MATEMÁTICAS II
RECTAS E PLANOS NO ESPAZO

Manuel Fernández López

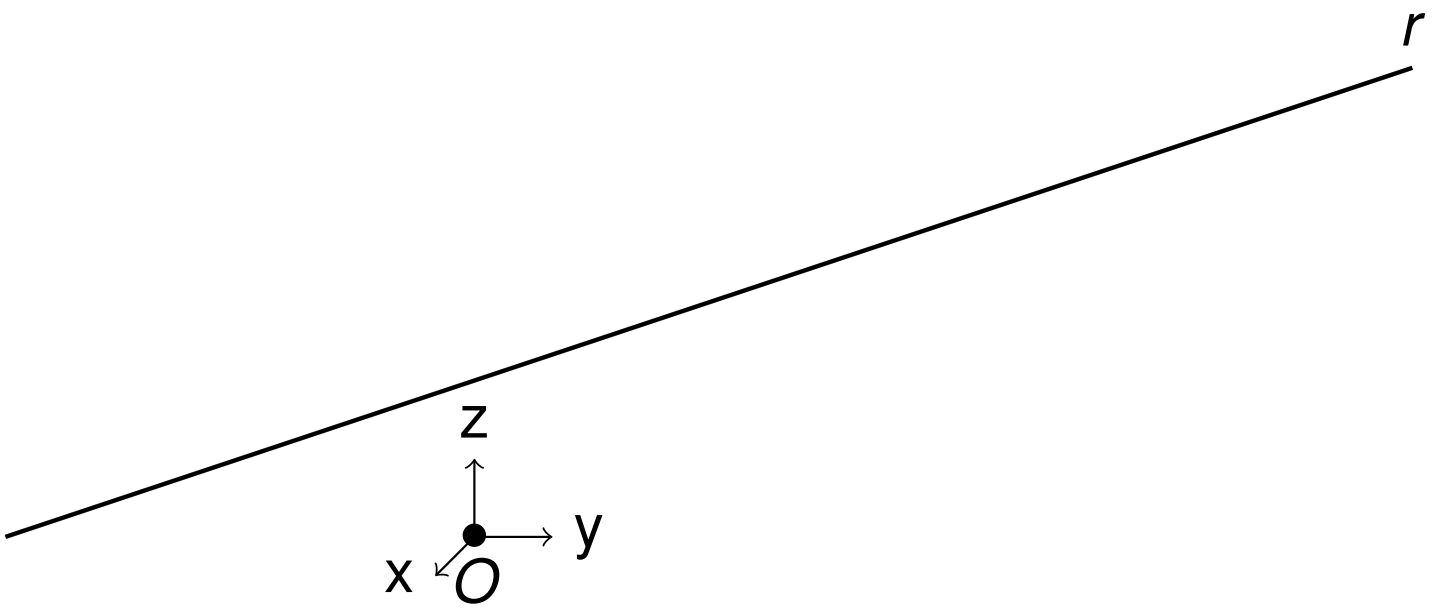
IES María Sarmiento
Misericordia 58
Viveiro, Lugo

February 12, 2016

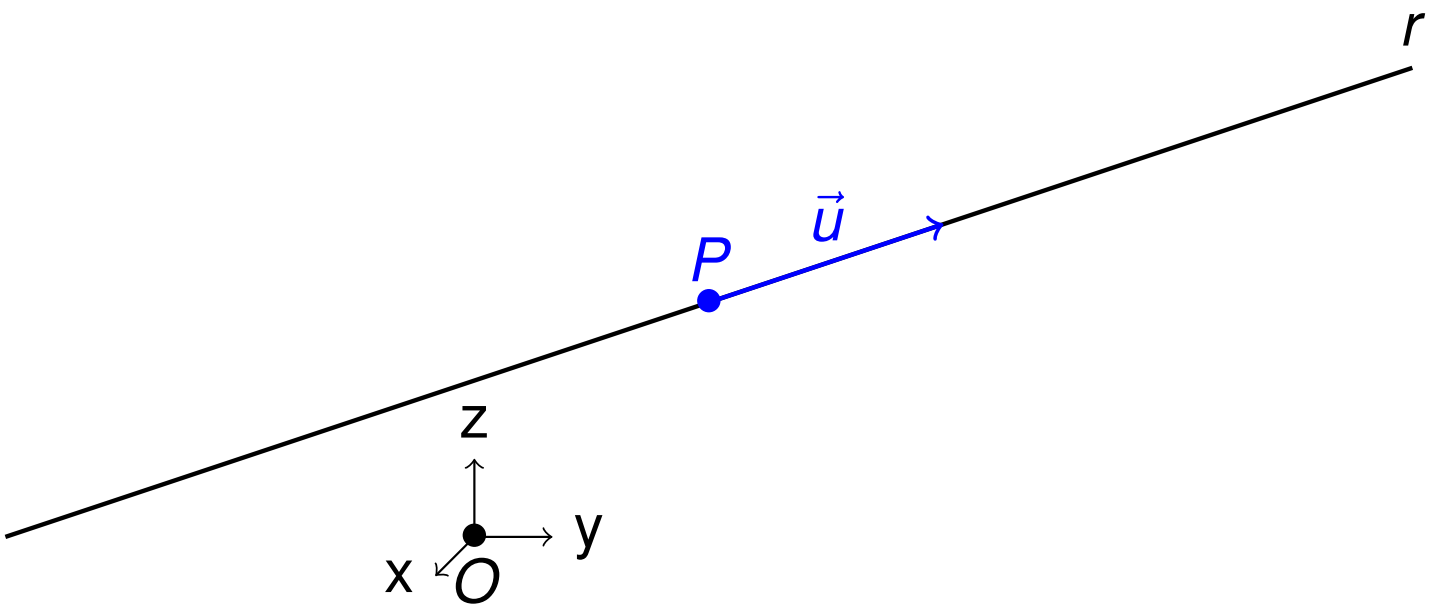
Outline

1. Ecuacións da recta no espazo
2. Posición relativa de dúas rectas no espazo
3. Ecuacións do plano no espazo
4. Posición relativa de dous planos no espazo:resumo
5. Posición relativa de tres planos no espazo
6. Posición relativa de recta e plano no espazo

