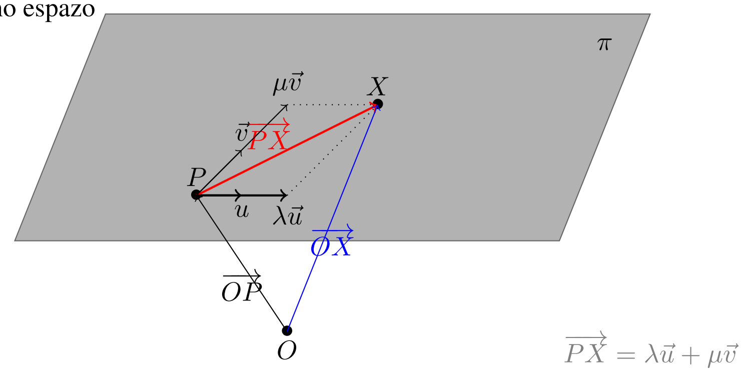
definimos

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ as rectas son coincidentes.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas córtanse.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 3$ e $\operatorname{ran}(A) = 4$ as rectas crúzanse.

9 Ecuacións do plano no espazo

Ecuacións do plano no espazo



Ecuación vectorial do plano

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PX} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

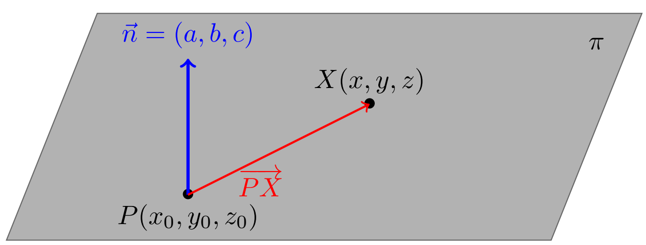
Se denotamos $P(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ temos as **Ecuacións paramétricas do plano**

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & p_1 & + & \lambda u_1 & + & \mu v_1 \\ y & = & p_2 & + & \lambda u_2 & + & \mu v_2 \\ z & = & p_3 & + & \lambda u_3 & + & \mu v_3 \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Usando que $\overrightarrow{PX}$ é combinación lineal de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ obtemos a **Ecuación implícita do plano**

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & u_1 & v_1 \\ y - p_2 & u_2 & v_2 \\ z - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

10 Ecuación normal do plano



$$\vec{n} \perp \overrightarrow{PX} \qquad \Longleftrightarrow \quad (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

A **ecuación normal do plano** π determinado por $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e $\vec{n} = (a, b, c) \perp \pi$ é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

10.1 Paso de ecuacións implícitas da recta a outras

Dadas as ecuacións implćitas dunha recta

$$r : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3, \\ 2x & - & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

podémola pasar a paramétricas:

- Resolvendo o sistema para obter as ecuacións paramétricas ($z = \lambda$, etc).

- Obteendo un punto P buscando unha solución do sistema e o vector director é $\vec{d_r} = (1,1,1) \times (2,-1,1)$.

  Neste caso, $P(1,1,1)$ e $\vec{d_r} = (1,1,1) \times (2,-1,1) = (4,-1,-3)$.

  Polo tanto

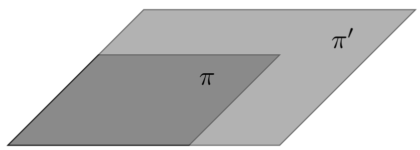
$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

11 Posición relativa de dous planos no espazo

Posición relativa de dous planos no espazo Os planos $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array} \right.$ son

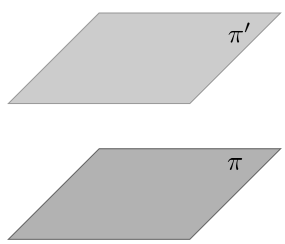
- o mesmo plano se

$$\text{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1;$$



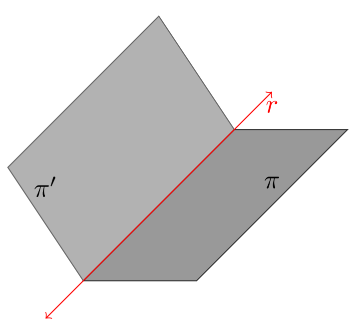
- paralelos se

$$\text{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \text{ e } \text{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2;$$



