MATEMÁTICAS II
LÍMITES E CONTINUIDADE

Manuel Fernández López

IES María Sarmiento
Misericordia 58
Viveiro, Lugo

February 28, 2016

Outline

1. Límites
   - Indeterminacións
   - Límites laterais
   - Algúns límites frecuentes
2. Continuidade
3. Teoremas de Bolzano, dos valores intermedios e de Weirstrass

Concepto de función

Definición de función

Unha función real de variable real é unha correspondencia que a cada valor x (variable independente) dun subconxunto D de $\mathbb{R}$ (chamado dominio) lle fai corresponder un único valor $y \in \mathbb{R}$ (variable dependente).

Úsase a notación

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) \end{array}$$

CC BY NC SA

Concepto de función

Definición de función

Unha función real de variable real é unha correspondencia que a cada valor x (variable independente) dun subconxunto D de $\mathbb{R}$ (chamado dominio) lle fai corresponder un único valor $y \in \mathbb{R}$ (variable dependente).

Úsase a notación

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f(x) \end{array}$$

CC BY NC SA

Límite finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite finito dunha función nun punto

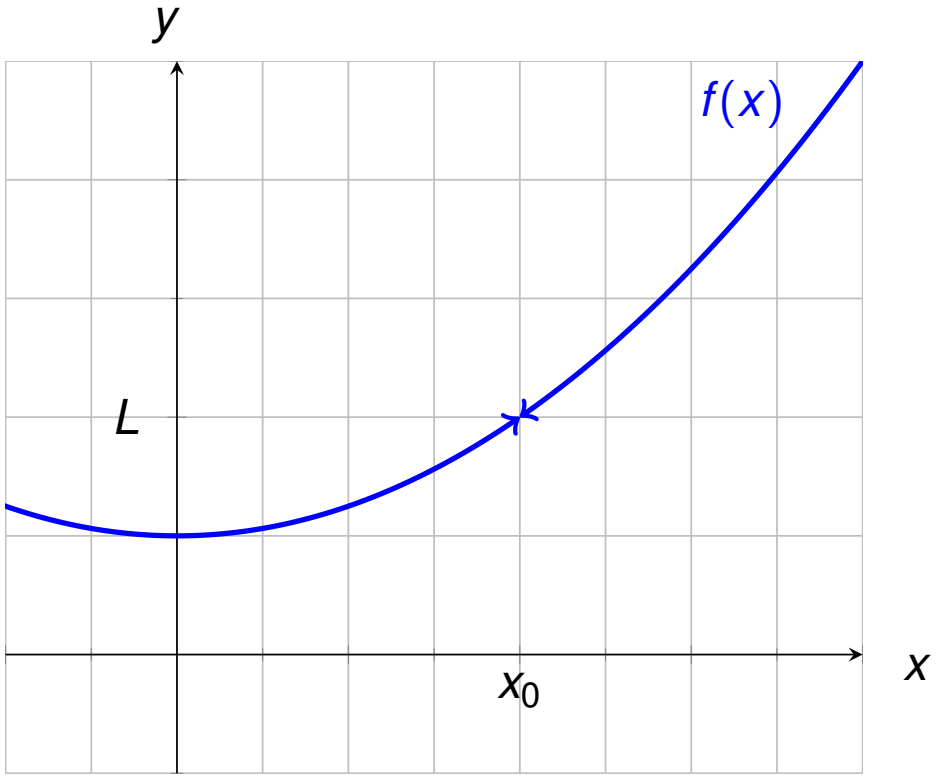
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

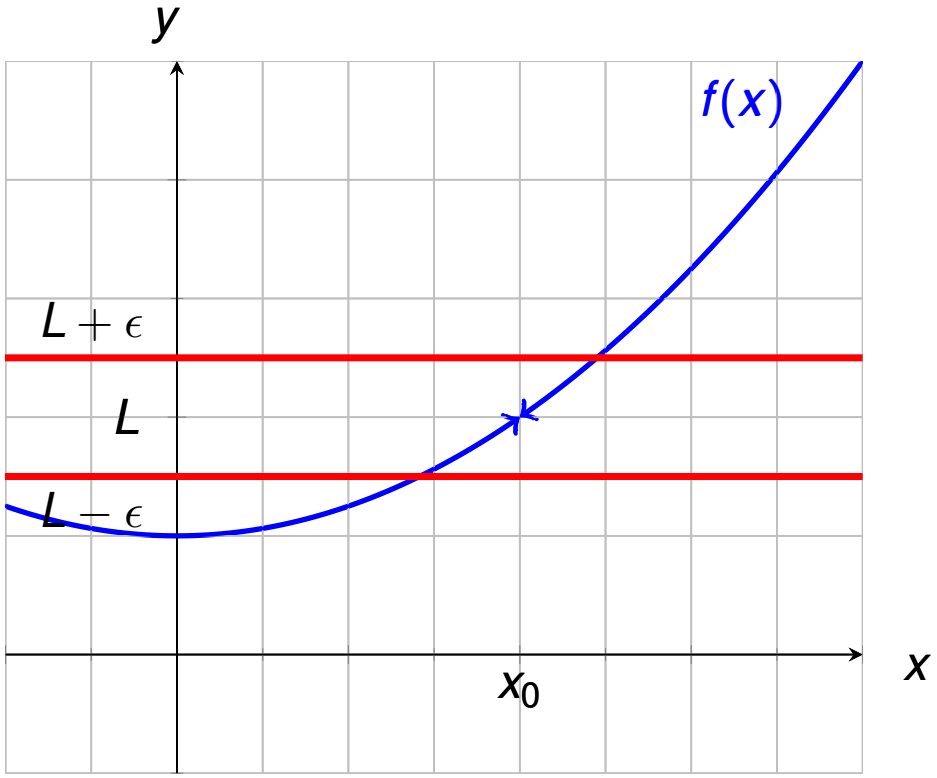
Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

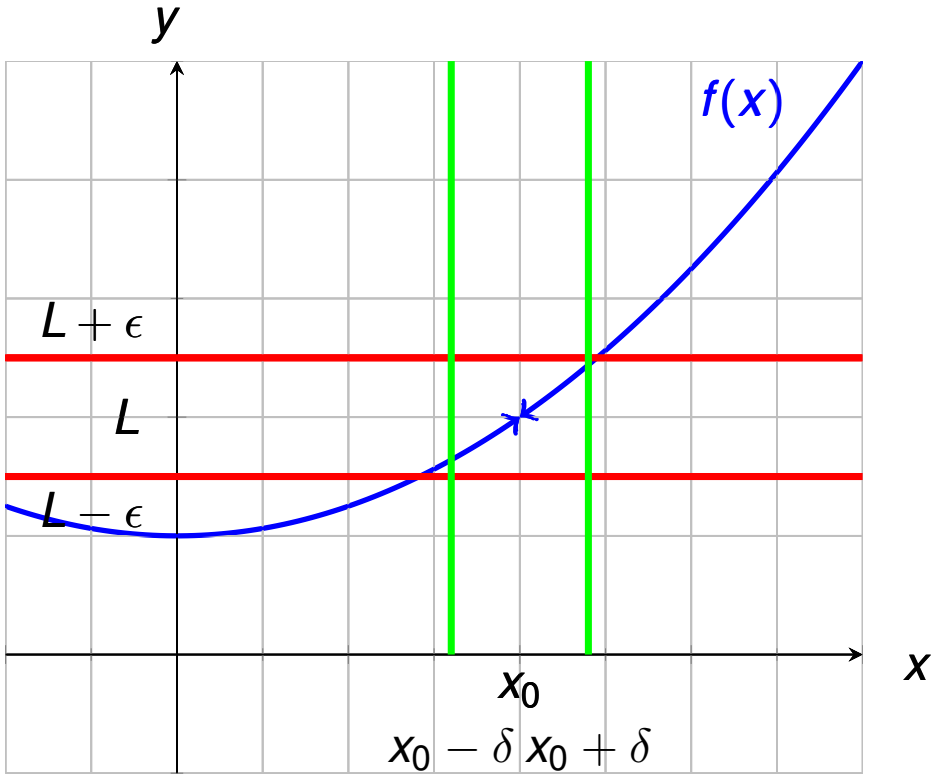
Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite finito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $x > M$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite finito dunha función en $+\infty$