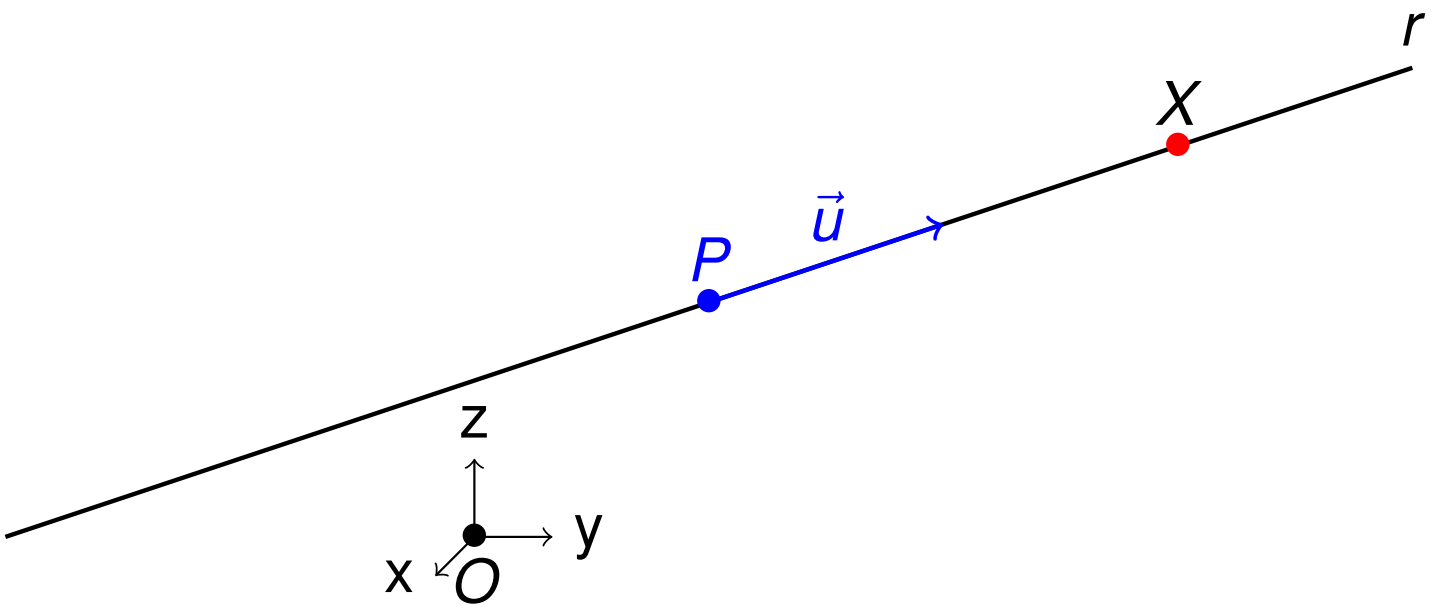
Ecuacións da recta no espazo



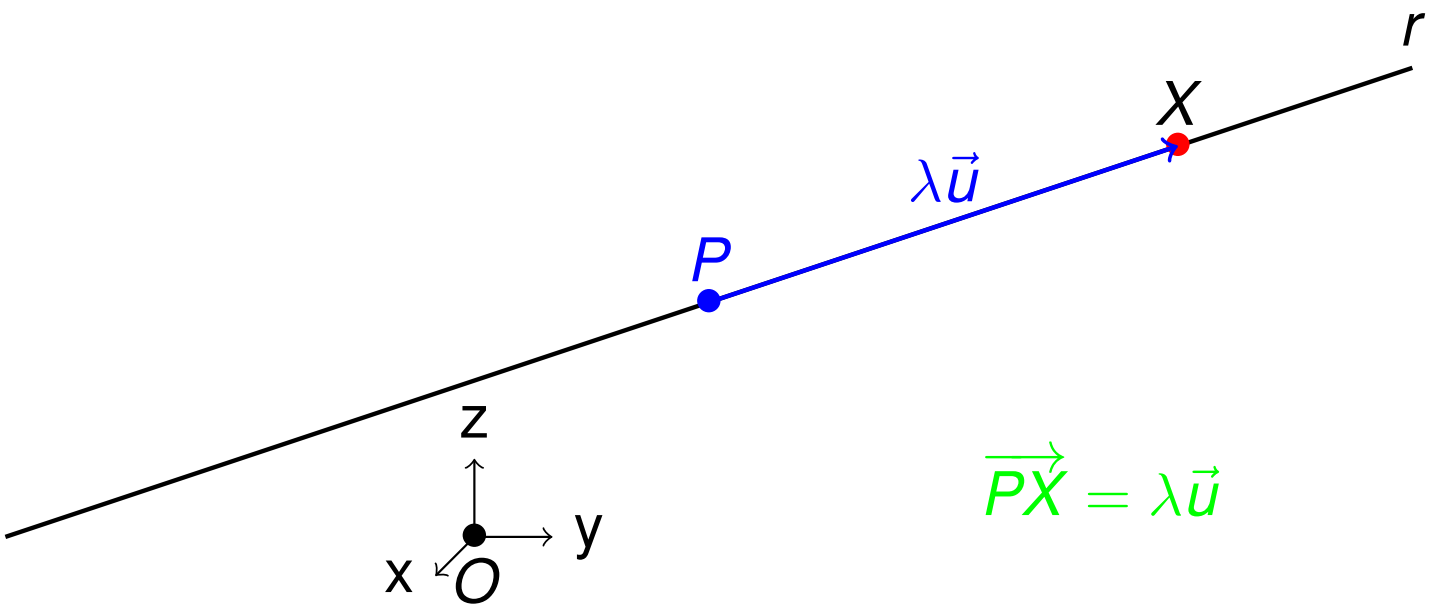
Ecuacións da recta no espazo



Ecuacións da recta no espazo

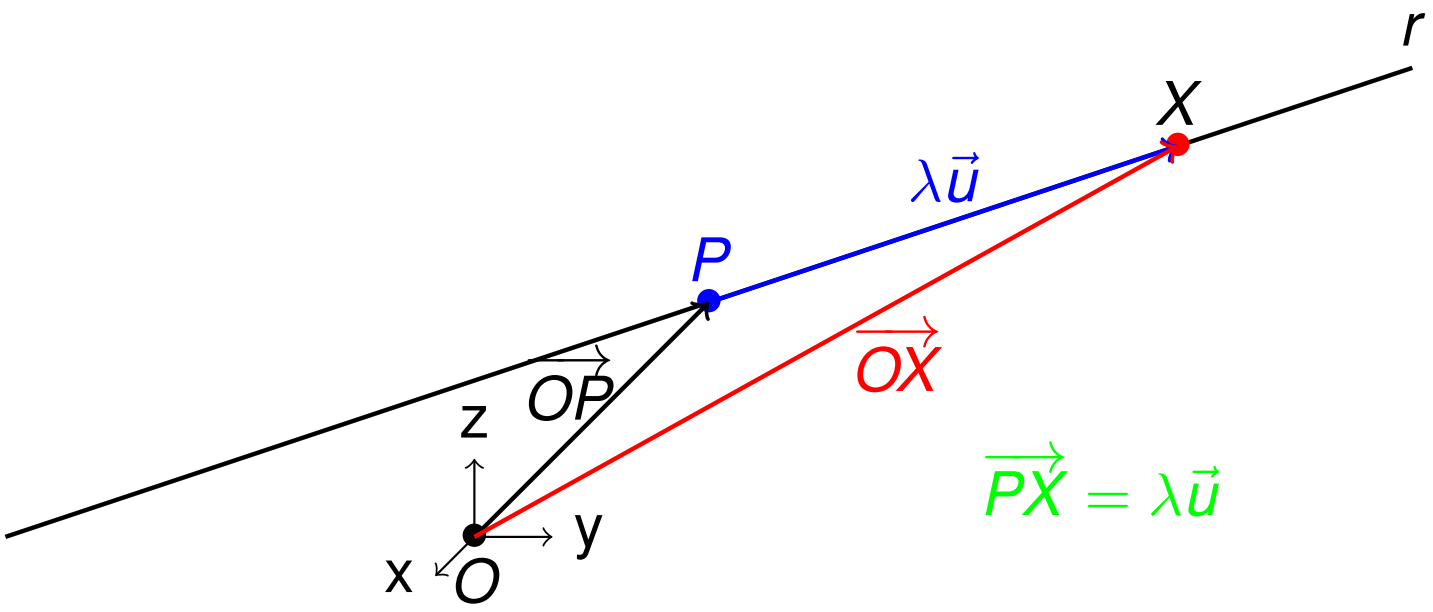


Ecuacións da recta no espazo

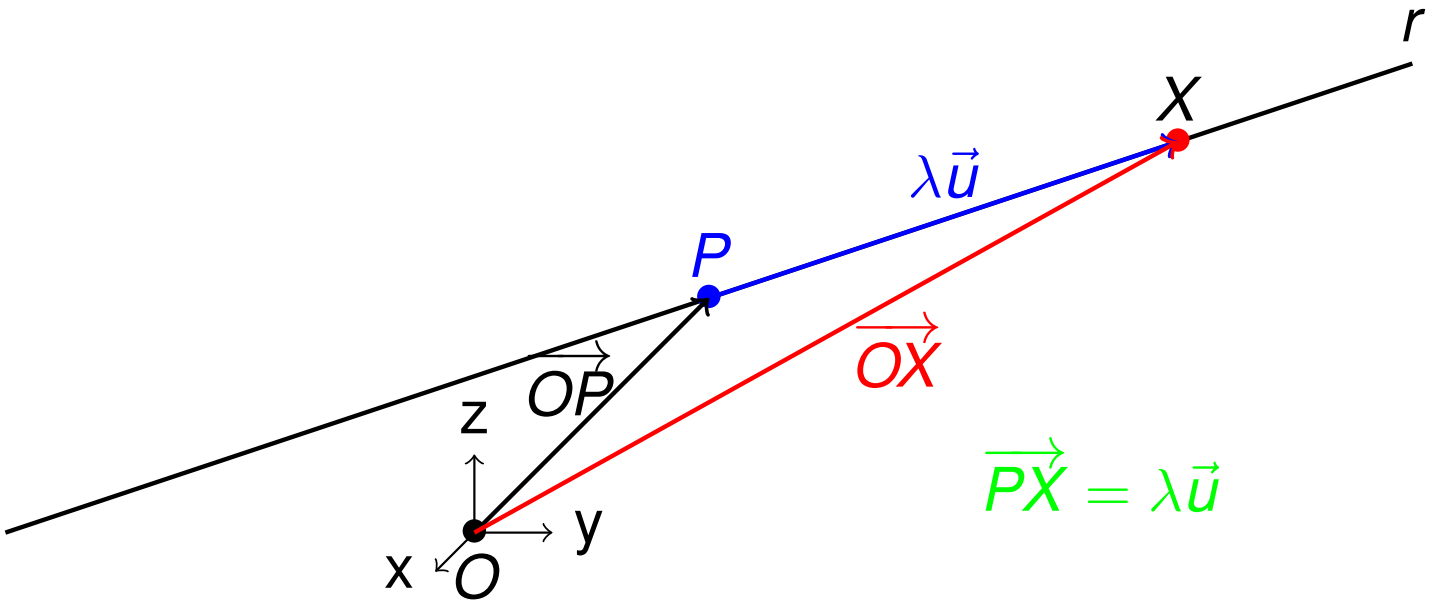


$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u}$$

Ecuacións da recta no espazo



Ecuacións da recta no espazo



Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2)$ entón

Ecuacións paramétricas da recta

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda u_1, \\ y & = & y_0 + \lambda u_2, \\ z & = & z_0 + \lambda u_3, \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despexando λ en cada ecuación e igualando obtemos a

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2)$ entón

Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despexando λ en cada ecuación e igualando obtemos a

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2)$ entón

Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despexando λ en cada ecuación e igualando obtemos a

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2)$ entón

Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despexando λ en cada ecuación e igualando obtemos a

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_2)$ entón

Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despexando λ en cada ecuación e igualando obtemos a

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}.$$

pódese escribir como

$$\begin{cases} u_2(x-x_0)=u_1(y-y_0) \\ u_3(x-x_0)=u_1(z-z_0) \\ u_3(y-y_0)=u_2(y-y_0) \end{cases}$$

As tres ecuacións non son independentes e tomando dúas independentes chegamos ás

Ecuacións implícitas da recta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

pódese escribir como

$$\begin{cases} u_2(x - x_0) = u_1(y - y_0) \\ u_3(x - x_0) = u_1(z - z_0) \\ u_3(y - y_0) = u_2(y - y_0) \end{cases}$$

As tres ecuacións non son independentes e tomando dúas independentes chegamos ás

Ecuacións implícitas da recta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Ecuacións da recta no espazo

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x-x_0}{u_1}=\frac{y-y_0}{u_2}=\frac{z-z_0}{u_3}.$$

pódese escribir como

$$\begin{cases} u_2(x-x_0)=u_1(y-y_0) \\ u_3(x-x_0)=u_1(z-z_0) \\ u_3(y-y_0)=u_2(y-y_0) \end{cases}$$

As tres ecuacións non son independentes e tomando dúas independentes chegamos ás

Ecuacións implícitas da recta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Ecuacións da recta no espazo: resumo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuacións paramétricas da recta

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda u_1, \\ y & = & y_0 + \lambda u_2, \\ z & = & z_0 + \lambda u_3, \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións implícitas da recta

$$\left\{ \begin{array}{lclclclcl} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$$

Ecuacións da recta no espazo: resumo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuacións paramétricas da recta

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda u_1, \\ y & = & y_0 + \lambda u_2, \\ z & = & z_0 + \lambda u_3, \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións implícitas da recta

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$$

Ecuacións da recta no espazo: resumo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións implícitas da recta

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$$

Ecuacións da recta no espazo: resumo

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuacións paramétricas da recta

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda u_1, \\ y & = & y_0 + \lambda u_2, \\ z & = & z_0 + \lambda u_3, \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

Ecuacións implícitas da recta

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$$

Obtendo novos puntos dunha recta

Tanto na

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

como nas

Ecuacións paramétricas da recta

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda u_1, \\ y & = & y_0 + \lambda u_2, \\ z & = & z_0 + \lambda u_3, \end{array}\right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

dámoslle valores ao parámetro λ.

Obtendo novos puntos dunha recta

Tanto na

Ecuación vectorial da recta

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

como nas

Ecuacións paramétricas da recta

$$\begin{cases} x &= x_0 + \lambda u_1, \\ y &= y_0 + \lambda u_2, \\ z &= z_0 + \lambda u_3, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

dámoslle valores ao parámetro λ.

Obtendo novos puntos dunha recta

Para obter novos puntos dunha recta, dada a súa

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

ou as

Ecuacións implícitas da recta

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$$

buscamos novas solucións das ecuacións.

CC BY NC SA

Obtendo novos puntos dunha recta

Para obter novos puntos dunha recta, dada a súa

Ecuación en forma continua da recta

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}.$$

ou as

Ecuacións implícitas da recta

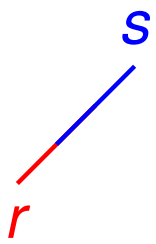
$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$$

buscamos novas solucións das ecuacións.

CC BY NC SA

Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común

PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

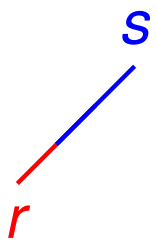
Distinta dirección
Un punto en común

CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común

PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común

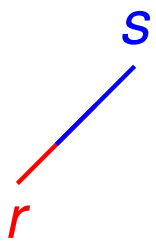
CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

CC BY NC SA

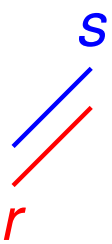
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común



PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común

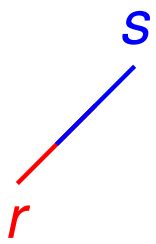
CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

CC BY NC SA

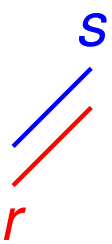
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común



PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común

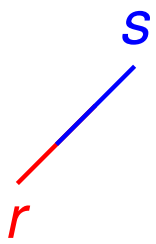
CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

CC BY NC SA

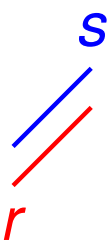
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común



PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

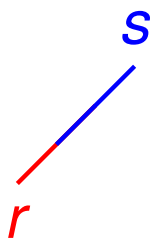
Distinta dirección
Un punto en común

CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

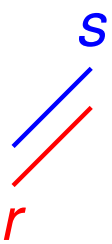
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común



PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común

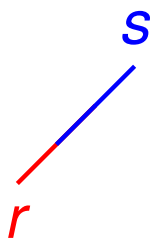
CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

CC BY NC SA

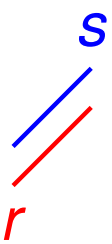
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común

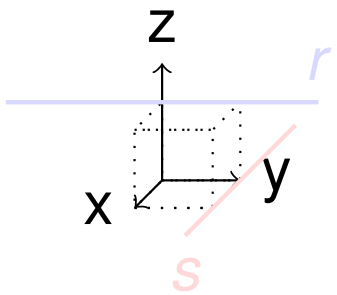


PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común

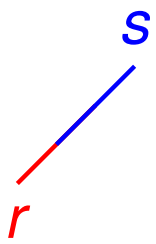


CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

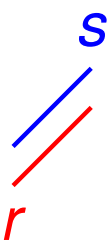
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común

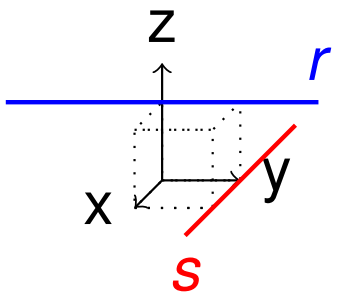


PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común

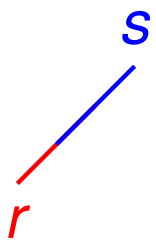


CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

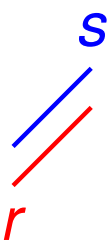
Posición relativa de dúas rectas

Dúas rectas no espazo poden estar situadas das seguintes formas



COINCIDENTES

Mesma dirección
Un punto en común

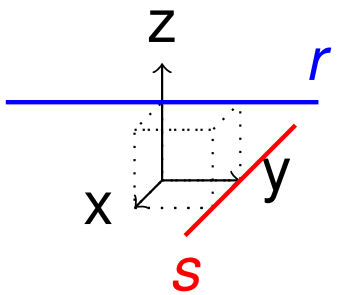


PARALELAS

Mesma dirección
Ningún punto en común

CÓRTANSE

Distinta dirección
Un punto en común



CRÚZANSE

Distinta dirección
Ningún punto en común

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\operatorname{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\operatorname{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común) e se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

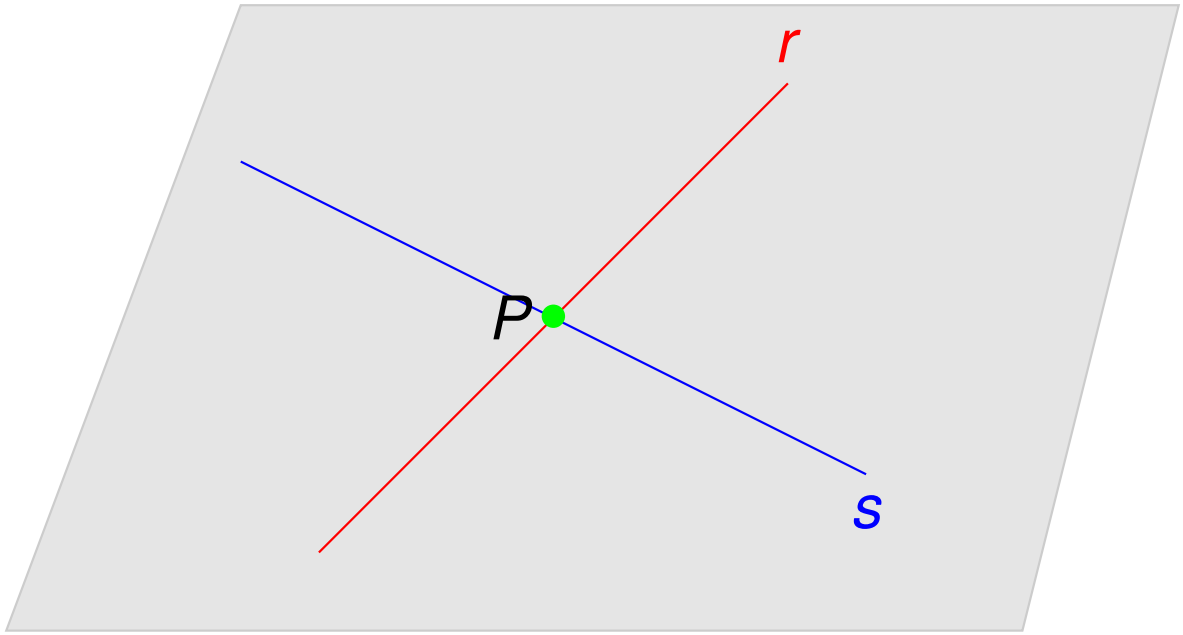
Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