- secantes (córtanse nunha recta) se

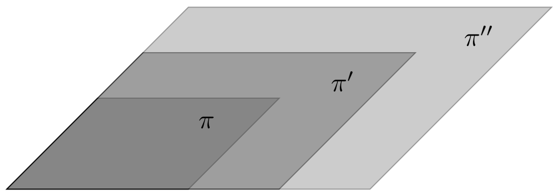
$$\text{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$



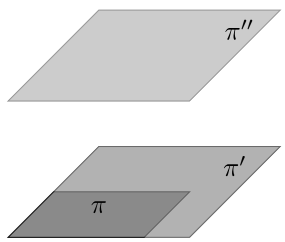
12 Posición relativa de tres planos no espazo

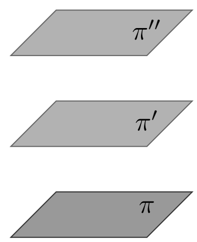
Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$ tense que:

- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 1$ os planos son coincidentes

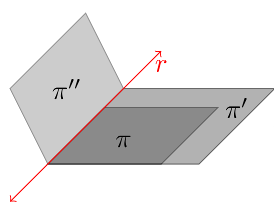


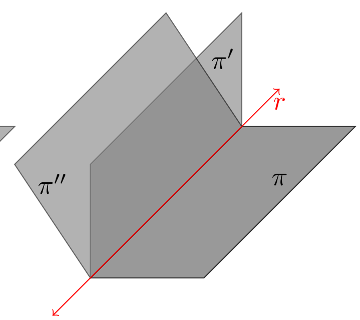
- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1$ e $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$ os planos son paralelos pero non todos iguais.



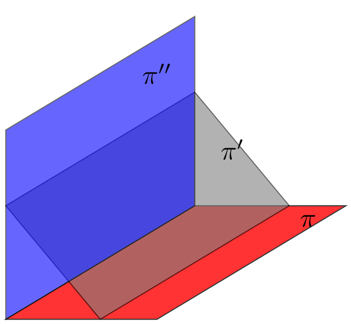


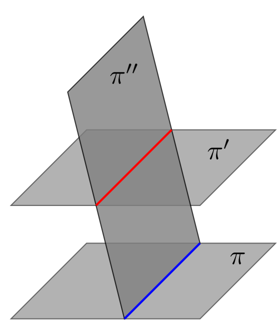
- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$ os planos córtanse nunha recta.



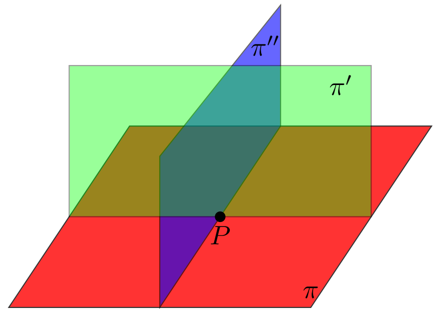


- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$ e $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$ os planos non teñen ningún punto en común e poden darse os casos





- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$ os planos córtanse nun punto.



13 Posición relativa de recta e plano no espazo I

Dados $r : \overrightarrow{OP_r} + \lambda \vec{d_r}$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ pódense dar os casos:

- Se $\vec{n} \cdot \vec{d_r} \neq 0$ entón a recta e o plano córtanse nun punto
- Se $\vec{n} \cdot \vec{d_r} = 0$ pódense dar dous casos:
  - Se $P_r \in \pi$ a recta está contida no plano, e
  - se $P_r \notin \pi$ a recta e o plano son paralelos.

EXEMPLO.-

Dada a recta $r : \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ e o plano $\pi : x - 4y + z = 0$ estudar a súa posición relativa. Se se cortan, determinar o punto de corte.

Posición relativa:

$$\vec{n} \cdot \vec{d_r} = (1, -4, 1) \cdot (2, 1, 3) = 1 \neq 0 \implies$$

r e π córtanse.

Punto de corte:

$$1 + 2\lambda - 4\lambda + 3\lambda = 0 \implies \lambda = -1.$$

O punto de corte é $P(-1, -1, -3)$.

14 Posición relativa de recta e plano no espazo II

Se nos dan as ecuacións da recta en forma implícita formamos un sistema coa ecuación do plano.

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ a recta está contida no plano (sistema compatible indeterminado, infinitas solucións).
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ a recta e o plano son paralelos (sistema incompatible, sen solución).
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ a recta e o plano córtanse nun punto (sistema compatible determinado, solución única).