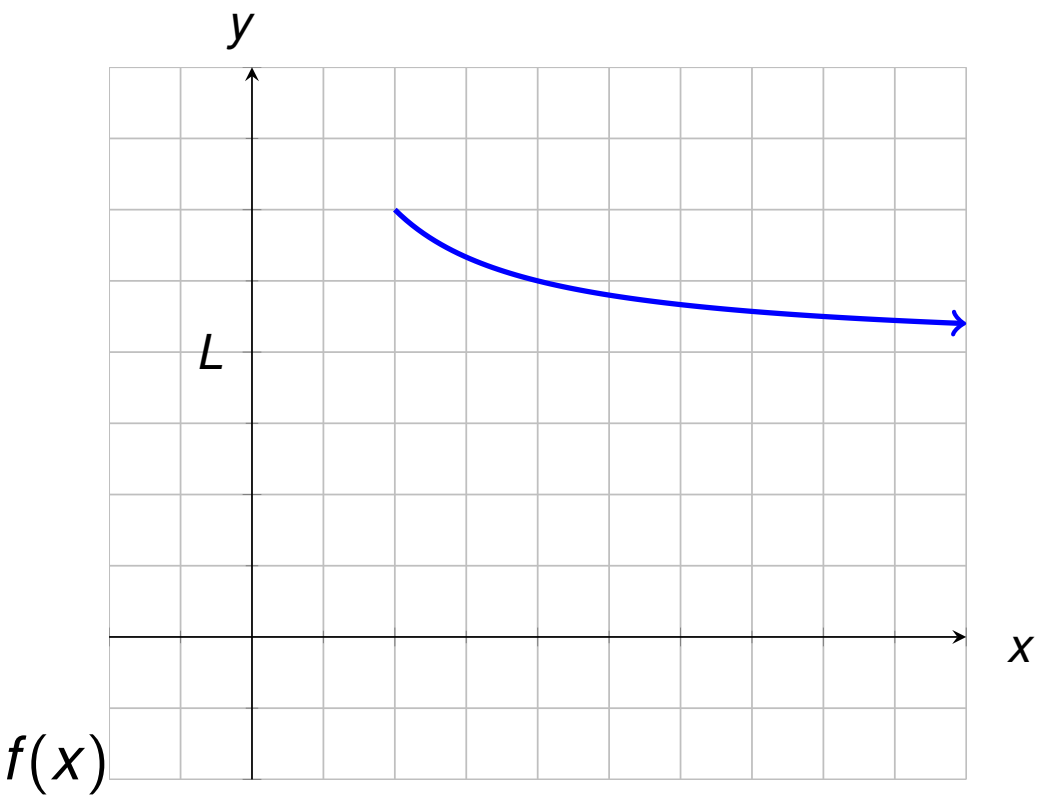
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $x > M$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite finito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

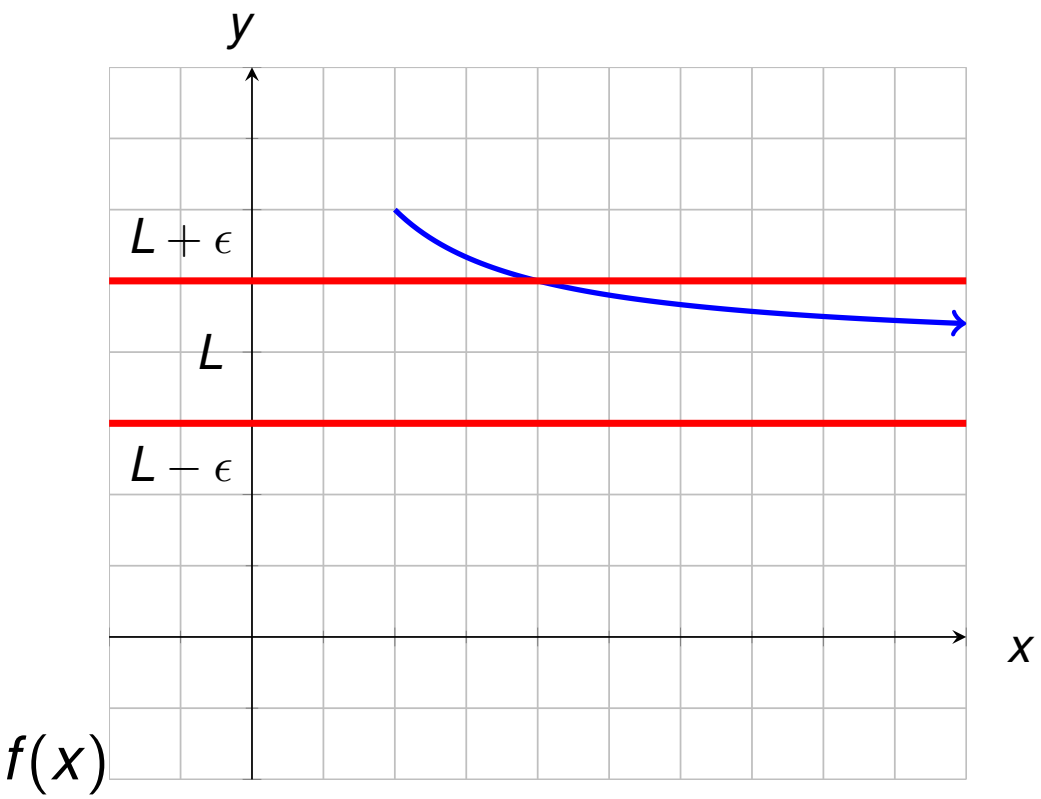
Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $x > M$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite finito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

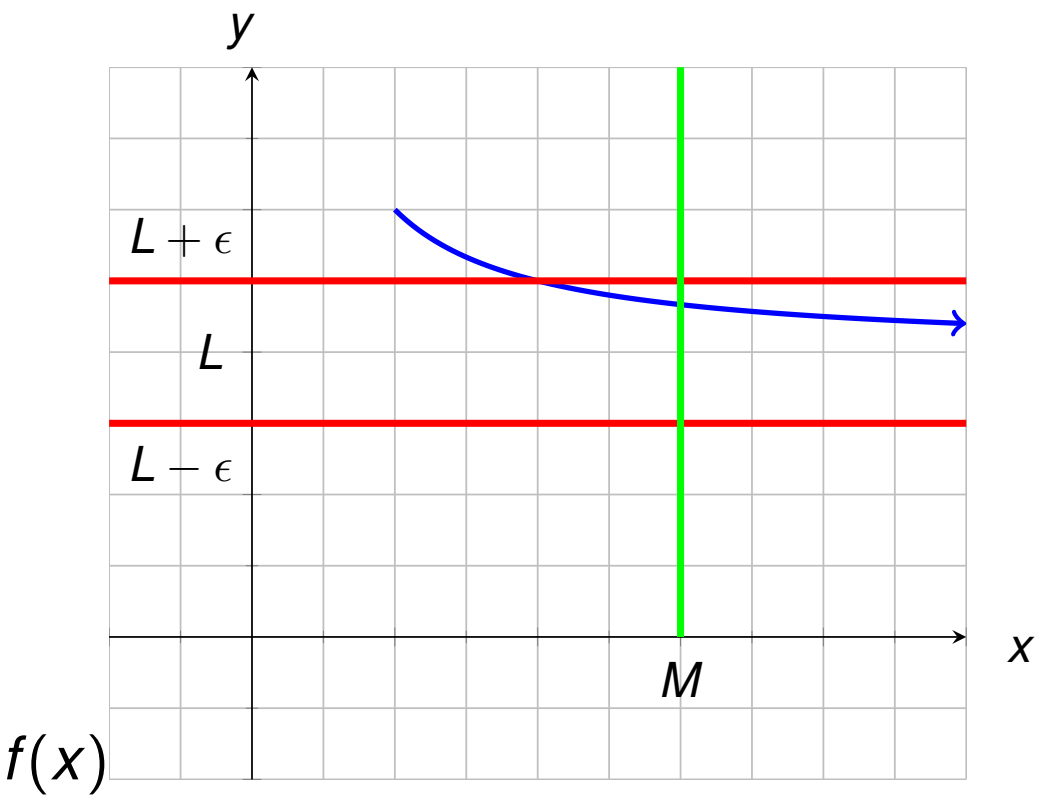
Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $x > M$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite finito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $x > M$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Operacións con límites

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$ ($L_1, L_2 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$) entón:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = cL_1$, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 L_2$,
- $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)} = L_1^{L_2}$, se $f(x) > 0$. Ollo, 0^0 INDETERMINADO.

CC BY NC SA

Límite infinito dunha función en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists M > 0 : 0 < |x - x_0| < \epsilon \implies f(x) > M.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \epsilon$ entón $f(x) > M$.

Límite infinito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \, \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M.$$

Para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que se se cumpre $x > N$ entón $f(x) > M$.

Adaptar as definicións para $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ **e** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Límite infinito dunha función en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : 0 < |x - x_0| < \epsilon \implies f(x) > M.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \epsilon$ entón $f(x) > M$.

Límite infinito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M.$$

Para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que se se cumpre $x > N$ entón $f(x) > M$.

Adaptar as definicións para $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ **e** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Límite infinito dunha función en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : 0 < |x - x_0| < \epsilon \implies f(x) > M.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \epsilon$ entón $f(x) > M$.

Límite infinito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M.$$

Para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que se se cumpre $x > N$ entón $f(x) > M$.

Adaptar as definicións para $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ **e** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Límite infinito dunha función en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : 0 < |x - x_0| < \epsilon \implies f(x) > M.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \epsilon$ entón $f(x) > M$.

Límite infinito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M.$$

Para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que se se cumpre $x > N$ entón $f(x) > M$.

Adaptar as definicións para $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ **e** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

CC BY NC SA

Límite infinito dunha función en x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists M > 0 : 0 < |x - x_0| < \epsilon \implies f(x) > M.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se se cumpre $0 < |x - x_0| < \epsilon$ entón $f(x) > M$.

Límite infinito dunha función en $+\infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \; \exists N > 0 : x > N \implies f(x) > M.$$

Para todo $M > 0$ existe $N > 0$ tal que se se cumpre $x > N$ entón $f(x) > M$.