Para determinar se se cortan ou se se cruzan temos que estudar o rango da matriz

$$(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s).$$

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Son SECANTES



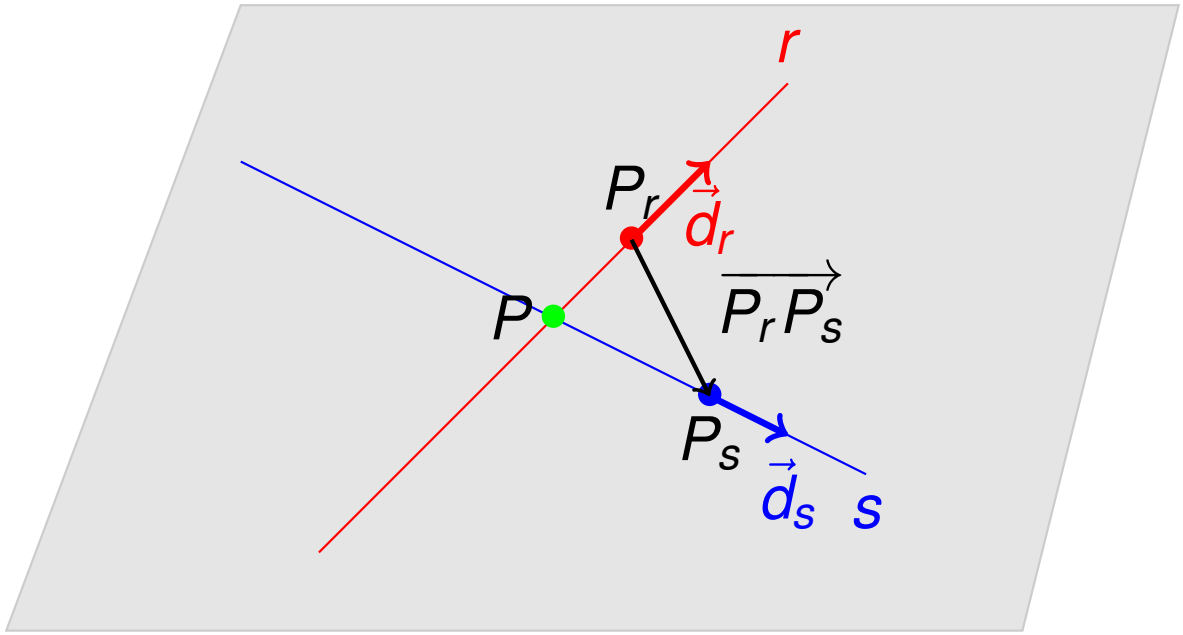
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2.$$

- $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes
- $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ non son linealmente independentes

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Son SECANTES



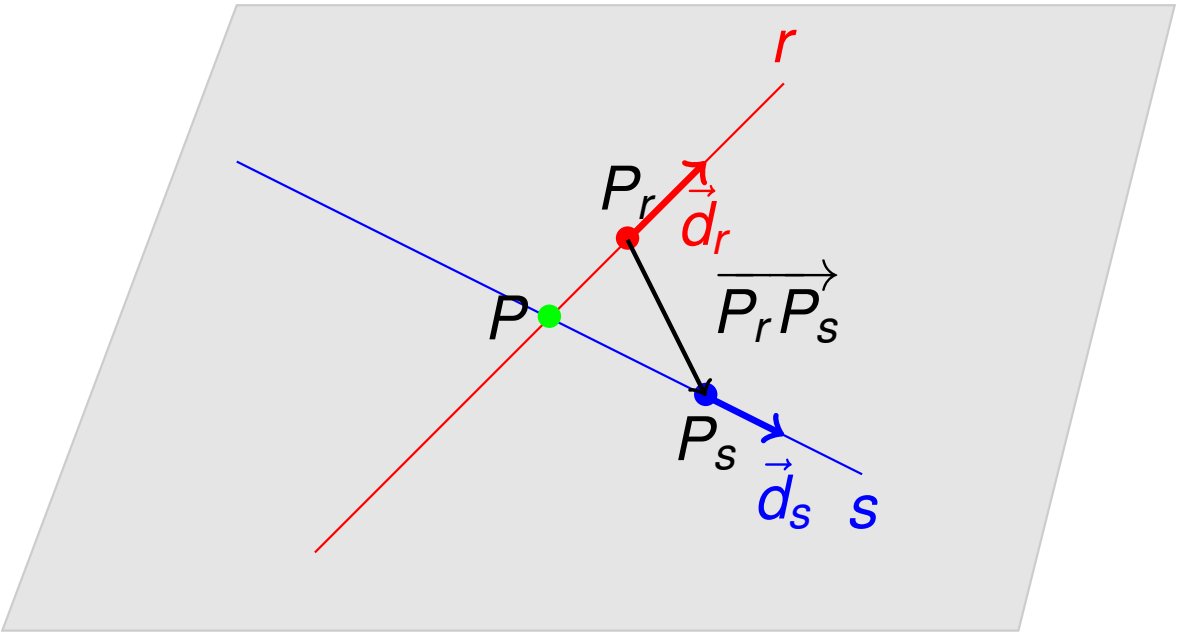
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2.$$

- $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes
- $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ non son linealmente independentes

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Son SECANTES



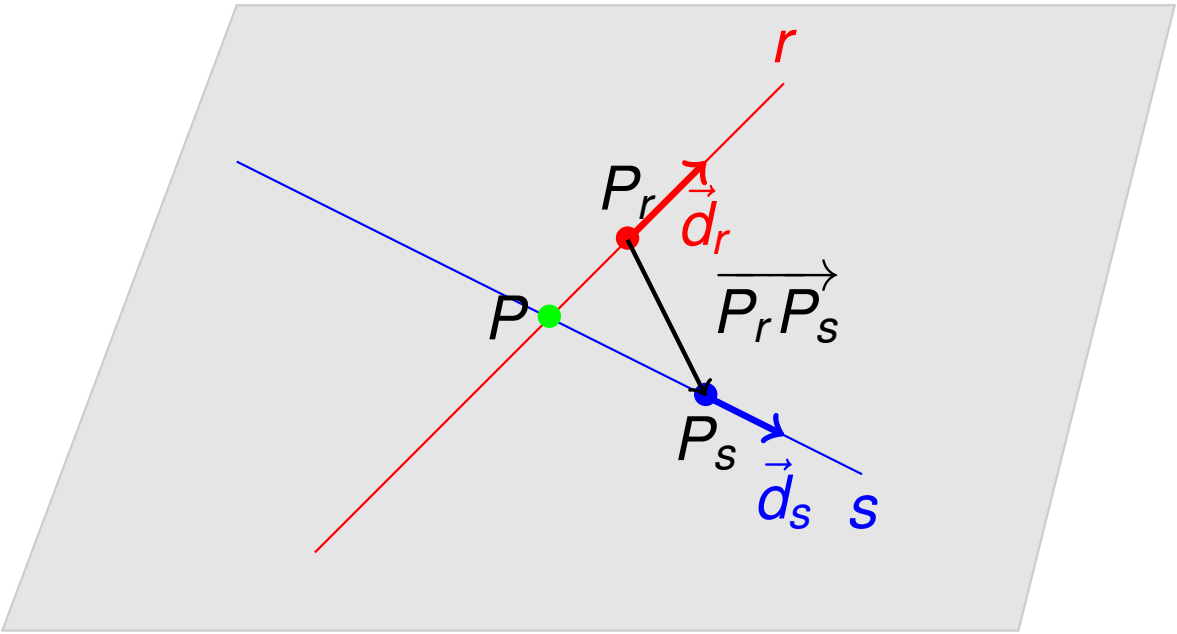
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2.$$

- $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes
- $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ non son linealmente independentes

Estudo da posición relativa de dúas rectas

Son SECANTES



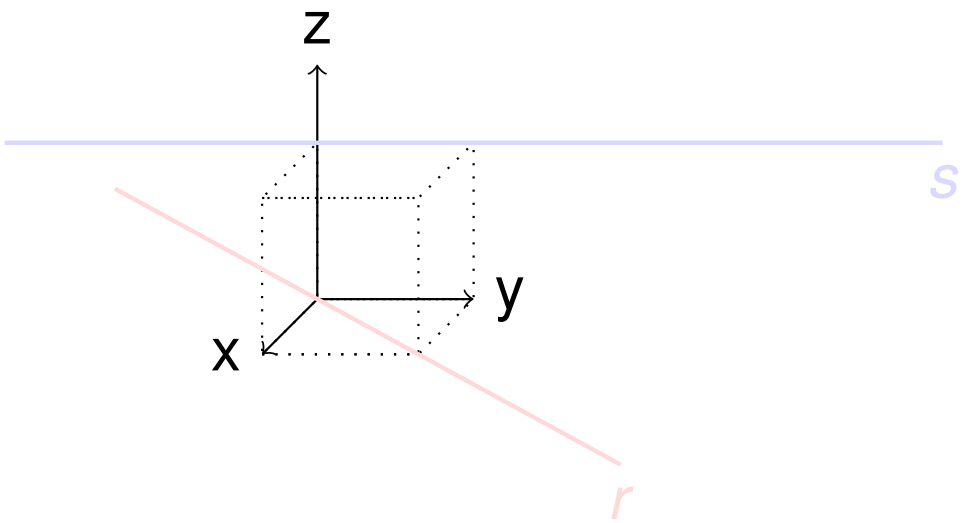
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2.$$

- $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes
- $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ non son linealmente independentes

Estudo da posición relativa de dúas rectas

CRÚZANSE



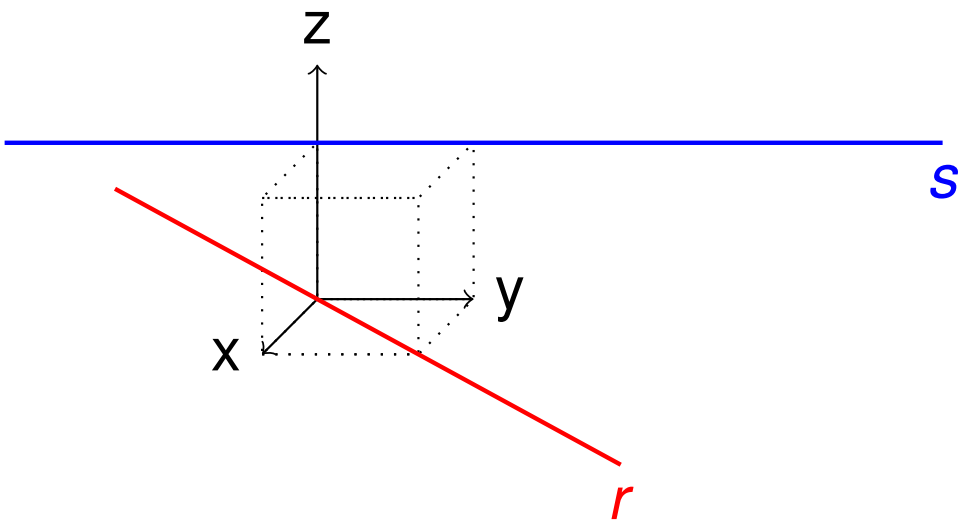
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes.

Estudo da posición relativa de dúas rectas

CRÚZANSE



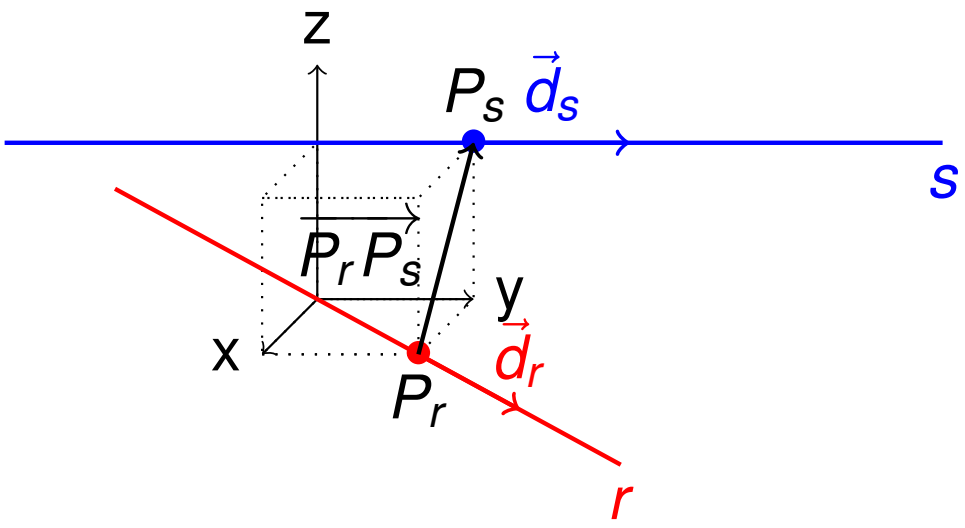
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes.