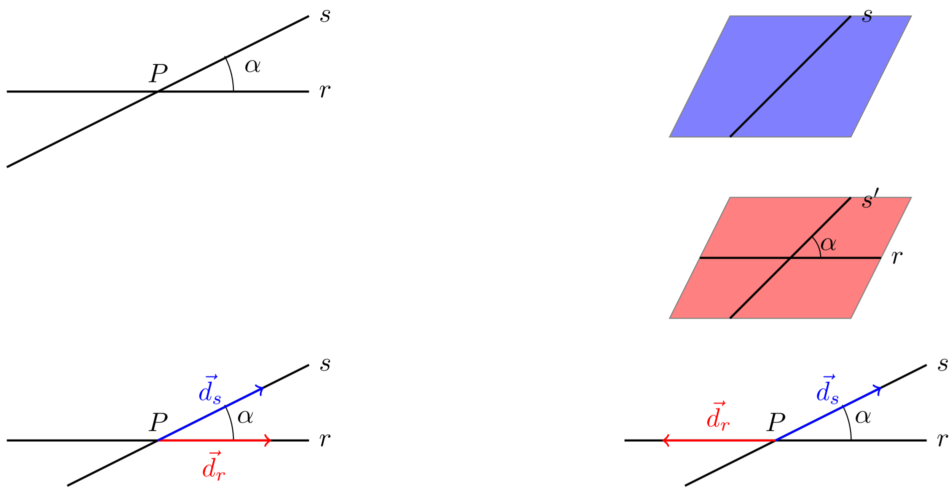
O punto de corte obtense resolvendo o sistema.

15 Ángulos

Ángulo formado por dúas rectas

O ángulo formado por dúas rectas r e s que se cortan é o menor dos ángulos que forman no plano que determinan

O ángulo formado por dúas rectas r e s que se cruzan é o ángulo formado por dúas rectas paralelas ás dadas que sexan secantes.



Expresión vectorial

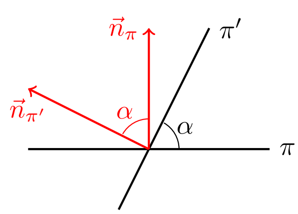
$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_r\cdot\vec{d}_s|}{|\vec{d}_r||\vec{d}_s|}$$

Expresión analítica

Se $\vec{d}_r = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{d}_s = (v_1,v_2,v_3)$ entón

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

{bf Ángulo formado por dous planos O ángulo formado por dous planos secantes é o menor dos ángulos diedros que determinan.

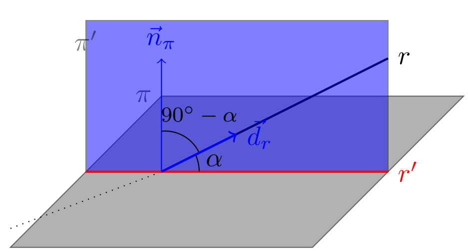


Expresión vectorial $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_\pi\cdot\vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_{\pi'}|}$

Expresión analítica Se $\vec{n}_\pi = (u_1,u_2,u_3)$ e $\vec{n}_{\pi'} = (v_1,v_2,v_3)$ entón

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Ángulo formado por unha recta e un plano O ángulo formado por unha recta r e un plano π é o ángulo que forma a recta r coa recta r' que é a proxección ortogonal da recta r sobre π.



Expresión vectorial $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{d}_r||\vec{n}_\pi|}$

Expresión analítica Se $\vec{d}_r = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{n}_\pi = (v_1, v_2, v_3)$ entón

$$\sin\alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

16 Perpendicularidade

Ángulo entre rectas $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r||\vec{d}_s|}$

Dúas rectas r e s son **ortogonais** ou **perpendiculares** se forman un ángulo de 90°.

$$r \perp s \iff \vec{d}_r \perp \vec{d}_s \iff \vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

Ángulo entre planos $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi||\vec{n}_{\pi'}|}$

Dous planos π e π' son **ortogonais** ou **perpendiculares** se forman un ángulo de 90°.

$$\pi \perp \pi' \iff \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_{\pi'} \iff \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0.$$

Ángulo entre recta e plano $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{d}_r|}{|\vec{n}_\pi||\vec{d}_r|}$