Adaptar as definicións para $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ **e** $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Contidos

1. Límites
   - Indeterminacións
   - Límites laterais
   - Algúns límites frecuentes
2. Continuidade
3. Teoremas de Bolzano, dos valores intermedios e de Weirstrass

Operacións con límites e indeterminacións

SUMA E RESTA

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(\infty) - (-\infty) = \infty$$

$$(-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$(\infty) + (-\infty) = (\infty) - (\infty) \quad \text{INDETERMINADO}$$

Operacións con límites e indeterminacións

PRODUTO

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$(+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

$$c\cdot(\infty) = (\infty) \quad \text{se} \quad c > 0$$

$$c\cdot(\infty) = -\infty \quad \text{se} \quad c < 0$$

$$0\cdot(\infty), 0\cdot(-\infty) \quad \text{INDETERMINADO}$$

CC BY NC SA

Operacións con límites e indeterminacións

COCIENTE

$$\frac{0}{k} = 0 \quad \text{se} \quad k \neq 0$$

$$\frac{k}{0} \quad \text{INDETERMINADO} \quad (\text{posible} \quad \pm\infty)$$

$$\frac{0}{0} \quad \text{INDETERMINADO}$$

$$\frac{k}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \text{INDETERMINADO}$$

Operacións con límites e indeterminacións

POTENCIA

$$(+\infty)^k = +\infty \quad \text{se} \quad k > 0$$

$$(+\infty)^k = 0 \quad \text{se} \quad k < 0$$

$$(\infty)^0 \cdot \quad \text{INDETERMINADO}$$

$$k^{+\infty} = +\infty, k^{-\infty} = 0 \quad \text{se} \quad k > 1$$

$$k^{+\infty} = 0, k^{-\infty} = +\infty \quad \text{se} \quad 0 < k < 1$$

$$0^0, 1^\infty \quad \text{INDETERMINADO}$$

Contidos

1. Límites
   - Indeterminacións
   - Límites laterais
   - Algúns límites frecuentes
2. Continuidade
3. Teoremas de Bolzano, dos valores intermedios e de Weirstrass

Límite lateral finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite lateral finito dunha función nun punto

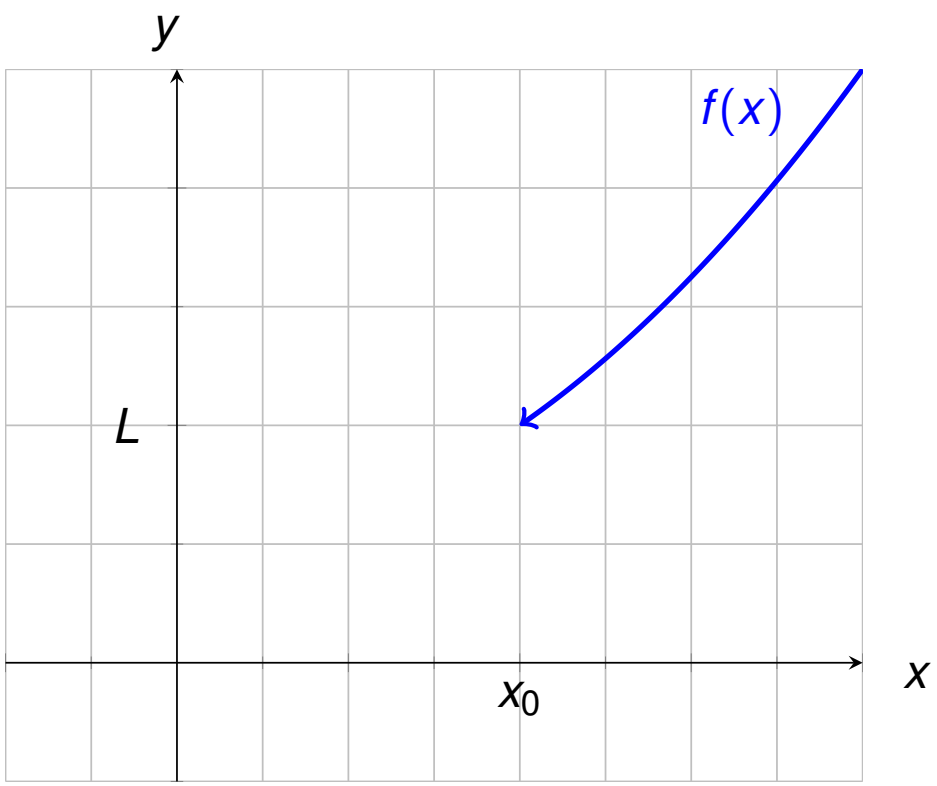
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.

Límite lateral finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

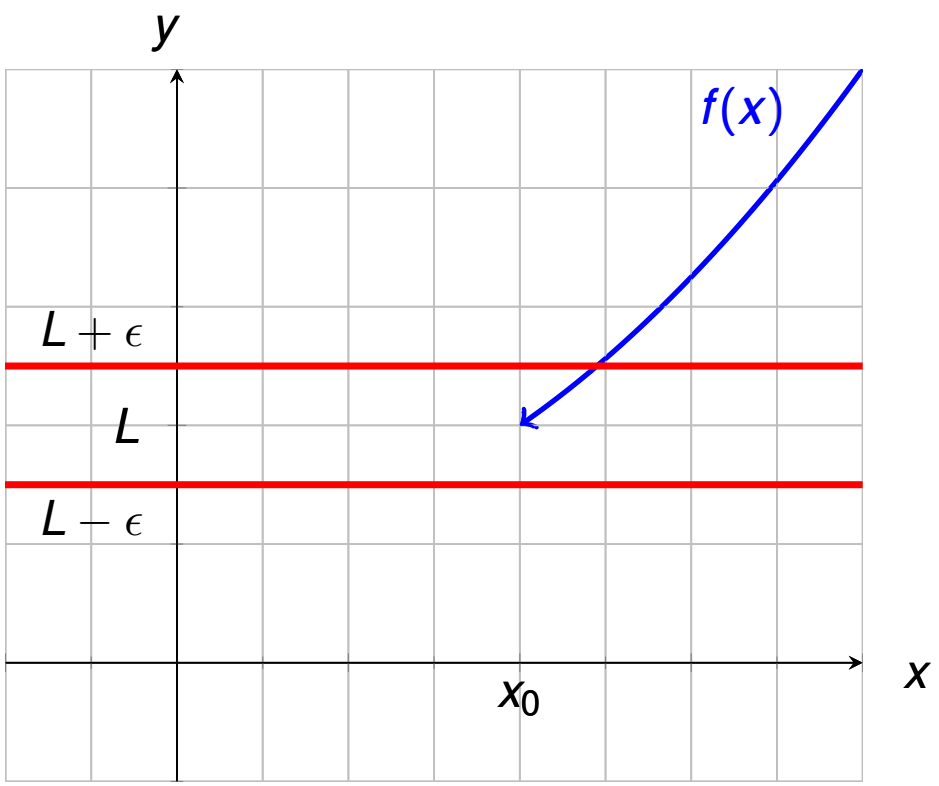
Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite lateral finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

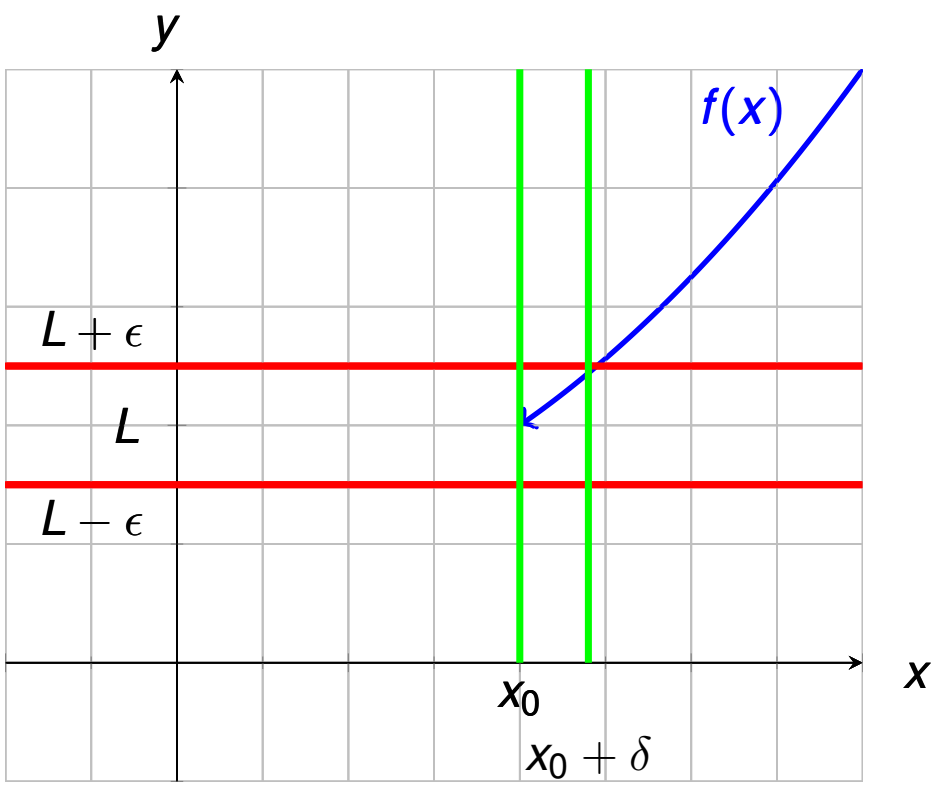
Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite lateral finito dunha función nun punto

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $|f(x) - L| < \epsilon$.



Límite lateral infinito dunha función nun punto

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > M.$

Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $f(x) > M$.