Estudo da posición relativa de dúas rectas

CRÚZANSE



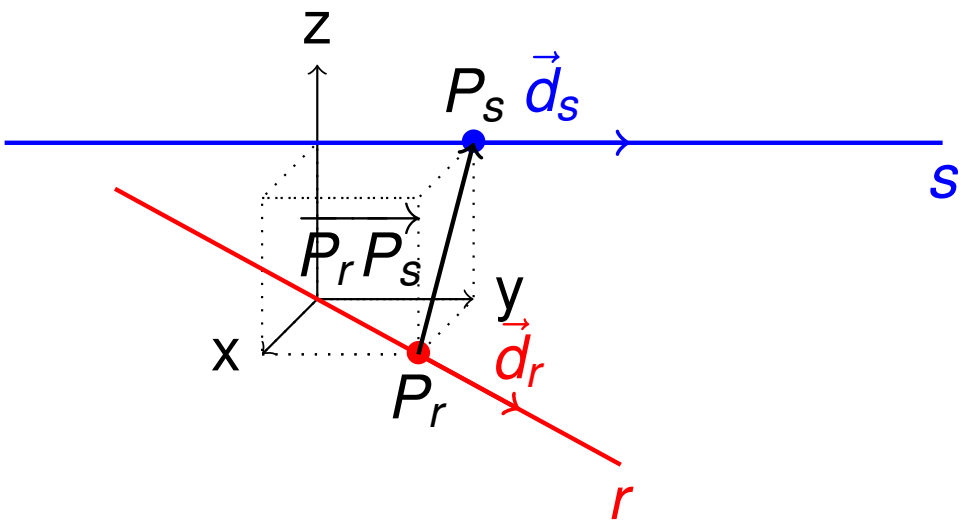
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes.

Estudo da posición relativa de dúas rectas

CRÚZANSE



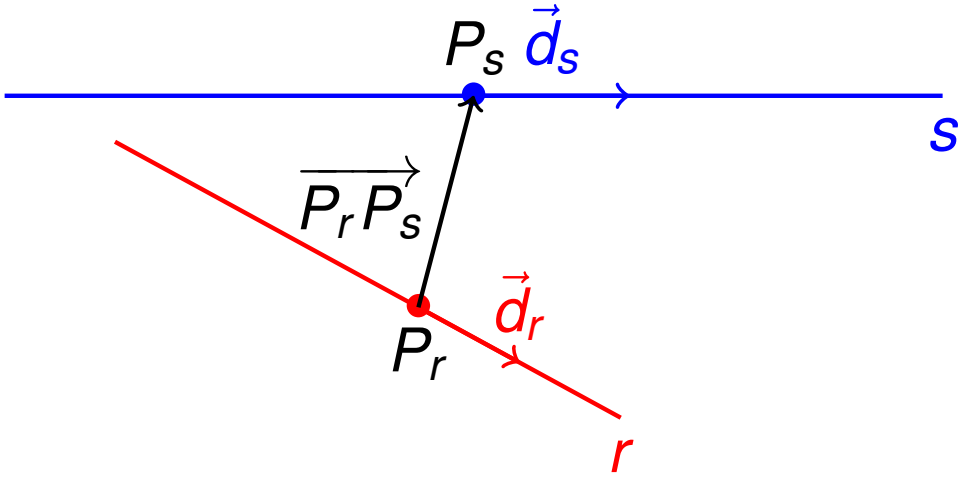
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes.

Estudo da posición relativa de dúas rectas

CRÚZANSE



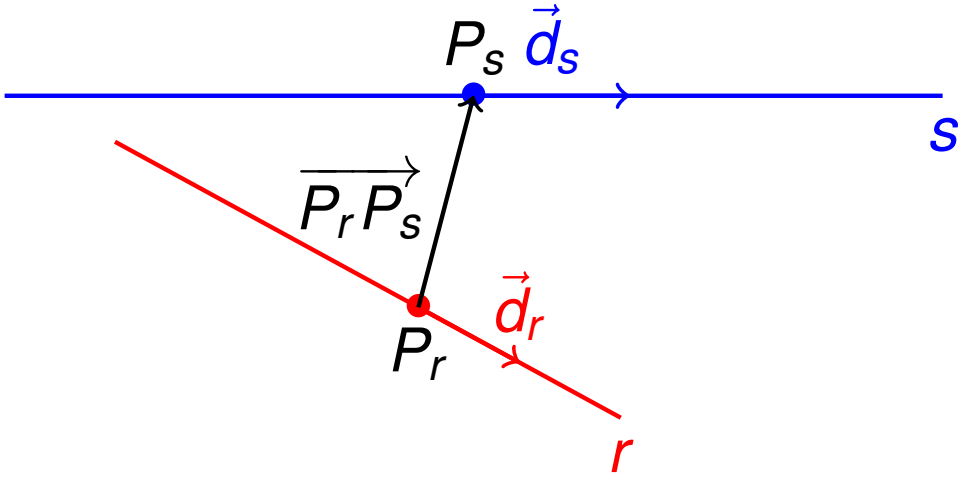
se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes.

Estudo da posición relativa de dúas rectas

CRÚZANSE



se e soamente se

$$\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3.$$

Os vectores $\overrightarrow{P_rP_s}$, $\vec{d}_r$ e $\vec{d}_s$ son linealmente independentes.

Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\operatorname{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\operatorname{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

CC BY NC SA

Estudo da posición relativa de dúas rectas: resumo

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ (é dicir, $\vec{d}_r \parallel \vec{d}_s$) r e s teñen a MESMA DIRECCIÓN e as rectas son COINCIDENTES ou PARALELAS.

- Se $P_r \in s$ son COINCIDENTES (un punto en común)
- Se $P_r \notin s$ son PARALELAS (ningún punto en común)

Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ (é dicir, $\vec{d}_r \nparallel \vec{d}_s$) r e s teñen DISTINTA DIRECCIÓN e as rectas CÓRTANSE ou CRÚZANSE.

- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas CÓRTANSE.
- Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas CRÚZANSE.

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

CC BY NC SA

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\operatorname{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\operatorname{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

CC BY NC SA

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

CC BY NC SA

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

CC BY NC SA

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

CC BY NC SA

Posición relativa de dúas rectas: outra forma

Recta r determinada por $P_r, \vec{d}_r$ e recta s determinada por $P_s, \vec{d}_s$.

- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1$ as rectas son coincidentes;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas son paralelas.
- Se $\mathrm{ran}(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$:
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2$ as rectas córtanse;
  - Se $\mathrm{ran}(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{d}_r, \vec{d}_s) = 3$ as rectas crúzanse.

Posición relativa de dúas rectas en forma implícita

Dadas as rectas $r : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$ e

$s : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0, \\ a'''x & + & b'''y & + & c'''z & + & d''' & = & 0. \end{array} \right.$ definimos

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ as rectas son coincidentes.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas córtanse.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 3$ e $\operatorname{ran}(A) = 4$ as rectas crúzanse.

Posición relativa de dúas rectas en forma implícita

Dadas as rectas $r : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$ e

$s : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0, \\ a'''x & + & b'''y & + & c'''z & + & d''' & = & 0. \end{array} \right.$ definimos

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ as rectas son coincidentes.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas córtanse.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 3$ e $\operatorname{ran}(A) = 4$ as rectas crúzanse.

Posición relativa de dúas rectas en forma implícita

Dadas as rectas $r : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$ e

$s : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0, \\ a'''x & + & b'''y & + & c'''z & + & d''' & = & 0. \end{array} \right.$ definimos

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ as rectas son coincidentes.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas córtanse.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 3$ e $\operatorname{ran}(A) = 4$ as rectas crúzanse.

Posición relativa de dúas rectas en forma implícita

Dadas as rectas $r : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$ e

$s : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0, \\ a'''x & + & b'''y & + & c'''z & + & d''' & = & 0. \end{array} \right.$ definimos

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ as rectas son coincidentes.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas córtanse.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 3$ e $\operatorname{ran}(A) = 4$ as rectas crúzanse.

Posición relativa de dúas rectas en forma implícita

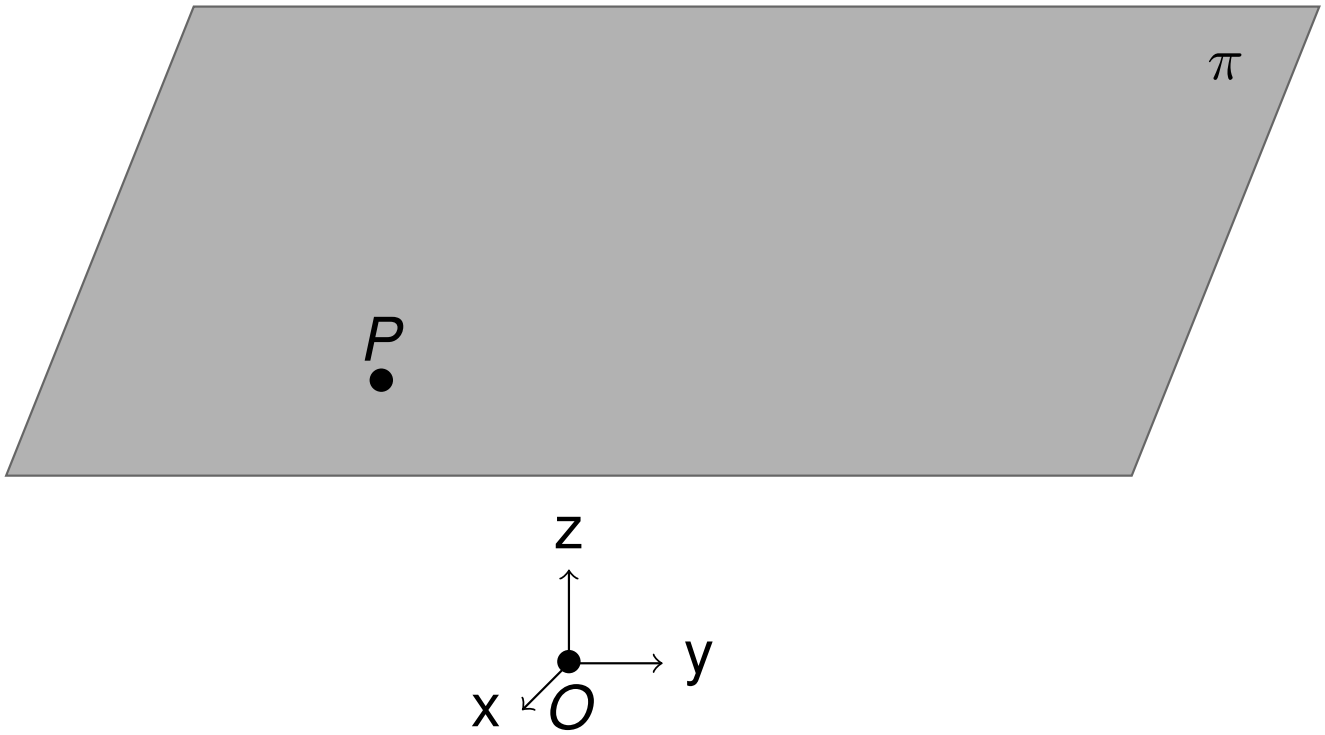
Dadas as rectas $r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0, \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0. \end{array} \right.$ e

$s : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0, \\ a'''x & + & b'''y & + & c'''z & + & d''' & = & 0. \end{array} \right.$ definimos

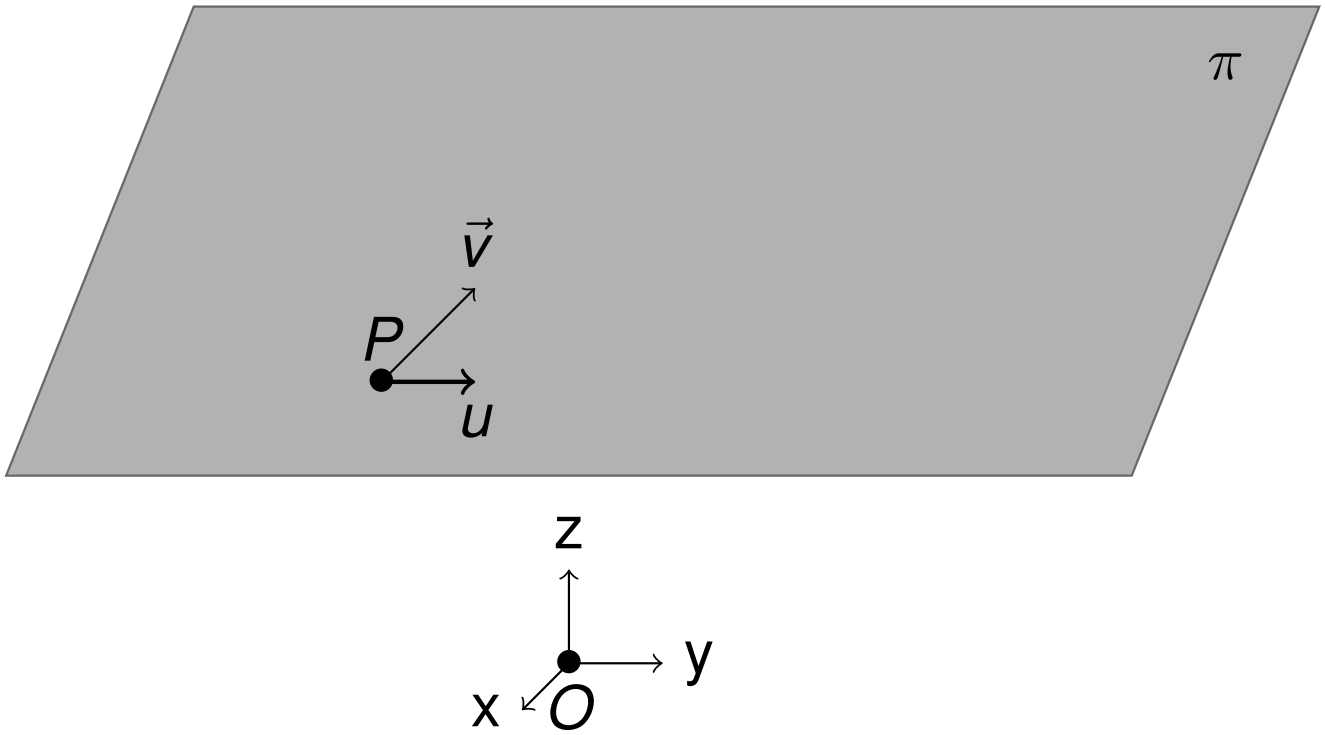
$$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 2$ as rectas son coincidentes.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 2$ e $\operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas son paralelas.
- Se $\operatorname{ran}(C) = \operatorname{ran}(A) = 3$ as rectas córtanse.
- Se $\operatorname{ran}(C) = 3$ e $\operatorname{ran}(A) = 4$ as rectas crúzanse.