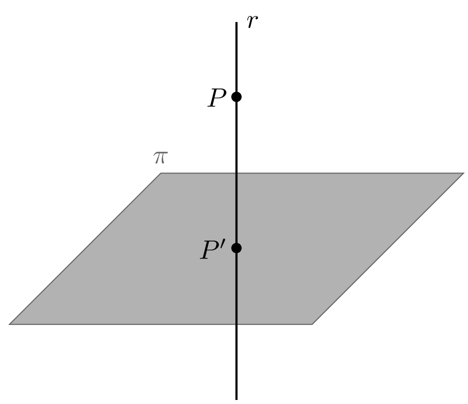
A recta r e o plano π son **ortogonais** ou **perpendiculares** se forman un ángulo de 90°.

$$r \perp \pi \iff \vec{d}_r || \vec{n}_\pi.$$

17 Proxeccións ortogonais

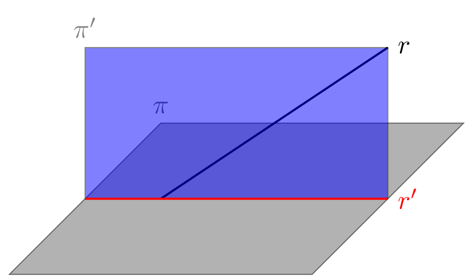
Proxección ortogonal dun punto sobre un plano

Chámase **proxección ortogonal dun punto** P **sobre un plano** π ao punto P' que se obtén como intersección da recta r perpendicular a π que pasa por P co plano π.



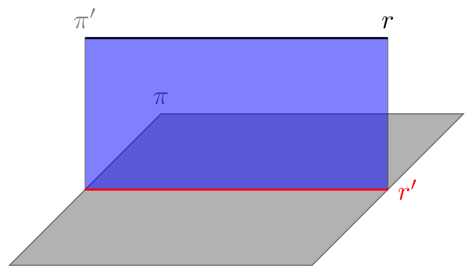
Proxección ortogonal dunha recta sobre un plano

Chámase **proxección ortogonal dunha recta** r **sobre un plano** π á recta r' que se obtén como intersección do plano π' perpendicular a π que contén a r co plano π.



Proxección ortogonal dunha recta sobre un plano

Chámase **proxección ortogonal dunha recta** r **sobre un plano** π á recta r' que se obtén como intersección do plano π' perpendicular a π que contén a r co plano π.



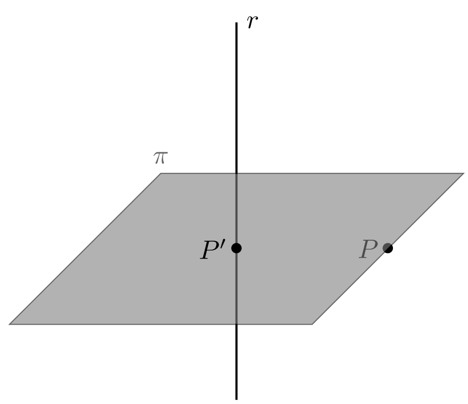
Proxección ortogonal dunha recta sobre un plano

Chámase **proxección ortogonal dunha recta** r **sobre un plano** π á recta r' que se obtén como intersección do plano π' perpendicular a π que contén a r co plano π.

Nota.-
Qué pasa se r é perpendicular a π? En tal caso a proxección é un punto. Qué punto? O punto de intersección da recta e o plano.

Proxección ortogonal dun punto sobre unha recta

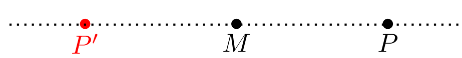
Chámase **proxección ortogonal dun punto** P **sobre unha recta** r ao punto P' que se obtén como intersección do plano π perpendicular a r que contén a P coa recta r.



18 Puntos simétricos

Simétrico dun punto respecto doutro punto

Chámase **simétrico dun punto** P **respecto dun punto** M ao punto P' que cumpre que M é o punto medio do segmento PP'.