Límite lateral infinito dunha función nun punto

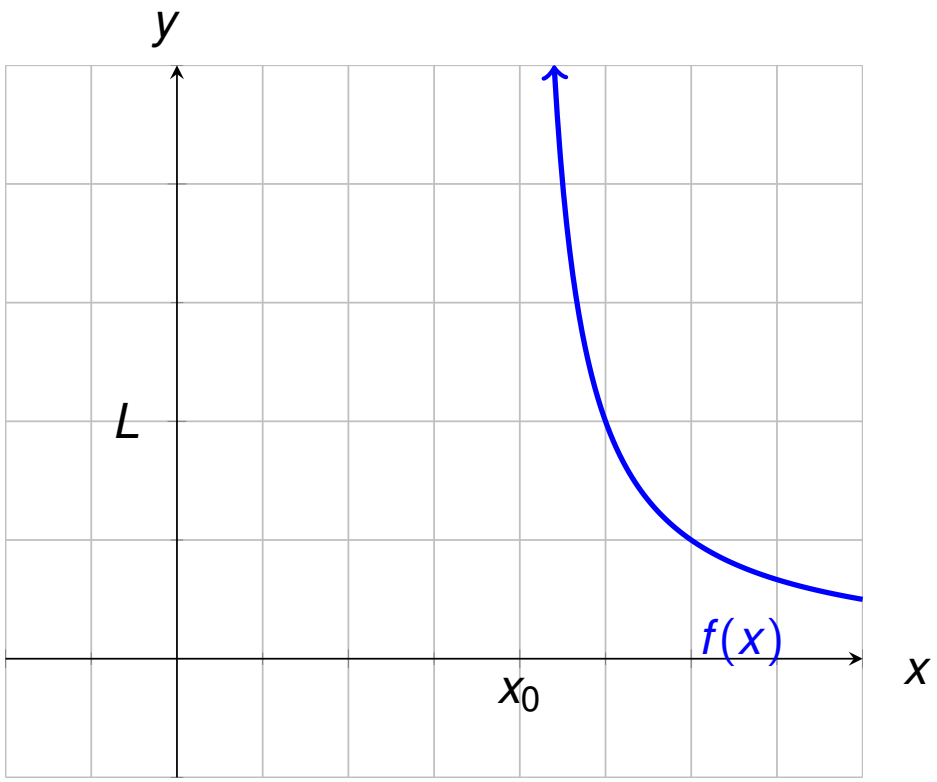
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \iff \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > M$.

Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $f(x) > M$.

Límite lateral infinito dunha función nun punto

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > M$.

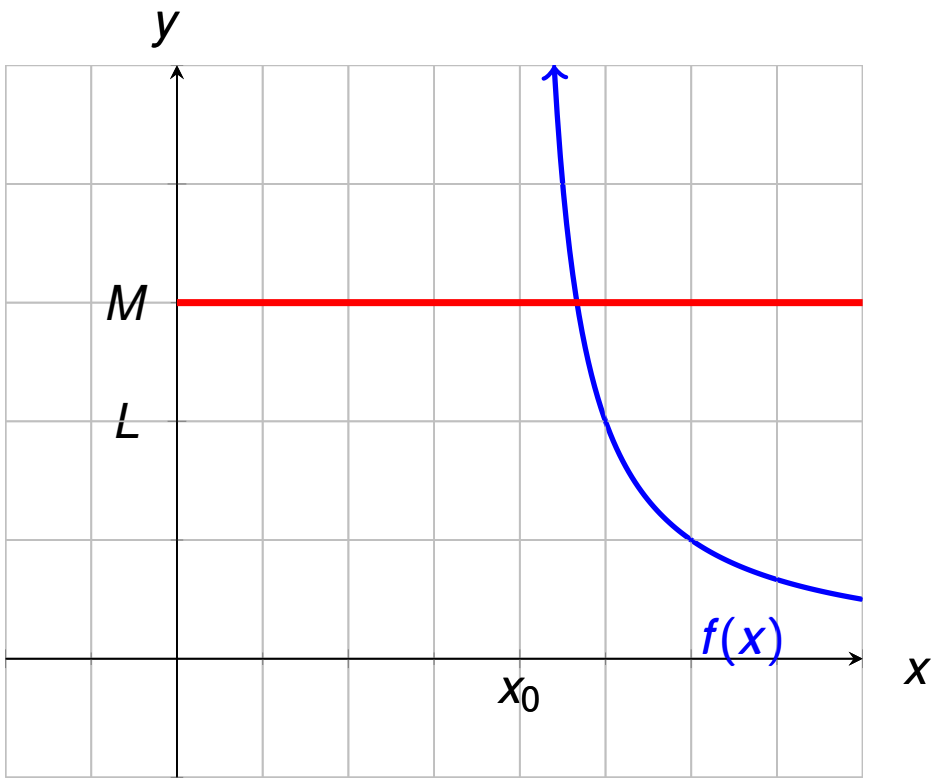
Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $f(x) > M$.



Límite lateral infinito dunha función nun punto

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > M$.

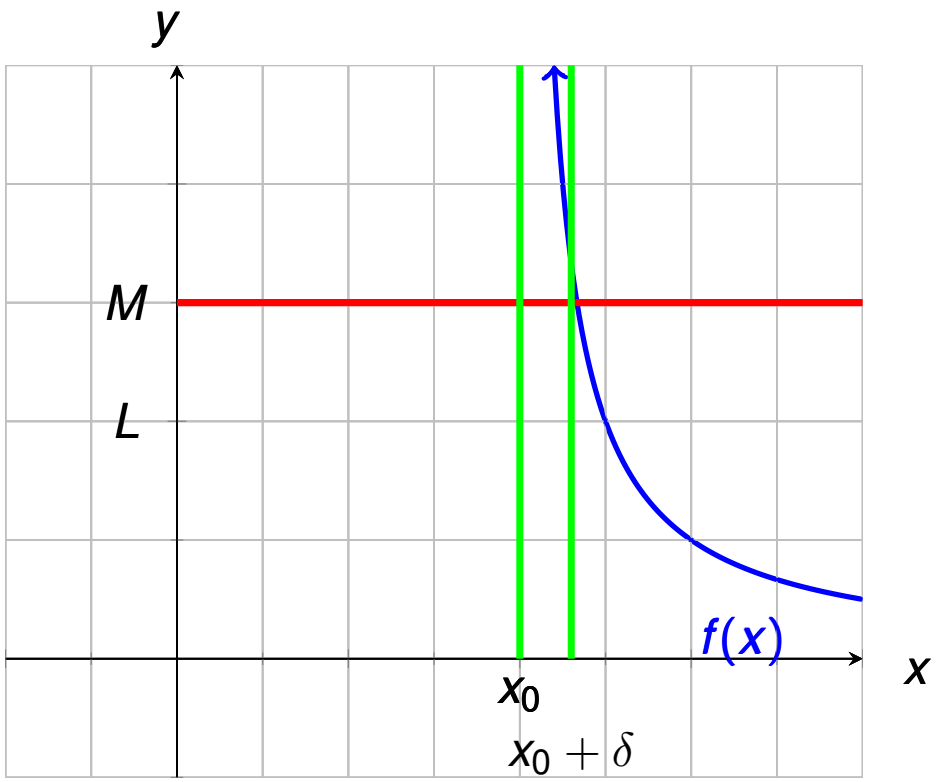
Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $f(x) > M$.



Límite lateral infinito dunha función nun punto

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \iff \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > M$.

Para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se se cumpre $x_0 < x < x_0 + \delta$ entón $f(x) > M$.



Relación entre límites e límites laterais

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe se e só se existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e son iguais.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ entón $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non existe.

CC BY NC SA

Relación entre límites e límites laterais

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe se e só se existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e son iguais.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ entón $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non existe.

CC BY NC SA

Relación entre límites e límites laterais

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe se e só se existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ e son iguais.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Se $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ entón $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ non existe.

Contidos

1. Límites
   - Indeterminacións
   - Límites laterais
   - Algúns límites frecuentes
2. Continuidade
3. Teoremas de Bolzano, dos valores intermedios e de Weirstrass

Límites de funcións polinómicas

$$\lim_{x\to x_0} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to +\infty} a_n x^n.$$

$$\lim_{x\to -\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to -\infty} a_n x^n.$$

Límites de funcións polinómicas

$$\lim_{x\to x_0} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to +\infty} a_n x^n.$$

$$\lim_{x\to -\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to -\infty} a_n x^n.$$

Límites de funcións polinómicas

$$\lim_{x\to x_0} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0.$$

$$\lim_{x\to +\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to +\infty} a_n x^n.$$

$$\lim_{x\to -\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to -\infty} a_n x^n.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Utilizamos a igualdade

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

ou dividimos pola maior potencia do denominador.

- Se $n > m$ o límite é $\pm\infty$,
- Se $n = m$ o límite é $\frac{a_n}{b_n}$,
- Se $n < m$ o límite é cero.

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Utilizamos a igualdade

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

ou dividimos pola maior potencia do denominador.

- Se $n > m$ o límite é $\pm\infty$,
- Se $n = m$ o límite é $\frac{a_n}{b_n}$,
- Se $n < m$ o límite é cero.

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de funcións racionais: $\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$

Factorizamos $P(x) = (x - x_0)^k P_1(x)$ e $Q(x) = (x - x_0)^l Q_1(x)$ usando Ruffini e simplificamos a expresión.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 x}{(x-1)(x+1)} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{x+1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)x}{(x-1)^2} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}.$$

Límites de cocientes con funcións irracionais: $\frac{0}{0}$

Resolvémolos multiplicando numerador e denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

Límites de cocientes con funcións irracionais: $\frac{0}{0}$

Resolvémolos multiplicando numerador e denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} .$$

Límites de cocientes con funcións irracionais: $\frac{0}{0}$

Resolvémolos multiplicando numerador e denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x-1} - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

CC BY NC SA

Límites de cocientes con funcións irracionais: $\frac{0}{0}$

Resolvémolos multiplicando numerador e denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x-1} - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1}$$

Límites de cocientes con funcións irracionais: $\frac{0}{0}$

Resolvémolos multiplicando numerador e denominador pola expresión conxugada da función que leve raíz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x-1} - 1} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{0}{0}} & \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \\
= & \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} \\
= & \lim_{x\to 1} x(\sqrt{x} + 1) \\
= & 2.
\end{aligned}$$

Indeterminacións $\frac{K}{0}$

Resólvense estudando os límites laterais.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{K}{0}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Polo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$ non existe.