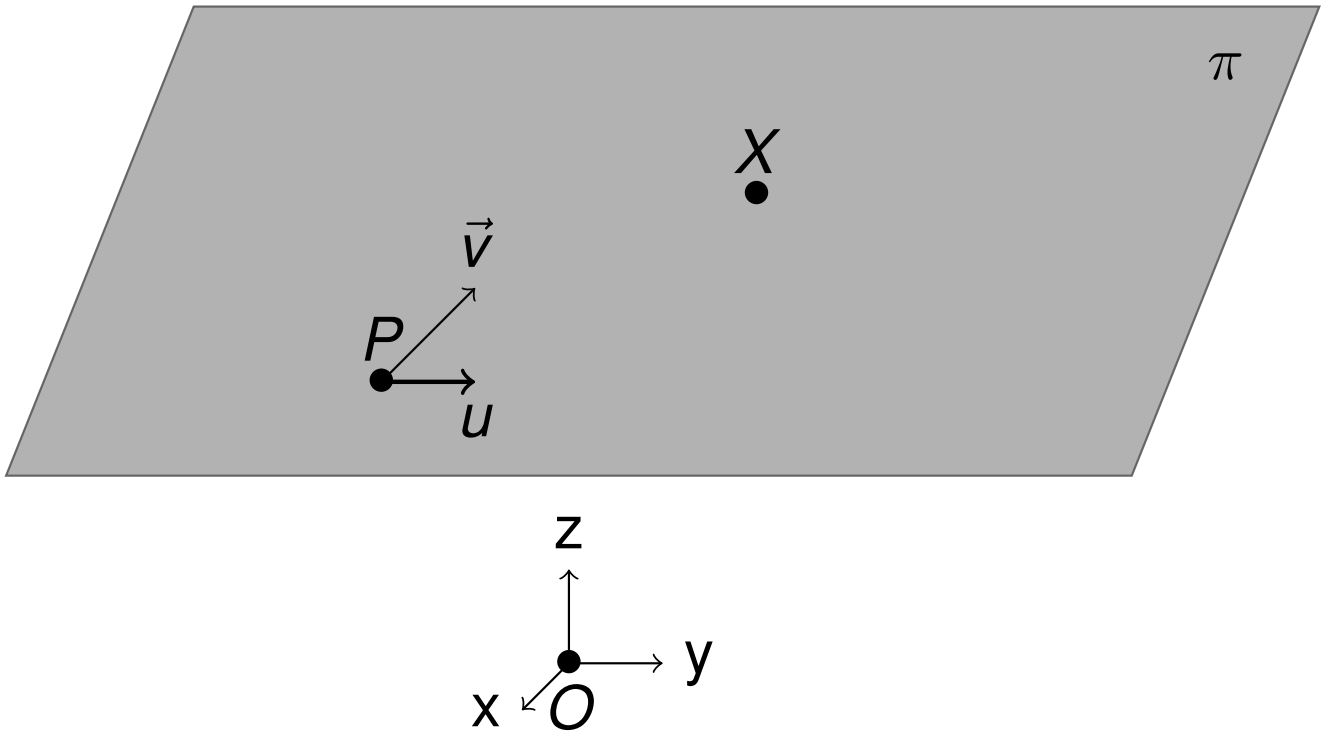
Ecuacións do plano no espazo



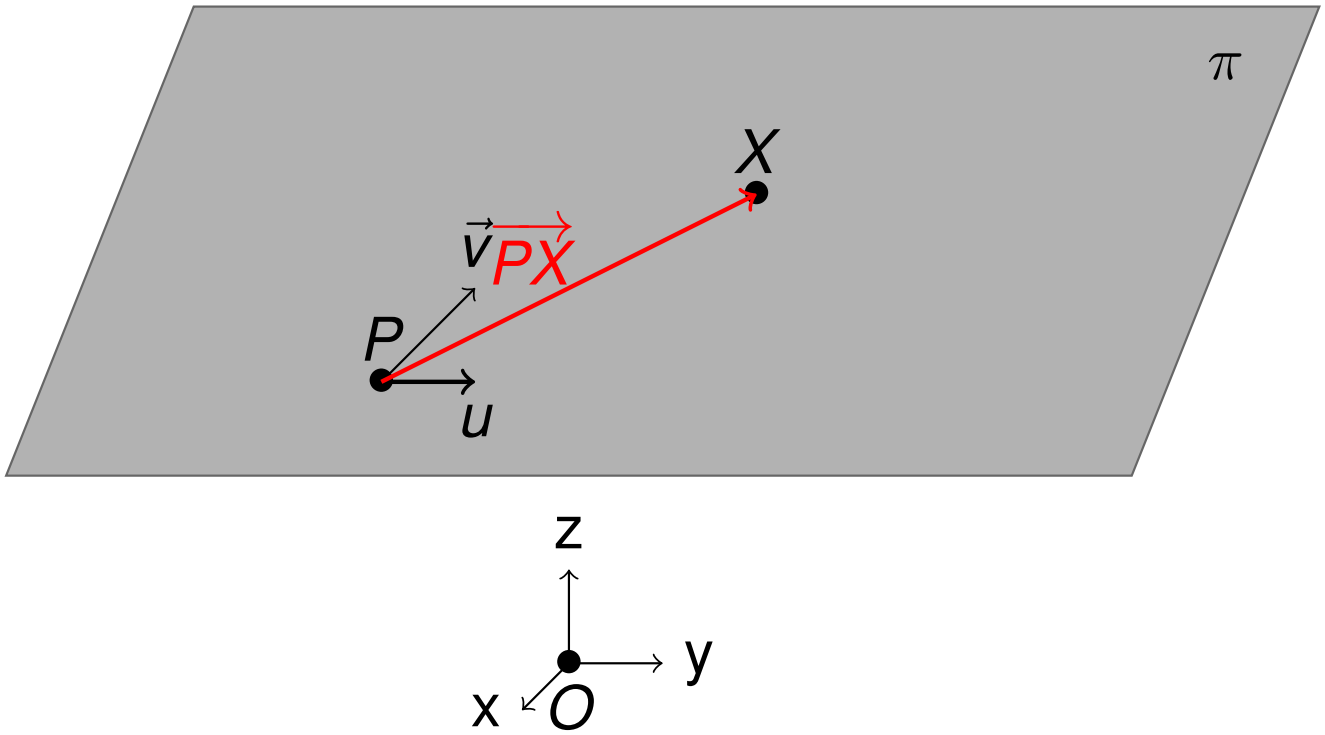
Ecuacións do plano no espazo



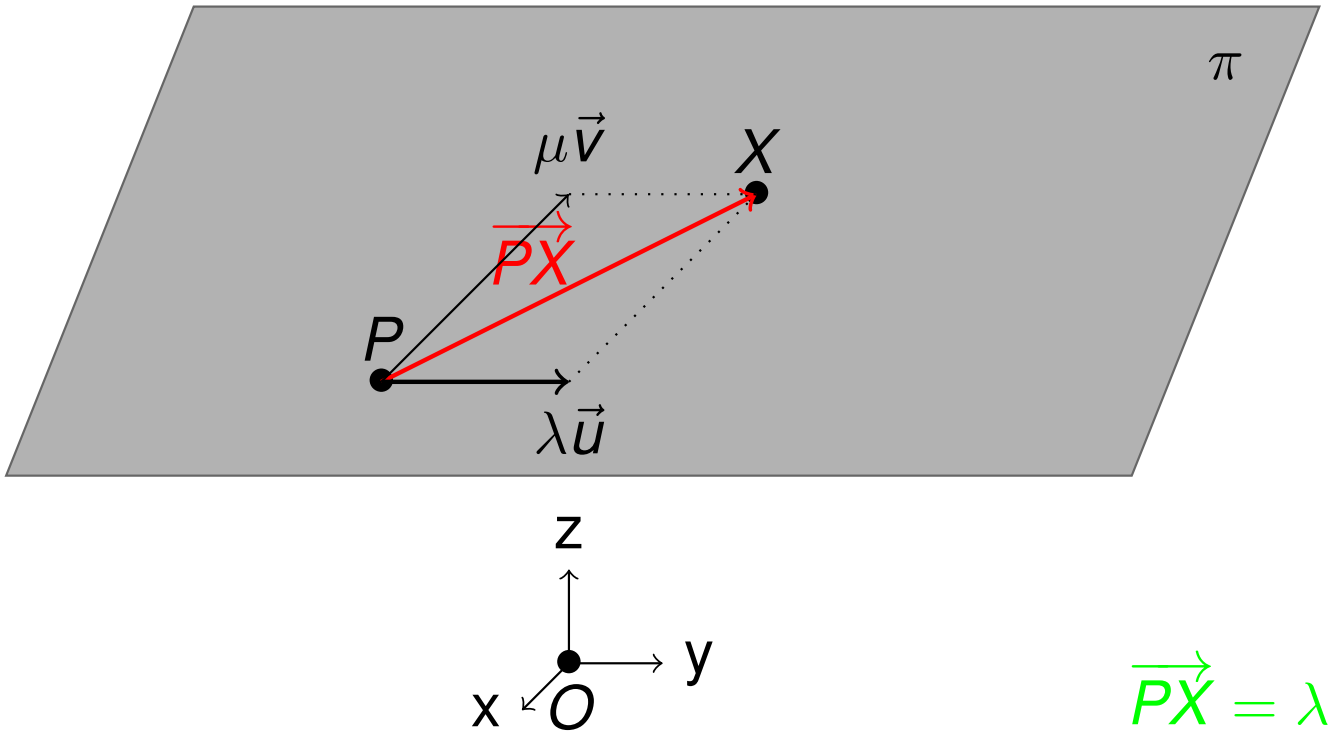
Ecuacións do plano no espazo



Ecuacións do plano no espazo

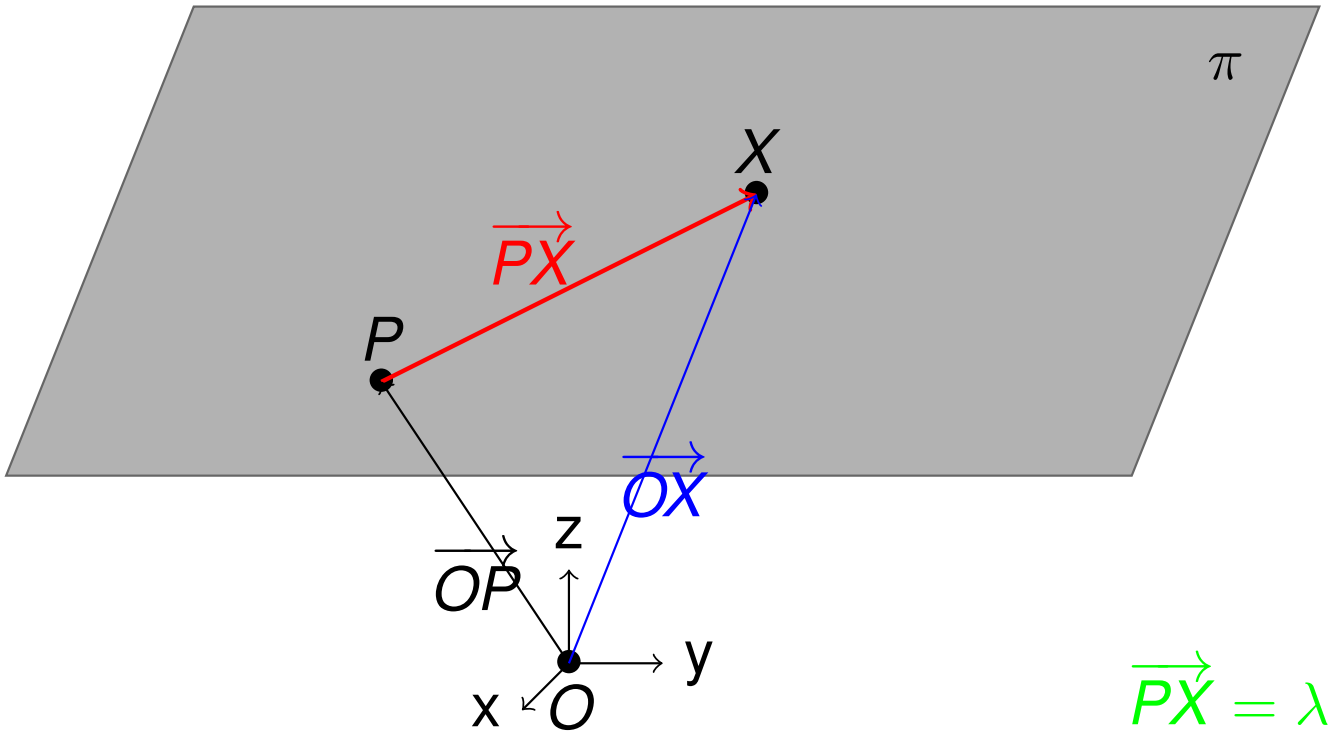


Ecuacións do plano no espazo



$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

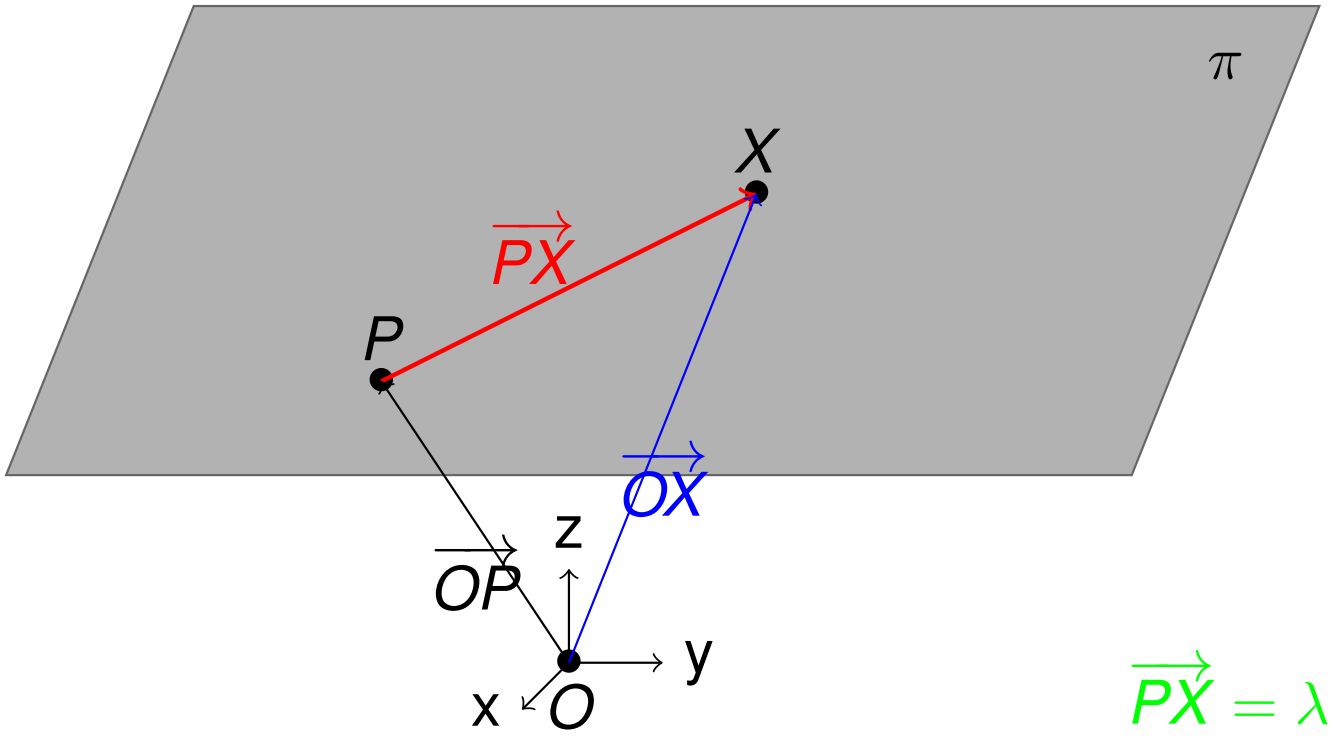
Ecuacións do plano no espazo



$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

CC BY NC SA

Ecuacións do plano no espazo



$$\overrightarrow{PX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

Ecuación vectorial do plano

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PX} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ecuacións do plano no espazo

Ecuación vectorial do plano

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PX} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Se denotamos $P(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ temos as

Ecuacións paramétricas do plano

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & = & p_1 & + & \lambda u_1 & + & \mu v_1 \\ y & = & p_2 & + & \lambda u_2 & + & \mu v_2 \\ z & = & p_3 & + & \lambda u_3 & + & \mu v_3 \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ecuacións do plano no espazo