Se $P(x_1, y_1, z_1)$ e $M(x_2, y_2, z_2)$ entón $P'(x, y, z)$ satisfai:

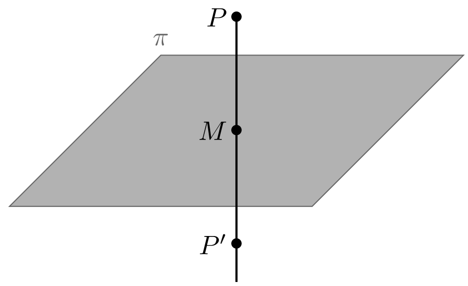
$$(x_2, y_2, z_2) = \left(\frac{x + x_1}{2}, \frac{y + y_1}{2}, \frac{z + z_1}{2}\right)$$

Polo tanto

$$P'(x, y, z) = (2x_2 - x_1, 2y_2 - y_1, 2z_2 - z_1).$$

Simétrico dun punto respecto dun plano

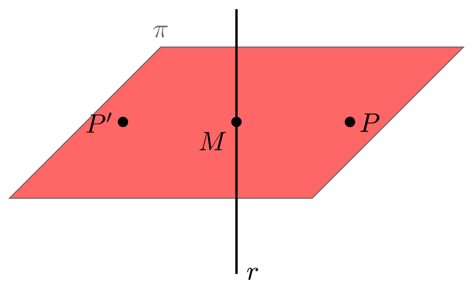
Chámase **simétrico dun punto** P **respecto dun plano** π ao punto P' que se atopa na recta perpendicular a π que pasa por P de modo que P e P' equidistan do plano.



P' é o simétrico de P con respecto a M.

Simétrico dun punto respecto dunha recta

Chámase **simétrico dun punto** P **respecto dunha recta** r ao punto P' que se atopa na recta perpendicular a r que pasa por P de modo que P e P' equidistan da recta.



P' é o simétrico de P con respecto a M.

19 Distancias

Distancia entre dous puntos

A distancia entre dous puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$ é o módulo do vector $\overrightarrow{PQ}$.

Expresión vectorial

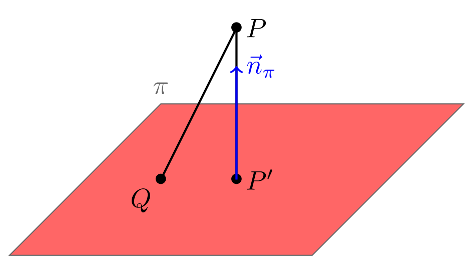
$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}|$$

Expresión vectorial

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Distancia dun punto a un plano

A distancia dun punto P a un plano π é a distancia do punto P ao punto P' que é a proxección ortogonal de P sobre π.



$d(P,\pi) =$ Proxección de $\overrightarrow{QP}$ sobre $\vec{n}_\pi$ Se $\pi : ax + by + cz + d = 0$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x_1, y_1, z_1)$ entón

$$d(P,\pi) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{QP}|}{|\vec{n}_\pi|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ temos

$$d(P(x_0, y_0, z_0), \pi : ax + by + cz + d = 0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Distancia entre planos paralelos

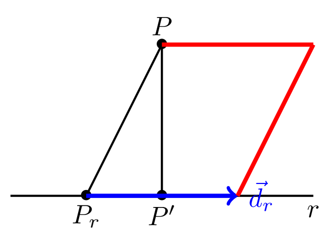
A distancia entre dous planos que se cortan ou son iguais é cero.

A distancia entre dous planos paralelos é igual a distancia dun punto calquere dun plano ao outro plano.

$$\pi \parallel \pi' \implies d(\pi, \pi') = d(P_\pi, \pi') = d(P_{\pi'}, \pi).$$

Distancia dun punto a unha recta

A distancia dun punto P a unha recta r é a distancia do punto P ao punto P' que é a proxección ortogonal de P sobre r.



$d(P,r) =$ Áltura do paralelogramo $= \dfrac{\textbf{Superficie}}{\textbf{Base}}$

Se $\vec{d_r} = (a, b, c)$, $P(x_0, y_0, z_0)$ e $P_r(x_1, y_1, z_1)$ entón

$$d(P,r) = \frac{|\vec{d_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\vec{d_r}|} = \frac{|(a,b,c) \times (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

FORMA 2 :

- Calcular a proxección ortogonal P' de P sobre r.
- $d(P,r) = d(P,P')$.

FORMA 3 : **(Punto xenérico)**

- Consideramos un punto xenérico $P_r(\lambda)$ de r e obtemos o vector $\overrightarrow{P_r(\lambda)P}$.
- Resolvemos a ecuación $\overrightarrow{P_r(\lambda)P} \cdot \vec{d_r} = 0$.
- $d(P,r) = d(P, P_r(\lambda_0))$.