Indeterminacións $\frac{K}{0}$

Resólvense estudando os límites laterais.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{K}{0}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Polo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$ non existe.

Indeterminacións $\frac{K}{0}$

Resólvense estudando os límites laterais.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{K}{0}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Polo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$ non existe.

Indeterminacións $\frac{K}{0}$

Resólvense estudando os límites laterais.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{K}{0}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Polo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$ non existe.

Indeterminacións $\frac{K}{0}$

Resólvense estudando os límites laterais.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} \underbrace{=}_{\text{IND } \frac{K}{0}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Polo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x}$ non existe.

Indeterminacións $0 \cdot \infty$

Transformámolas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\frac{1}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Indeterminacións $0 \cdot \infty$

Transformámolas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\frac{1}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Indeterminacións $0 \cdot \infty$

Transformámolas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}-2)\frac{1}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

CC BY NC SA

Indeterminacións $\infty - \infty$

Transformámolas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Indeterminacións $\infty - \infty$

Transformámolas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

CC BY NC SA

Indeterminacións $\infty - \infty$

Transformámolas en indeterminacións do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

Indeterminacións 1^∞

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ entón

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} \underbrace{=}_{\text{IND } 1^\infty} e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(1+x-1)\cdot\frac{2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^2.$$

Indeterminacións 1^∞

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ entón

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} \underbrace{=}_{\text{IND } 1^\infty} e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(1+x-1)\cdot\frac{2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^2.$$

CC BY NC SA

Indeterminacións 1^∞

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ entón

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} \underbrace{=}_{\text{IND } 1^\infty} e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(1+x-1)\cdot\frac{2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^2.$$

Indeterminacións 1^∞

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ entón

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} \underbrace{=}_{\text{IND } 1^\infty} e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(1+x-1)\cdot\frac{2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e^2.$$

Infinitésimos equivalentes

$f(x)$ é un infinitésimo en x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Dous infinitésimos en x_0 $f(x)$ e $g(x)$ son equivalentes ($f(x) \sim g(x)$) se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se $u(x)$ é un infinitésimo en $x = 0$ tense que $\sin u(x) \sim u(x)$, $\tan u(x) \sim u(x)$, $1 - \cos u(x) \sim \frac{u(x)^2}{2}$, $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$

No cálculo de límites podemos substituir un infinitésimo por un equivalente se aparece multiplicando ou dividindo (non sumando ou restando).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Infinitésimos equivalentes

$f(x)$ é un infinitésimo en x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Dous infinitésimos en x_0 $f(x)$ e $g(x)$ son equivalentes ($f(x) \sim g(x)$) se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se $u(x)$ é un infinitésimo en $x = 0$ tense que $\sin u(x) \sim u(x)$, $\tan u(x) \sim u(x)$, $1 - \cos u(x) \sim \frac{u(x)^2}{2}$, $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$

No cálculo de límites podemos substituir un infinitésimo por un equivalente se aparece multiplicando ou dividindo (non sumando ou restando).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Infinitésimos equivalentes

$f(x)$ é un infinitésimo en x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Dous infinitésimos en x_0 $f(x)$ e $g(x)$ son equivalentes ($f(x) \sim g(x)$) se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se $u(x)$ é un infinitésimo en $x = 0$ tense que $\sin u(x) \sim u(x)$, $\tan u(x) \sim u(x)$, $1 - \cos u(x) \sim \frac{u(x)^2}{2}$, $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$

No cálculo de límites podemos substituir un infinitésimo por un equivalente se aparece multiplicando ou dividindo (non sumando ou restando).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Infinitésimos equivalentes

$f(x)$ é un infinitésimo en x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Dous infinitésimos en x_0 $f(x)$ e $g(x)$ son equivalentes ($f(x) \sim g(x)$) se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se $u(x)$ é un infinitésimo en $x = 0$ tense que $\sin u(x) \sim u(x)$, $\tan u(x) \sim u(x)$, $1 - \cos u(x) \sim \frac{u(x)^2}{2}$, $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$

No cálculo de límites podemos substituir un infinitésimo por un equivalente se aparece multiplicando ou dividindo (non sumando ou restando).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Infinitésimos equivalentes

$f(x)$ é un infinitésimo en x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Dous infinitésimos en x_0 $f(x)$ e $g(x)$ son equivalentes ($f(x) \sim g(x)$) se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se $u(x)$ é un infinitésimo en $x = 0$ tense que $\sin u(x) \sim u(x)$, $\tan u(x) \sim u(x)$, $1 - \cos u(x) \sim \frac{u(x)^2}{2}$, $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$

No cálculo de límites podemos substituir un infinitésimo por un equivalente se aparece multiplicando ou dividindo (non sumando ou restando).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Comparación de infinitos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{x^b} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{c^x} = 0 \text{ (se } c > 1.)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000}}{2^x} = 0.$$

Comparación de infinitos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{x^b} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{c^x} = 0 \text{ (se } c > 1.)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000}}{2^x} = 0.$$

Comparación de infinitos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{x^b} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{c^x} = 0 \text{ (se } c > 1.)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000}}{2^x} = 0.$$

Comparación de infinitos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{x^b} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \infty, 1 \text{ ou } 0 \text{ segundo } a > b, a = b \text{ ou } a < b.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^b} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{c^x} = 0 \text{ (se } c > 1.)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000}}{2^x} = 0.$$

Continuidade nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Isto significa tres cousas

- Existe $f(x_0)$,
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- Ambos valores coinciden, é dicir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuidade nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Isto significa tres cousas

- Existe $f(x_0)$,
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- Ambos valores coinciden, é dicir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuidade nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Isto significa tres cousas

- Existe $f(x_0)$,
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- Ambos valores coinciden, é dicir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuidade nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Isto significa tres cousas

- Existe $f(x_0)$,
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- Ambos valores coinciden, é dicir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuidade nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Isto significa tres cousas

- Existe $f(x_0)$,
- Existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$,
- Ambos valores coinciden, é dicir, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuidade lateral nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua pola esquerda nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Definición

Unha función $f(x)$ é continua pola dereita nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

CC BY NC SA

Continuidade lateral nun punto

Definición

Unha función $f(x)$ é continua pola esquerda nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Definición

Unha función $f(x)$ é continua pola dereita nun punto x_0 do seu dominio se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

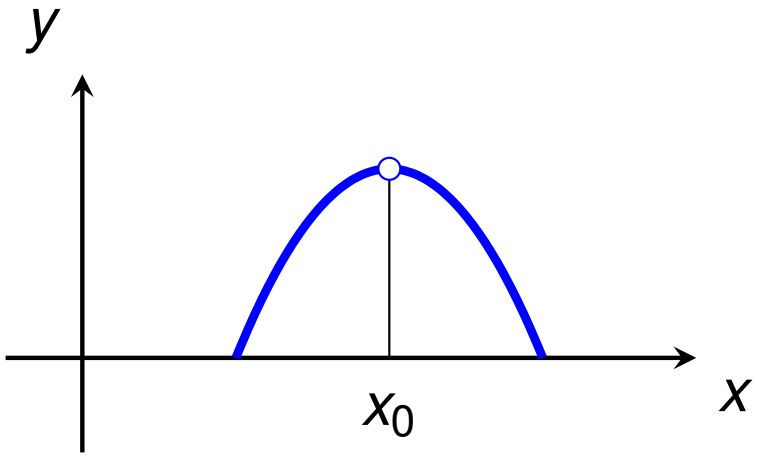
Descontinuidade evitable nun punto

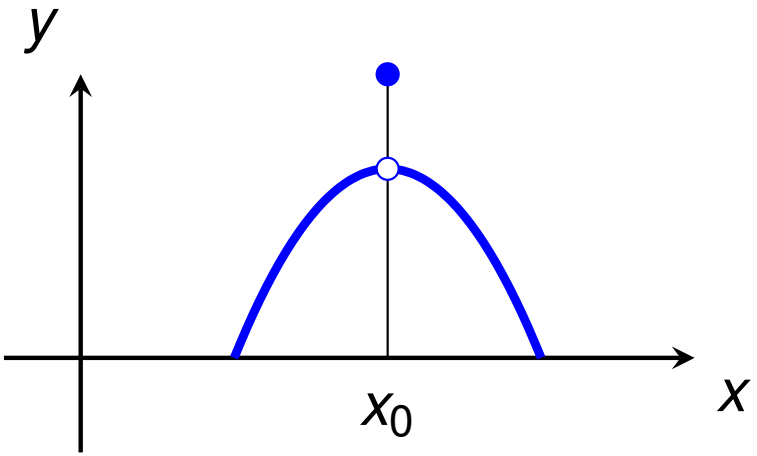
Non existe $f(x_0)$ ou $\exists f(x_0), \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

f ten unha **descontinuidade evitable** en x_0.