Ecuación vectorial do plano

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PX} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Se denotamos $P(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ temos as

Ecuacións paramétricas do plano

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} x & = & p_1 & + & \lambda u_1 & + & \mu v_1 \\ y & = & p_2 & + & \lambda u_2 & + & \mu v_2 \\ z & = & p_3 & + & \lambda u_3 & + & \mu v_3 \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ecuacións do plano no espazo

Se denotamos $P(p_1, p_2, p_3)$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ temos as

Ecuacións paramétricas do plano

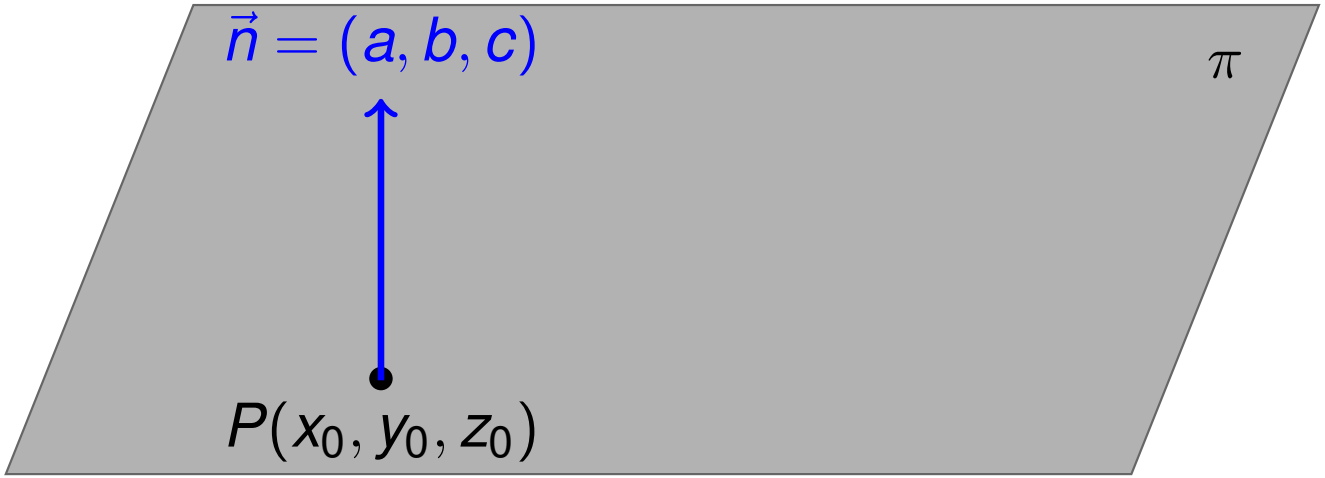
$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} x & = & p_1 & + & \lambda u_1 & + & \mu v_1 \\ y & = & p_2 & + & \lambda u_2 & + & \mu v_2 \\ z & = & p_3 & + & \lambda u_3 & + & \mu v_3 \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Usando que $\overrightarrow{PX}$ é combinación lineal de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ obtemos a

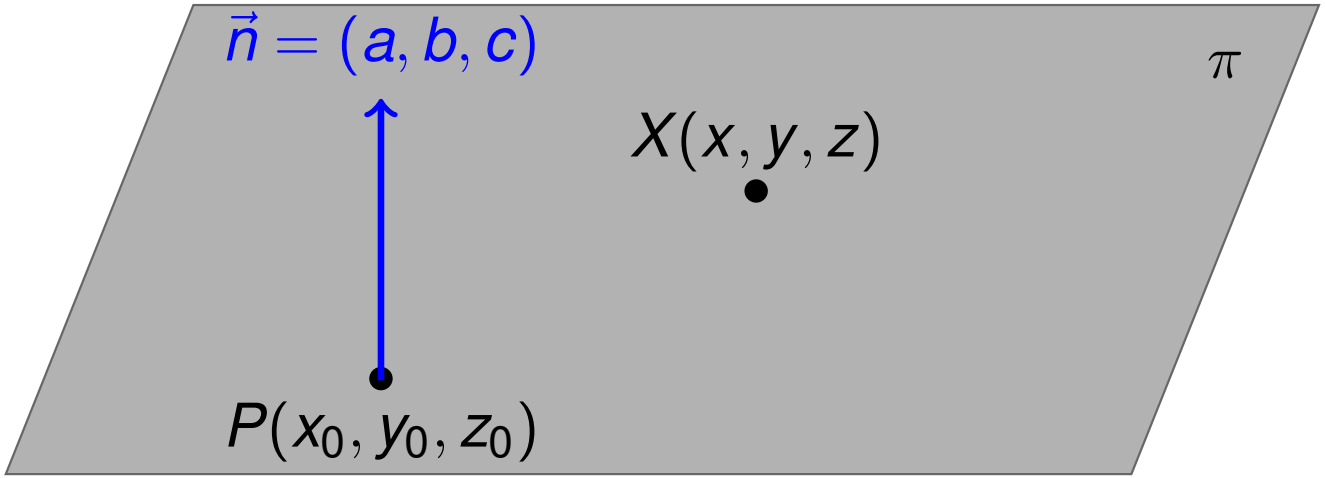
Ecuación implícita do plano

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & u_1 & v_1 \\ y - p_2 & u_2 & v_2 \\ z - p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