Distancia entre dúas rectas

A distancia entre dúas rectas r e s é o mínimo das distancias dos puntos de r aos puntos de s :

$$d(r,s) = \min_{P_r \in r, P_s \in s} d(P_r, P_s).$$

A distancia entre dúas rectas r e s que se cortan é cero.

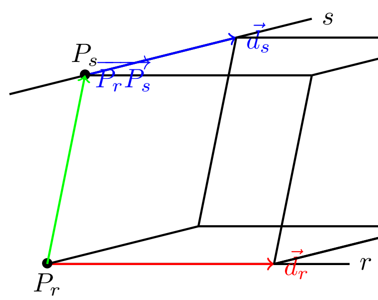
A distancia entre dúas rectas paralelas r e s pódese obter como a distancia dun punto calquera dunha á outra:

$$d(r,s) = d(P_r, s) = d(P_s, r).$$

Só nos queda considerar o caso en que r e s se cruzan.

Distancia entre dúas rectas que se cruzan

A distancia entre dúas rectas r e s é a distancia entre o plano que contén a r e é paralelo a s e o plano que contén a s e é paralelo a r.



$d(P, r) =$ Altura do paralelepípedo $= \dfrac{\textbf{Volume}}{\textbf{Base}}$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d_r}, \vec{d_s}]|}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|}$$

FORMA 2 :

- Calcular o plano π que contén a r e é paralelo a s.
- $d(r,s) = d(P_s, \pi)$.

FORMA 3 : **(Puntos xenéricos)**

Vémolo a continuación, cando calculemos a perpendicular común a dúas rectas.

20 Recta que corta perpendicularmente a outras dúas

Perpendicular común a dúas rectas que se cruzan

Se $r : P_r + \lambda \vec{d_r}$ e $s : P_s + \lambda \vec{d_s}$ entón

Forma 1 : $t : \begin{cases} \det(\overrightarrow{P_r X}, \vec{d_r}, \vec{d_r} \times \vec{d_s}) = 0 \\ \det(\overrightarrow{P_s X}, \vec{d_s}, \vec{d_r} \times \vec{d_s}) = 0 \end{cases}$

Forma 2 : **Puntos xenéricos (de onde se obtén** $d(r,s)$**)**

Collemos un punto xenérico $P_r(\lambda)$ de r e un punto xenérico $P_s(\mu)$ de s e formamos o vector $\overrightarrow{P_r(\lambda) P_s(\mu)}$

Resolvemos o sistema $\begin{cases} \overrightarrow{P_r(\lambda) P_s(\mu)} \cdot \vec{d_r} = 0 \\ \overrightarrow{P_r(\lambda) P_s(\mu)} \cdot \vec{d_s} = 0 \end{cases}$

A recta buscada é a que pasa por $P_r(\lambda_0)$ e $P_s(\mu_0)$

Tense que $d(r,s) = d(P_r(\lambda_0), P_s(\mu_0))$.

21 Lugares xeométricos no espazo

Plano mediador

O **plano mediador dun segmento** PQ é o lugar xeomeétrico dos puntos X do espazo que equidistan dos extremos do segmento

$$d(X, P) = d(X, Q).$$

Forma 1 :
Usar a definición de distancia e simplificar.

Forma 2 :

O plano mediador do segmento PQ é o plano que pasa polo punto medio do segmento PQ e é perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$.

Plano bisector

O **plano bisector de dous planos secantes** é o plano que divide o ángulo diedro formado polos dous planos en dous diedros iguais.

Como se obtén? Dados os planos α e β o plano mediador obtense como o lugar xeométrico dos puntos do espazo que equidistan de α e β :

$$d(X, \alpha) = d(X, \beta)$$

OLLO: Hai dúas solucións.

22 Recta que corta a outras dúas por un punto ou paralela a outra

Recta que corta a outras dúas por un punto ou paralela a outra

- Determinamos o plano α que contén a r e a P
- Determinamos o plano β que contén a s e a P
- A recta buscada é a intersección dos planos α e β

Recta que corta a outras dúas e é paralela a unha dada

- Determinamos o plano α que contén a r e a $\vec{v}$
- Determinamos o plano β que contén a s e a $\vec{v}$
- A recta buscada é a intersección dos planos α e β