Descontinuidade evitable nun punto

Non existe $f(x_0)$ ou $\exists f(x_0), \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

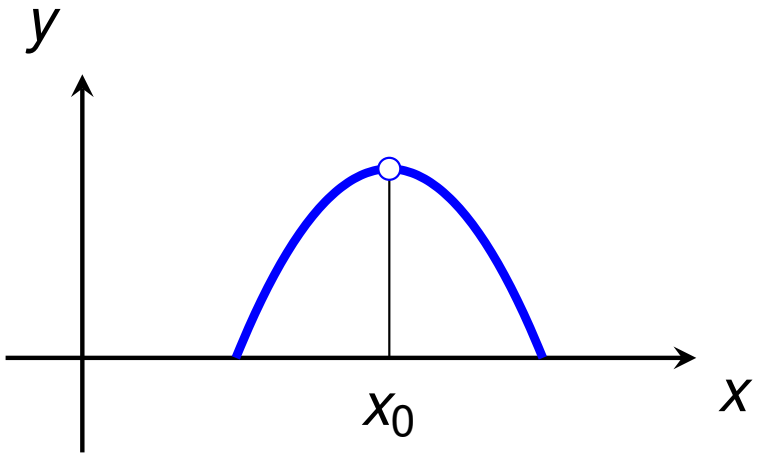


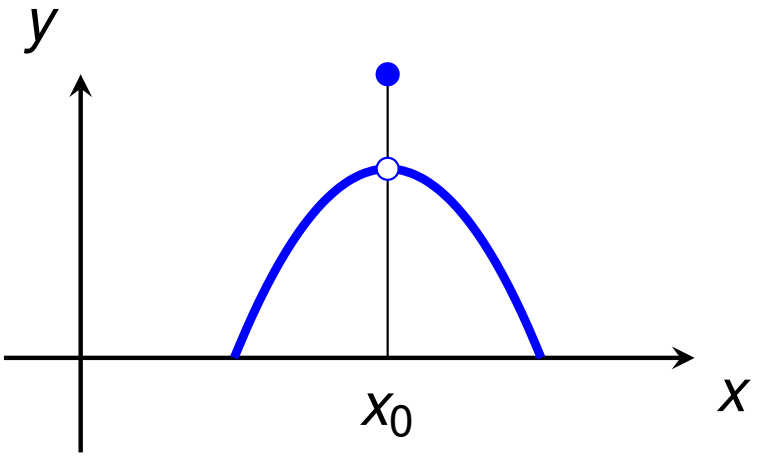


f ten unha **descontinuidade evitable** en x_0.

Descontinuidade evitable nun punto

Non existe $f(x_0)$ ou $\exists f(x_0), \exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.





f ten unha **descontinuidade evitable** en x_0.

Descontinuidade de salto finito

Existen e son finitos os límites laterais pero son distintos:

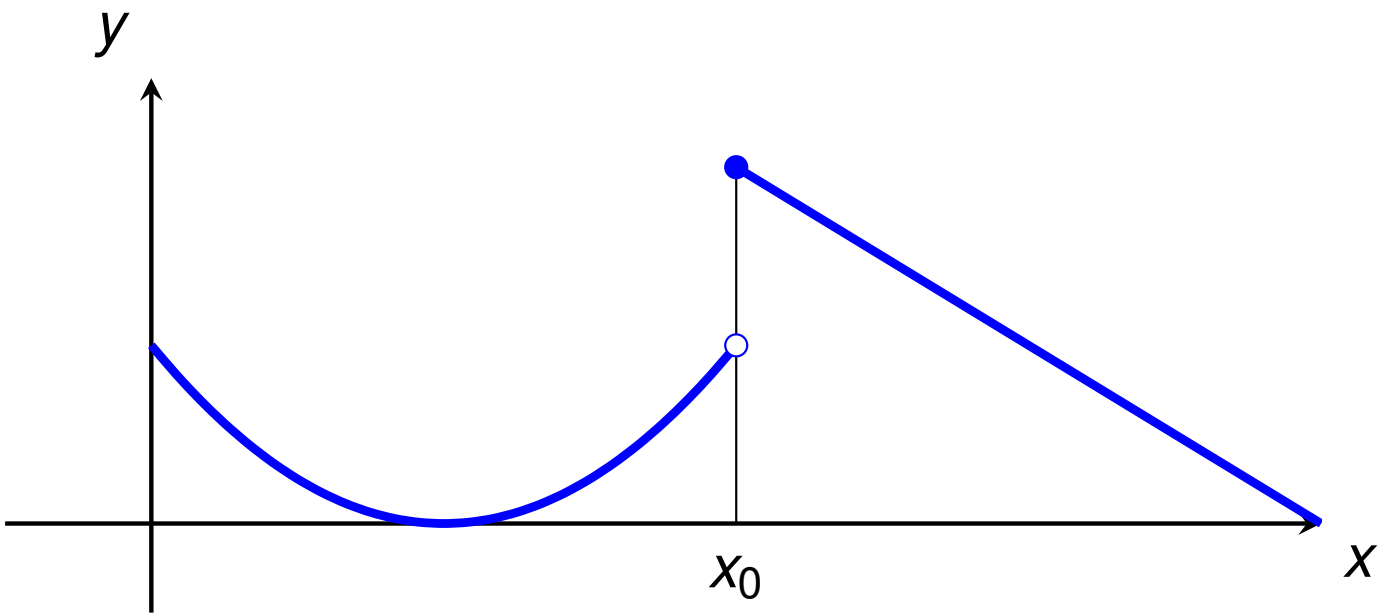
$$\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0^{-}} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^{+}} f(x).$$

f ten unha **descontinuidade de salto finito** en x_0.

Descontinuidade de salto finito

Existen e son finitos os límites laterais pero son distintos:

$$\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0^{-}} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^{+}} f(x).$$

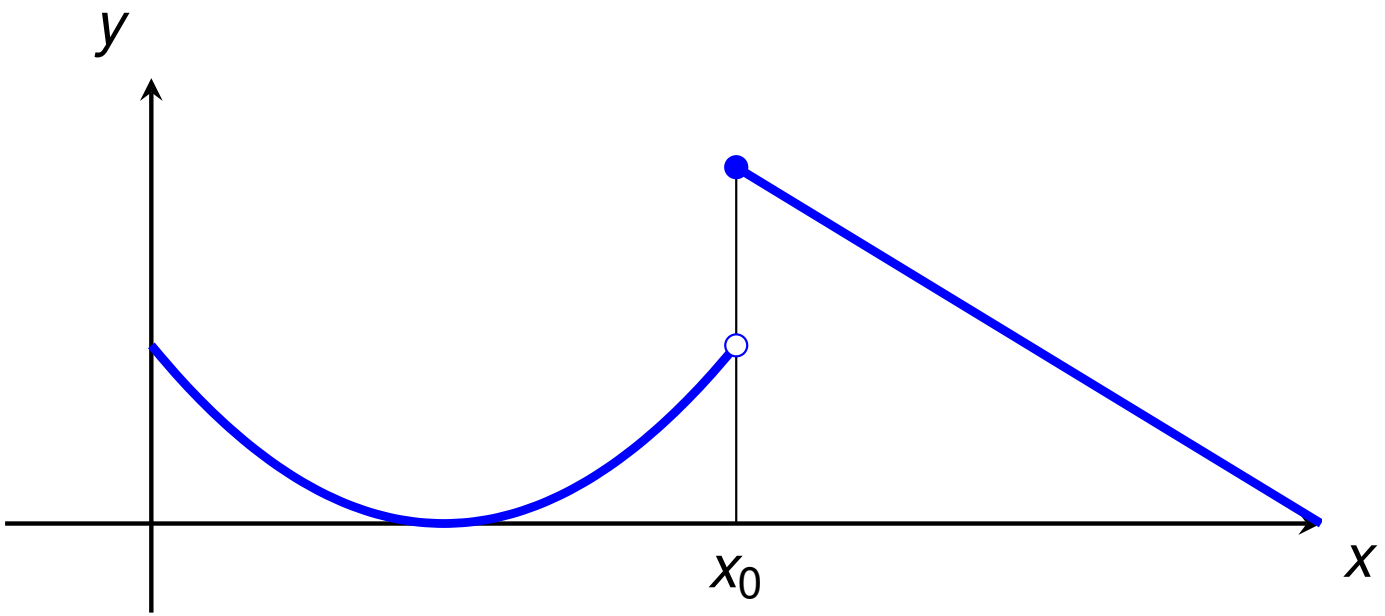


f ten unha **descontinuidade de salto finito** en x_0.

Descontinuidade de salto finito

Existen e son finitos os límites laterais pero son distintos:

$$\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) \in \mathbb{R}, \lim_{x \to x_0^{-}} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^{+}} f(x).$$



f ten unha **descontinuidade de salto finito** en x_0.