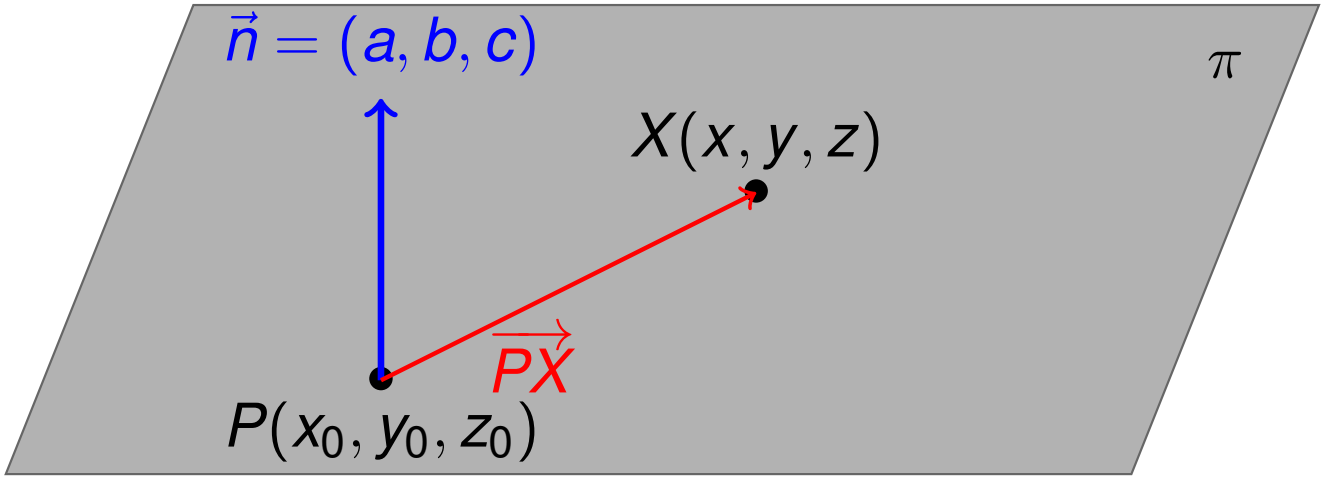
Ecuación normal do plano



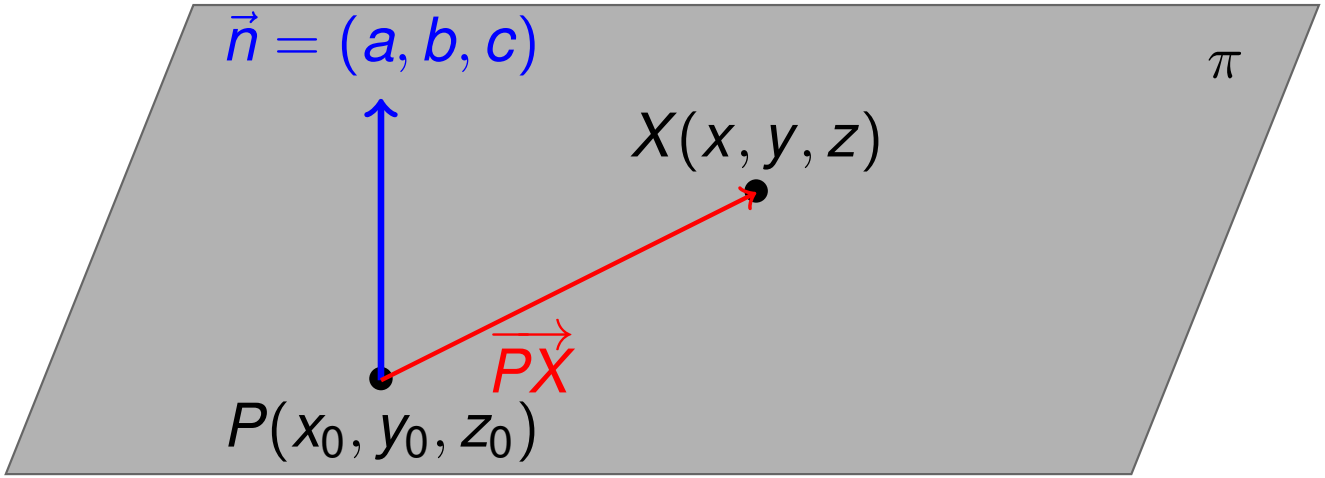
Ecuación normal do plano



Ecuación normal do plano

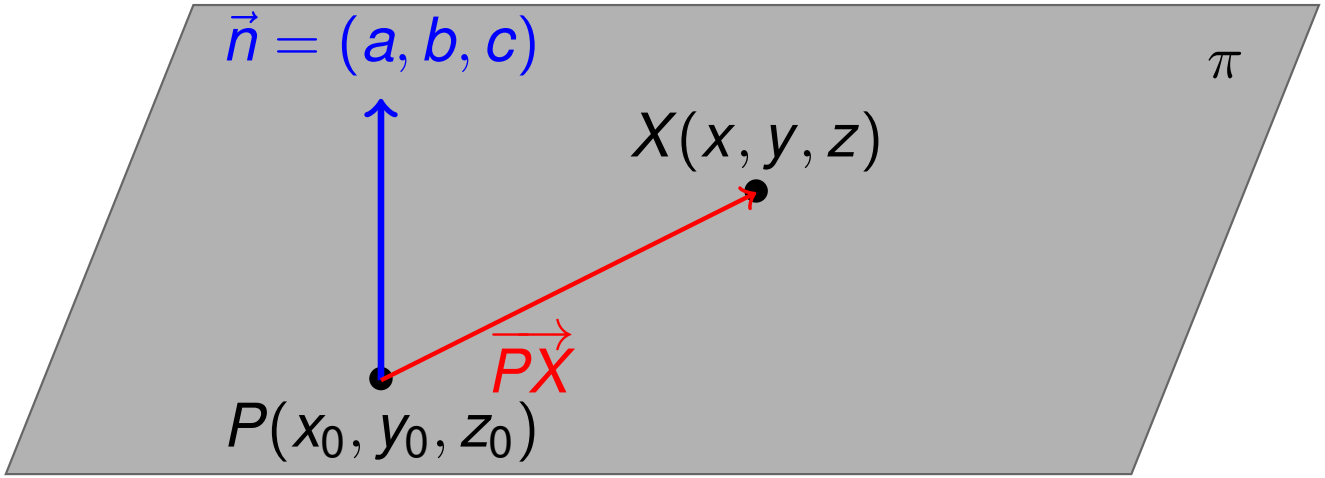


Ecuación normal do plano



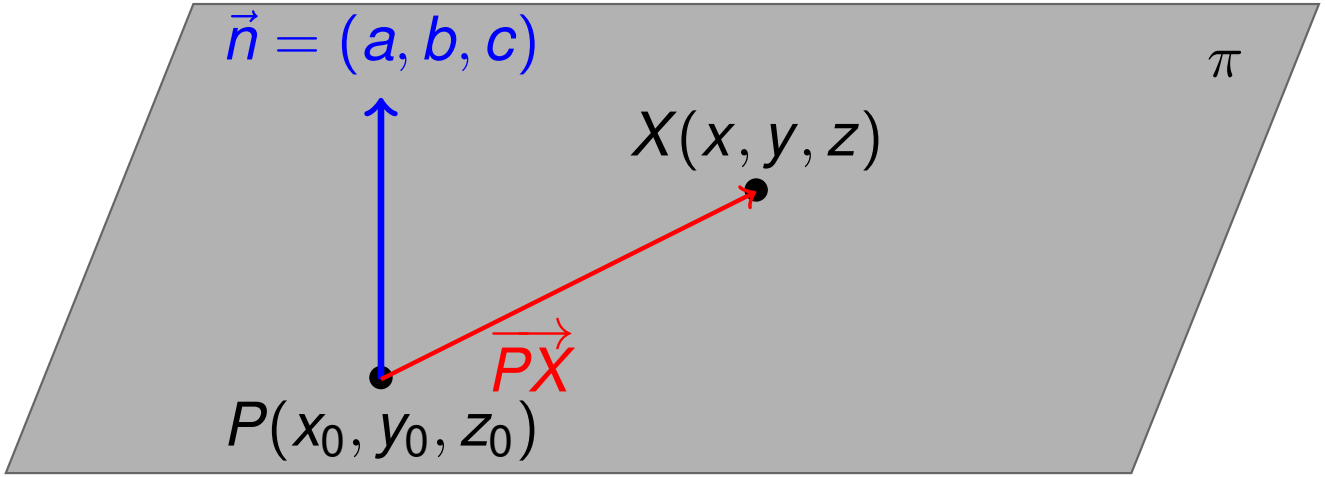
$\vec{n} \perp \overrightarrow{PX}$

Ecuación normal do plano



$$\vec{n} \perp \overrightarrow{PX} \iff (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Ecuación normal do plano



$$\vec{n} \perp \overrightarrow{PX} \iff (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Ecuación normal do plano

A ecuación normal do plano π determinado por $P(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e $\vec{n} = (a, b, c) \perp \pi$ é

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Paso de ecuacións implícitas da recta a outras

$$r: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3, \\ 2x & - & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

- Resolver o sistema para obter as ecuacións paramétricas ($z = \lambda$, etc).
- Obter un punto P buscando unha solución do sistema e o vector director é $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1)$.

  Neste caso, $P(1,1,1)$ e $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1) = (4,-1,-3)$.

  Polo tanto

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Paso de ecuacións implícitas da recta a outras

$$r: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3, \\ 2x & - & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

- Resolver o sistema para obter as ecuacións paramétricas ($z = \lambda$, etc).
- Obter un punto P buscando unha solución do sistema e o vector director é $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1)$.

  Neste caso, $P(1,1,1)$ e $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1) = (4,-1,-3)$.

  Polo tanto

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Paso de ecuacións implícitas da recta a outras

$$r: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3, \\ 2x & - & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

- Resolver o sistema para obter as ecuacións paramétricas ($z = \lambda$, etc).
- Obter un punto P buscando unha solución do sistema e o vector director é $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1)$.

Neste caso, $P(1,1,1)$ e $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1) = (4,-1,-3)$.

Polo tanto

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Paso de ecuacións implícitas da recta a outras

$$r: \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3, \\ 2x & - & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

- Resolver o sistema para obter as ecuacións paramétricas ($z = \lambda$, etc).
- Obter un punto P buscando unha solución do sistema e o vector director é $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1)$.

  Neste caso, $P(1,1,1)$ e $\vec{d}_r = (1,1,1) \times (2,-1,1) = (4,-1,-3)$.

  Polo tanto

$$r: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Paso de ecuacións implícitas da recta a outras

$$r : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3, \\ 2x & - & y & + & z & = & 2. \end{array} \right.$$

- Resolver o sistema para obter as ecuacións paramétricas ($z = \lambda$, etc).
- Obter un punto P buscando unha solución do sistema e o vector director é $\vec{d}_r = (1, 1, 1) \times (2, -1, 1)$.

  Neste caso, $P(1, 1, 1)$ e $\vec{d}_r = (1, 1, 1) \times (2, -1, 1) = (4, -1, -3)$.

  Polo tanto

$$r : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}.$$

Posición relativa de dous planos no espazo

Os planos $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array} \right.$ son

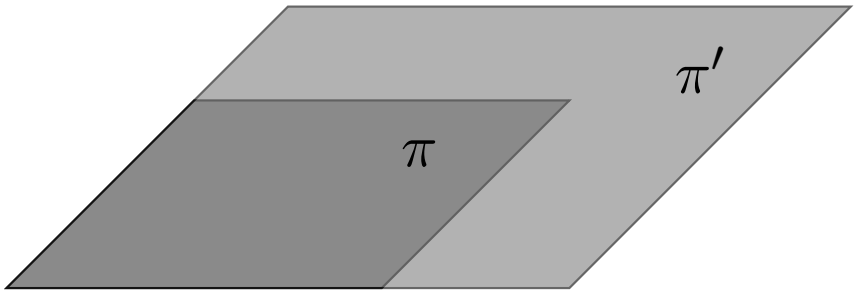
CC BY NC SA

Posición relativa de dous planos no espazo

Os planos $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array} \right.$ son

- o mesmo plano se

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1;$$

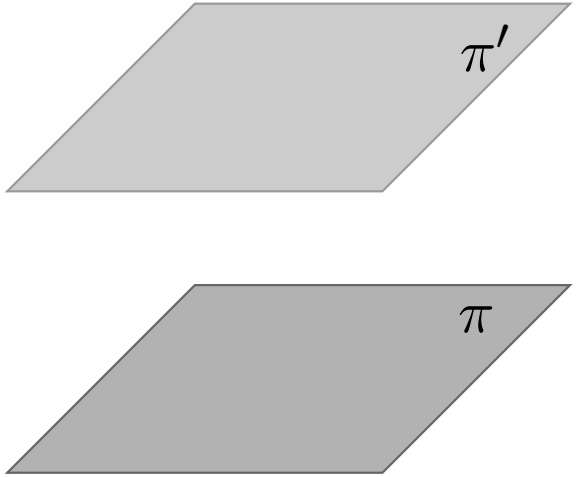


Posición relativa de dous planos no espazo

Os planos $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array} \right.$ son

- paralelos se

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \text{ e } \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2;$$

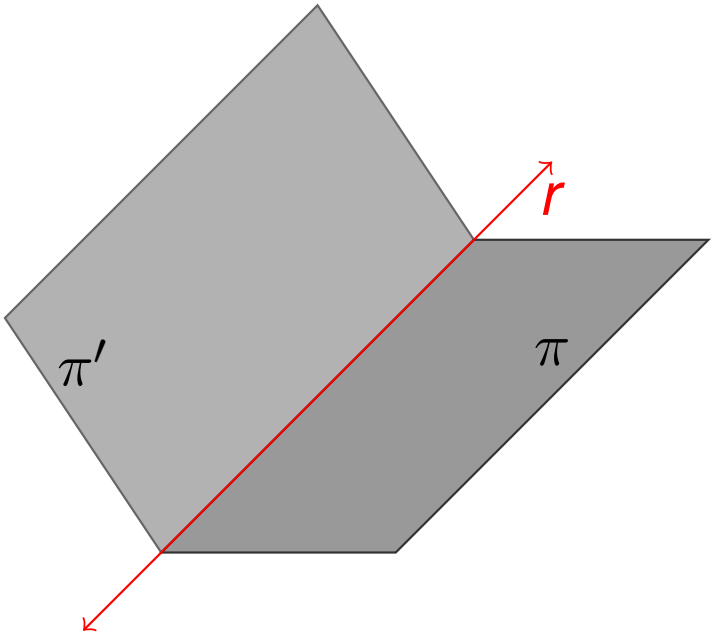


Posición relativa de dous planos no espazo

Os planos $\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array} \right.$ son

- secantes (córtanse nunha recta) se

$$\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$



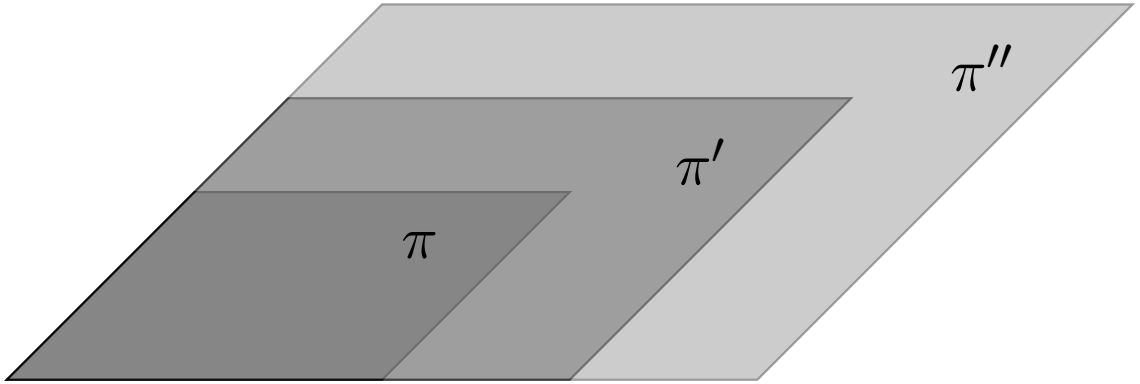
Posición relativa de tres planos no espazo

Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$

Posición relativa de tres planos no espazo

Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$

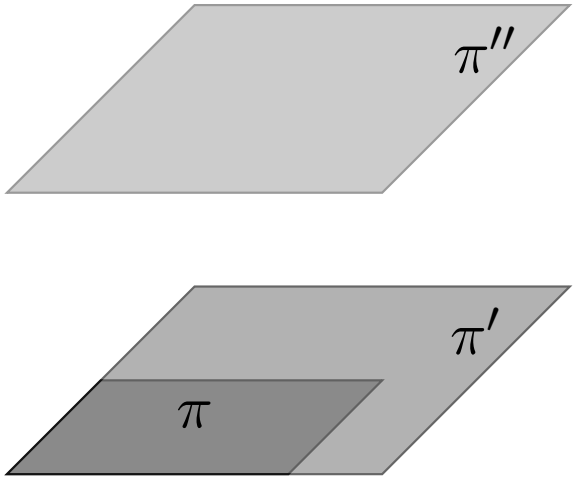
- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 1$ os planos son coincidentes

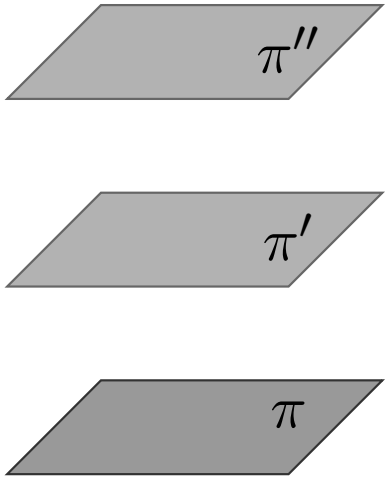


Posición relativa de tres planos no espazo

Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$

- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 1$ e $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$ os planos son paralelos pero non todos iguais.