Descontinuidade de salto infinito

Existen os límites laterais e, cando menos, un deles é $\pm\infty$:

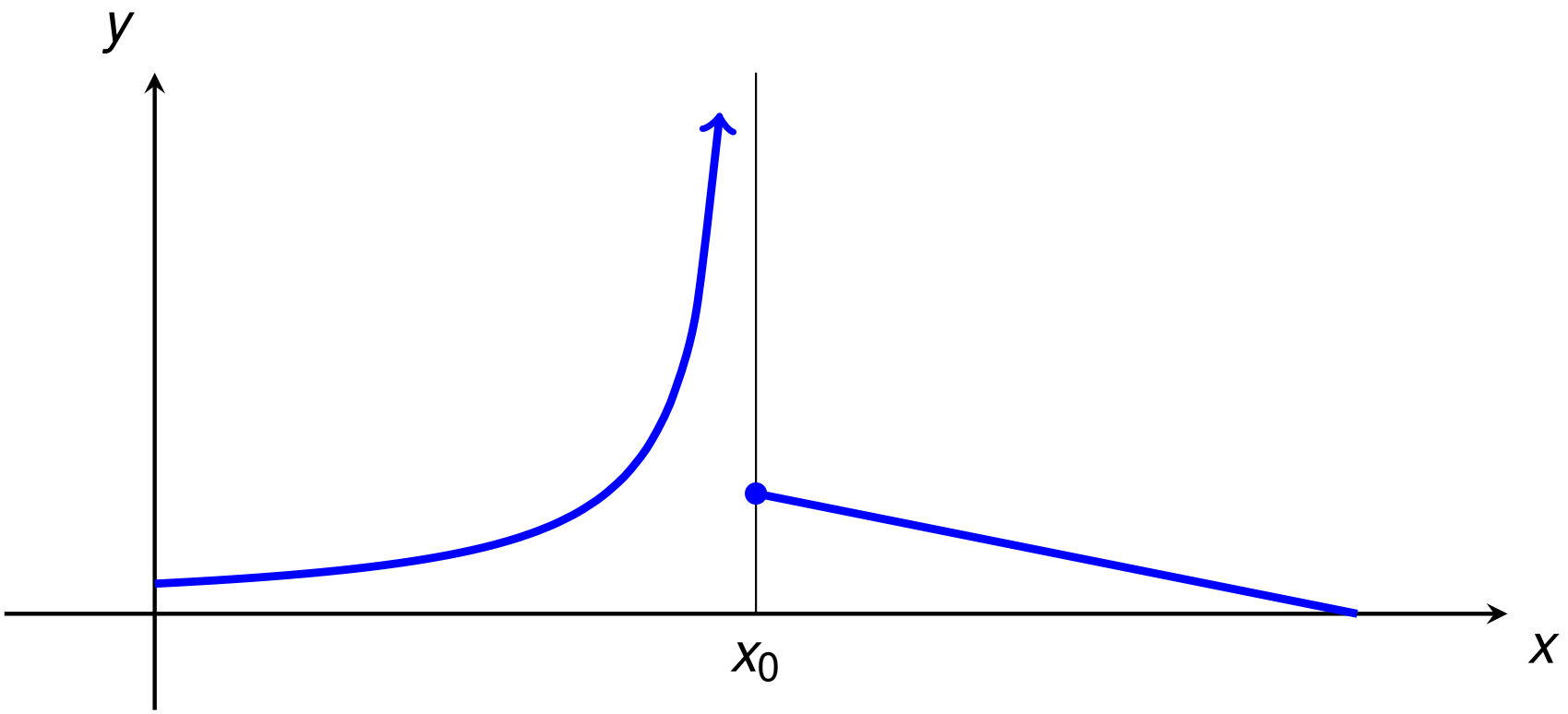
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

f ten unha **descontinuidade de salto infinito** en x_0.

Descontinuidade de salto infinito

Existen os límites laterais e, cando menos, un deles é $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

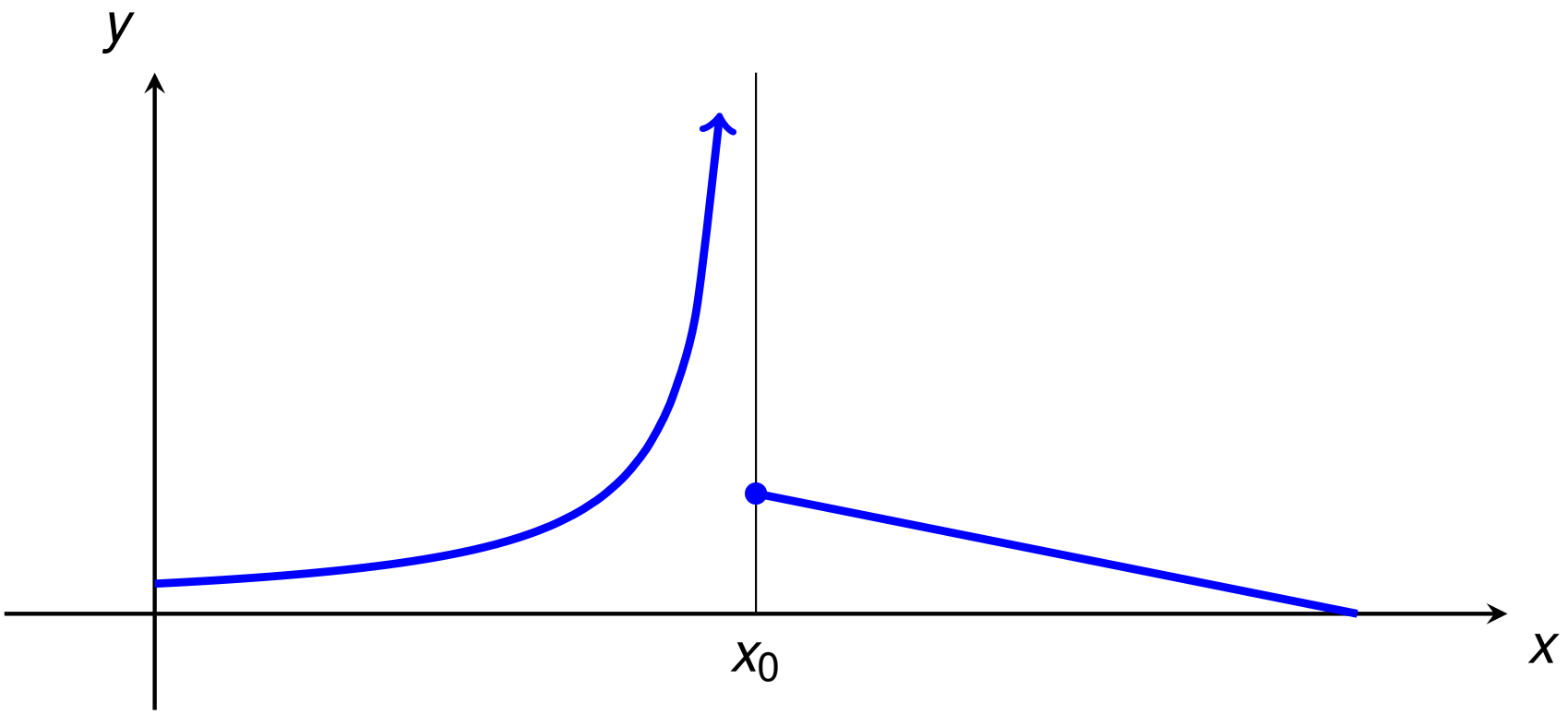


f ten unha **descontinuidade de salto infinito** en x_0.

Descontinuidade de salto infinito

Existen os límites laterais e, cando menos, un deles é $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{e/ou} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$



f ten unha **descontinuidade de salto infinito** en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Propiedades das funcións continuas

Se f e g son funcións continuas en x_0 entón:

- $f + g$ é continua en x_0,
- $f - g$ é continua en x_0,
- cf é continua en x_0, para todo $c \in \mathbb{R}$,
- fg é continua en x_0,
- $\dfrac{f}{g}$ é continua en x_0, se $g(x_0) \neq 0$.

Se f é continua en x_0 e g é continua en $f(x_0)$ entón a función $g \circ f$ é continua en x_0.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Continuidade das funcións elementais

- A función polinómica $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ é continua no seu dominio;
- A función irracional $\sqrt[n]{P(x)}$ é continua en $\mathbb{R}$ se n é impar e en $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$ se n é par;
- A función exponencial a^x $(1 \neq a > 0)$ é continua en $\mathbb{R}$;
- A función logarítmica $\log_a x$ $(1 \neq a > 0)$ é continua en $(0, \infty)$;
- As funcións $\sin x$ e $\cos x$ son continuas en $\mathbb{R}$;
- A funcións $\tan x$ é continua agás se $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$;
- $\arcsin x$, $\arccos x$ e $\arctan x$ son continuas no seu dominio;
- A composición e as operacións aritméticas realizadas coas anteriores son continuas no seu dominio.

Teorema de Bolzano

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ou $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$) entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

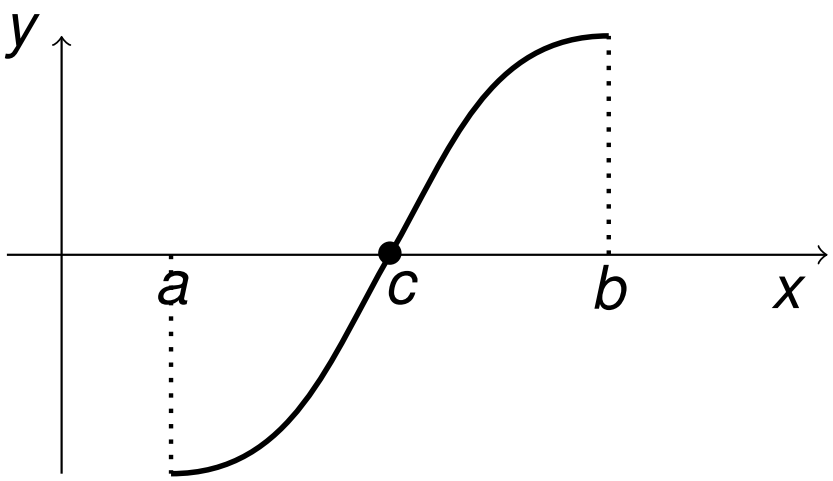
Interpretación xeométrica

Se a gráfica da función f satisfai as hipóteses do teorema de Bolzano entón existe, cando menos, un $c \in (a, b)$ no que a gráfica corta ao eixe de abscisas.