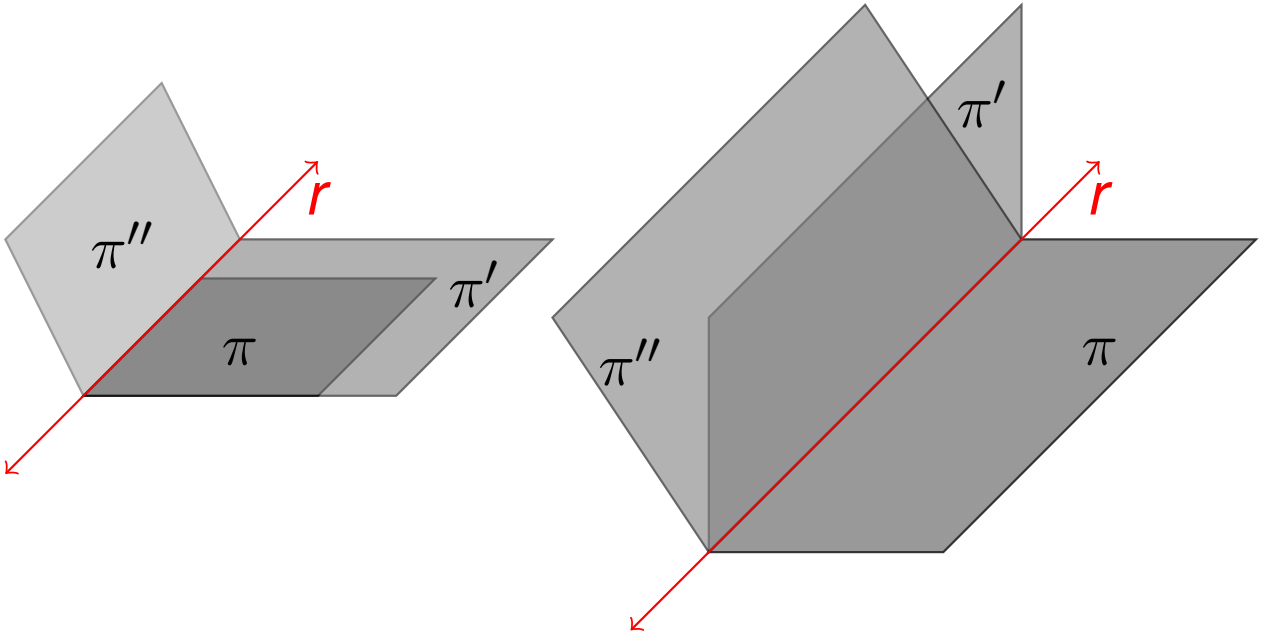




Posición relativa de tres planos no espazo

Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{lclclclclcl} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$

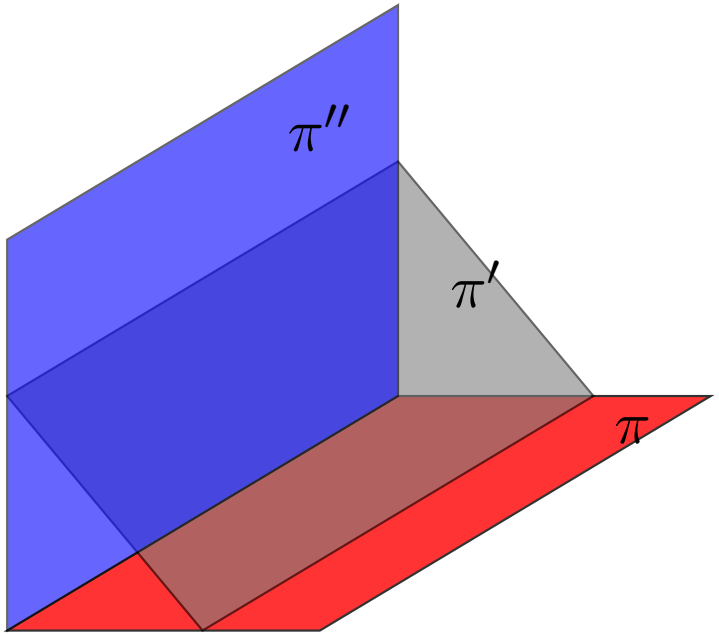
- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$ os planos córtanse nunha recta.

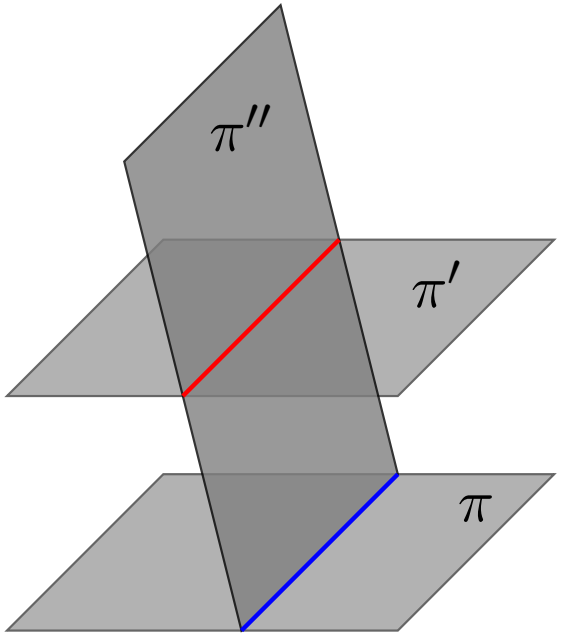


Posición relativa de tres planos no espazo

Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{lclclclclcl} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$

- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$ e $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$ os planos non teñen ningún punto en común e poden darse os casos



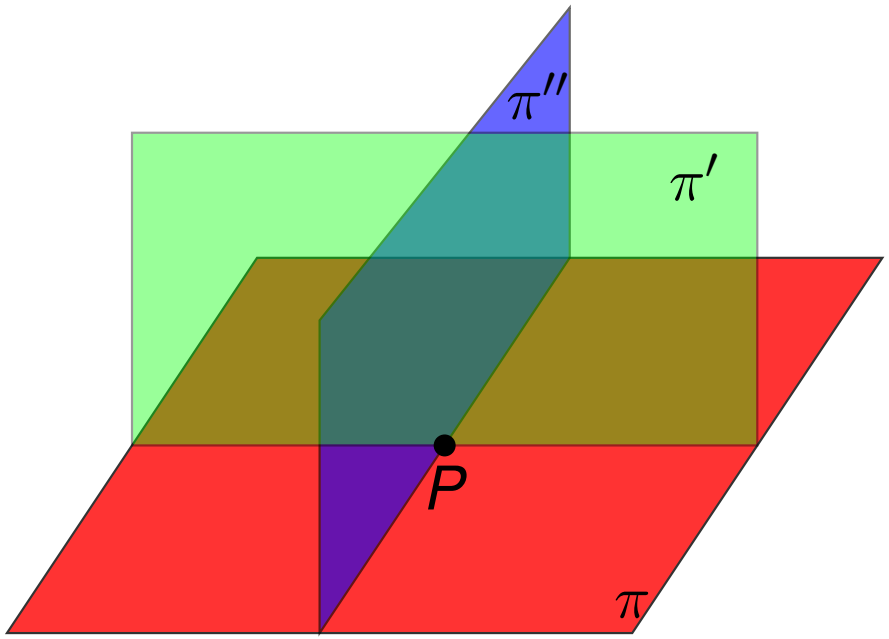


CC BY NC SA

Posición relativa de tres planos no espazo

Dados os tres planos $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ \pi' & : & a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \\ \pi'' & : & a''x & + & b''y & + & c''z & + & d'' & = & 0 \end{array}\right.$

- Se $\operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \operatorname{ran}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$ os planos córtanse nun punto.



Posición relativa de recta e plano no espazo

Dados $r : \overrightarrow{OP_r} + \lambda \vec{d}_r$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ pódense dar os casos:

- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r \neq 0$ entón a recta e o plano córtanse nun punto
- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r = 0$ pódense dar dous casos:
  - Se $P_r \in \pi$ a recta está contida no plano, e
  - se $P_r \notin \pi$ a recta e o plano son paralelos.

CC BY NC SA

Posición relativa de recta e plano no espazo

Dados $r : \overrightarrow{OP_r} + \lambda \vec{d}_r$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ pódense dar os casos:

- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r \neq 0$ entón a recta e o plano córtanse nun punto
- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r = 0$ pódense dar dous casos:
  - Se $P_r \in \pi$ a recta está contida no plano, e
  - se $P_r \notin \pi$ a recta e o plano son paralelos.

CC BY NC SA

Posición relativa de recta e plano no espazo

Dados $r : \overrightarrow{OP_r} + \lambda \vec{d}_r$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ pódense dar os casos:

- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r \neq 0$ entón a recta e o plano córtanse nun punto
- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r = 0$ pódense dar dous casos:
  - Se $P_r \in \pi$ a recta está contida no plano, e
  - se $P_r \notin \pi$ a recta e o plano son paralelos.

CC BY NC SA

Posición relativa de recta e plano no espazo

Dados $r : \overrightarrow{OP_r} + \lambda \vec{d}_r$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ pódense dar os casos:

- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r \neq 0$ entón a recta e o plano córtanse nun punto
- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r = 0$ pódense dar dous casos:
  - Se $P_r \in \pi$ a recta está contida no plano, e
  - se $P_r \notin \pi$ a recta e o plano son paralelos.

CC BY NC SA

Posición relativa de recta e plano no espazo

Dados $r : \overrightarrow{OP_r} + \lambda \vec{d}_r$ e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ pódense dar os casos:

- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r \neq 0$ entón a recta e o plano córtanse nun punto
- Se $\vec{n} \cdot \vec{d}_r = 0$ pódense dar dous casos:
  - Se $P_r \in \pi$ a recta está contida no plano, e
  - se $P_r \notin \pi$ a recta e o plano son paralelos.

CC BY NC SA

Obtención do punto de corte de recta e plano

Dada a recta $r : \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ e o plano $\pi : x - 4y + z = 0$ estudar a súa posición relativa. Se se cortan, determinar o punto de corte.

Posición relativa:

$$\vec{n} \cdot \vec{d}_r = (1, -4, 1) \cdot (2, 1, 3) = 1 \neq 0 \implies$$

r e π córtanse.

Punto de corte:

$$1 + 2\lambda - 4\lambda + 3\lambda = 0 \implies \lambda = -1.$$

O punto de corte é $P(-1, -1, -3)$.

Obtención do punto de corte de recta e plano

Dada a recta $r : \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ e o plano $\pi : x - 4y + z = 0$ estudar a súa posición relativa. Se se cortan, determinar o punto de corte.

Posición relativa:

$$\vec{n} \cdot \vec{d}_r = (1, -4, 1) \cdot (2, 1, 3) = 1 \neq 0 \implies$$

r e π córtanse.

Punto de corte:

$$1 + 2\lambda - 4\lambda + 3\lambda = 0 \implies \lambda = -1.$$

O punto de corte é $P(-1, -1, -3)$.

Obtención do punto de corte de recta e plano

Dada a recta $r : \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ e o plano $\pi : x - 4y + z = 0$ estudar a súa posición relativa. Se se cortan, determinar o punto de corte.

Posición relativa:

$$\vec{n} \cdot \vec{d}_r = (1, -4, 1) \cdot (2, 1, 3) = 1 \neq 0 \implies$$

r e π córtanse.

Punto de corte:

$$1 + 2\lambda - 4\lambda + 3\lambda = 0 \implies \lambda = -1.$$

O punto de corte é $P(-1, -1, -3)$.

Obtención do punto de corte de recta e plano

Dada a recta $r : \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ e o plano $\pi : x - 4y + z = 0$ estudar a súa posición relativa. Se se cortan, determinar o punto de corte.

Posición relativa:

$$\vec{n} \cdot \vec{d}_r = (1, -4, 1) \cdot (2, 1, 3) = 1 \neq 0 \implies$$

r e π córtanse.

Punto de corte:

$$1 + 2\lambda - 4\lambda + 3\lambda = 0 \implies \lambda = -1.$$

O punto de corte é $P(-1, -1, -3)$.

Posición relativa de recta e plano no espazo

Se nos dan as ecuacións da recta en forma implícita formamos un sistema coa ecuación do plano.

- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 2$ a recta está contida no plano (sistema compatible indeterminado, infinitas solucións).
- Se $\mathrm{ran}(C) = 2$ e $\mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano son paralelos (sistema incompatible, sen solución).
- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano córtanse nun punto (sistema compatible determinado, solución única).

O punto de corte obtense resolvendo o sistema.

Posición relativa de recta e plano no espazo

Se nos dan as ecuacións da recta en forma implícita formamos un sistema coa ecuación do plano.

- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 2$ a recta está contida no plano (sistema compatible indeterminado, infinitas solucións).
- Se $\mathrm{ran}(C) = 2$ e $\mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano son paralelos (sistema incompatible, sen solución).
- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano córtanse nun punto (sistema compatible determinado, solución única).

O punto de corte obtense resolvendo o sistema.

Posición relativa de recta e plano no espazo

Se nos dan as ecuacións da recta en forma implícita formamos un sistema coa ecuación do plano.

- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 2$ a recta está contida no plano (sistema compatible indeterminado, infinitas solucións).
- Se $\mathrm{ran}(C) = 2$ e $\mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano son paralelos (sistema incompatible, sen solución).
- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano córtanse nun punto (sistema compatible determinado, solución única).

O punto de corte obtense resolvendo o sistema.

Posición relativa de recta e plano no espazo

Se nos dan as ecuacións da recta en forma implícita formamos un sistema coa ecuación do plano.

- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 2$ a recta está contida no plano (sistema compatible indeterminado, infinitas solucións).
- Se $\mathrm{ran}(C) = 2$ e $\mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano son paralelos (sistema incompatible, sen solución).
- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano córtanse nun punto (sistema compatible determinado, solución única).

O punto de corte obtense resolvendo o sistema.

Posición relativa de recta e plano no espazo

Se nos dan as ecuacións da recta en forma implícita formamos un sistema coa ecuación do plano.

- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 2$ a recta está contida no plano (sistema compatible indeterminado, infinitas solucións).
- Se $\mathrm{ran}(C) = 2$ e $\mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano son paralelos (sistema incompatible, sen solución).
- Se $\mathrm{ran}(C) = \mathrm{ran}(A) = 3$ a recta e o plano córtanse nun punto (sistema compatible determinado, solución única).

O punto de corte obtense resolvendo o sistema.