Teorema de Bolzano

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ou $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$) entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Interpretación xeométrica

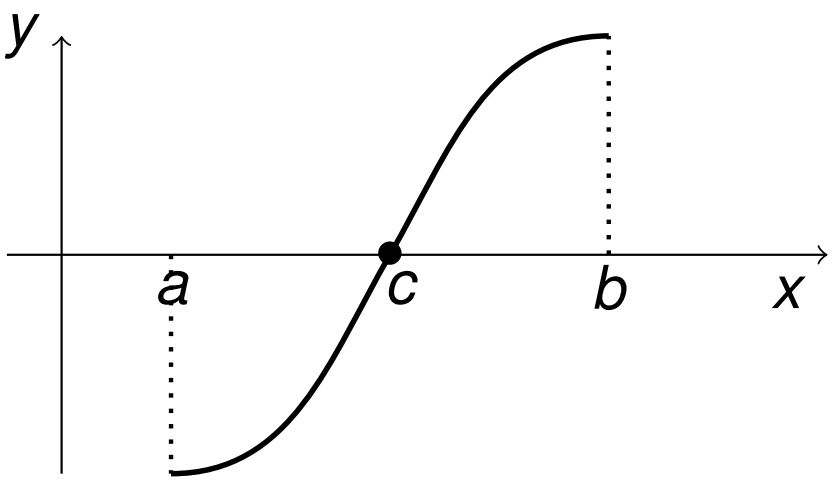


Se a gráfica da función f satisfai as hipóteses do teorema de Bolzano entón existe, cando menos, un $c \in (a, b)$ no que a gráfica corta ao eixe de abscisas.

Teorema de Bolzano

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ou $\text{signo}(f(a)) \neq \text{signo}(f(b))$) entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Interpretación xeométrica



Se a gráfica da función f satisfai as hipóteses do teorema de Bolzano entón existe, cando menos, un $c \in (a, b)$ no que a gráfica corta ao eixe de abscisas.

Teorema dos valores intermedios

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ e k é calquera número intermedio entre $f(a)$ e $f(b)$ entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

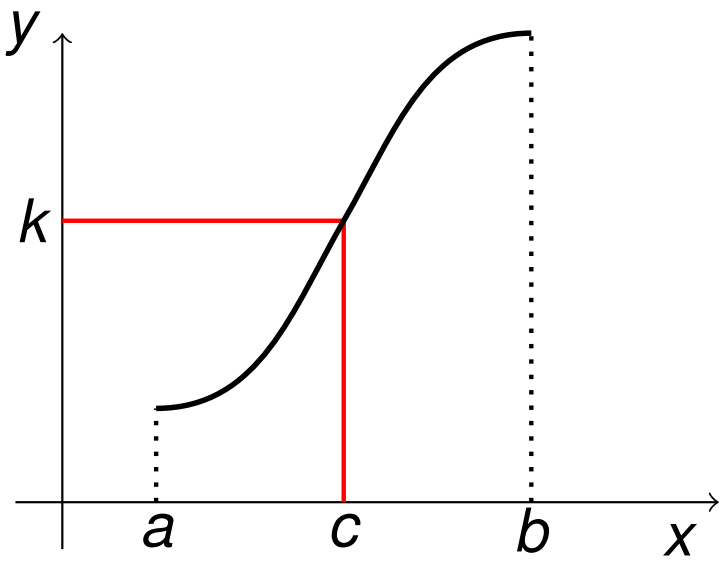
Interpretación xeométrica

Se f é continua e $f(a) < k < f(b)$ entón existe, cando menos, un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Teorema dos valores intermedios

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ e k é calquera número intermedio entre $f(a)$ e $f(b)$ entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Interpretación xeométrica

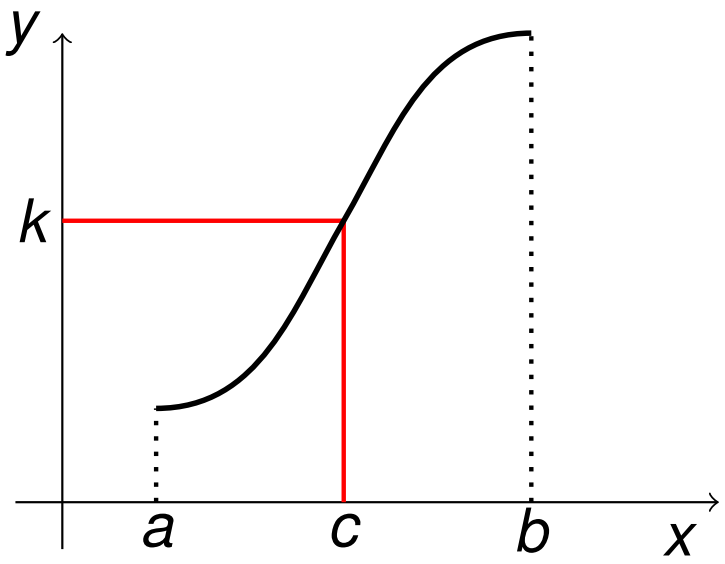


Se f é continua e $f(a) < k < f(b)$ entón existe, cando menos, un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Teorema dos valores intermedios

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Se $f(a) \neq f(b)$ e k é calquera número intermedio entre $f(a)$ e $f(b)$ entón existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Interpretación xeométrica



Se f é continua e $f(a) < k < f(b)$ entón existe, cando menos, un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Teorema de Weierstrass

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Entón existen $c, d \in [a, b]$ tal que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$.

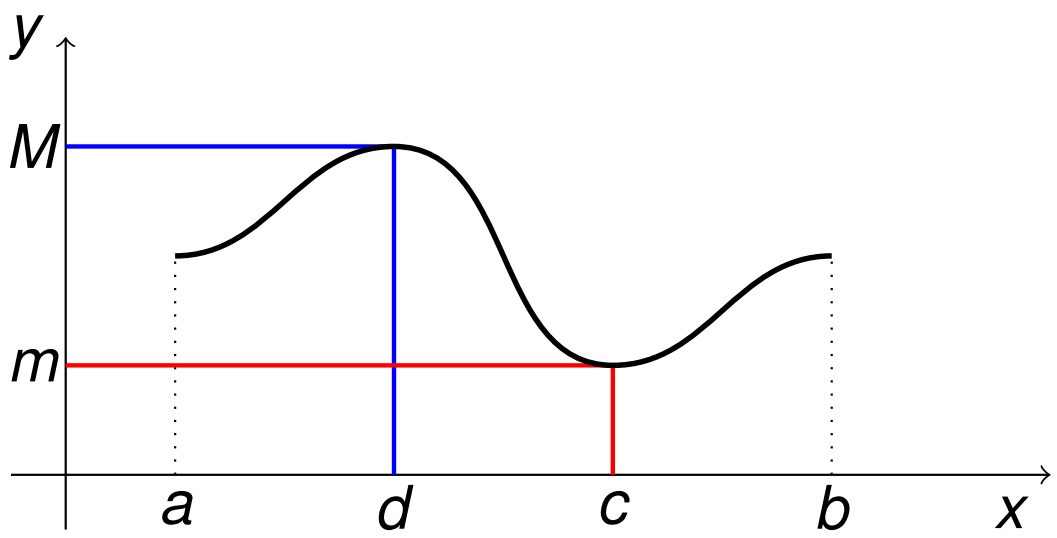
Interpretación xeométrica

A función continua f no intervalo pechado $[a, b]$ alcanza o seu mínimo absoluto m en c e o seu máximo absoluto M en d.

Teorema de Weierstrass

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Entón existen $c, d \in [a, b]$ tal que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$.

Interpretación xeométrica

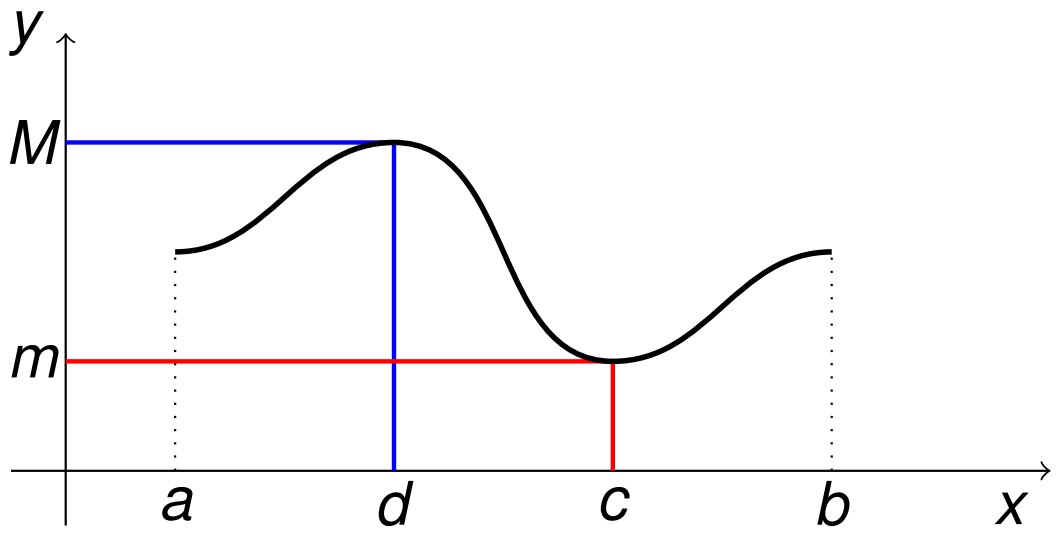


A función continua f no intervalo pechado $[a, b]$ alcanza o seu mínimo absoluto m en c e o seu máximo absoluto M en d.

Teorema de Weierstrass

Sexa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ unha función continua en $[a, b]$. Entón existen $c, d \in [a, b]$ tal que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$.

Interpretación xeométrica



A función continua f no intervalo pechado $[a, b]$ alcanza o seu mínimo absoluto m en c e o seu máximo absoluto M en d.