MATEMÁTICAS II
DETERMINANTES

Manuel Fernández López

IES María Sarmiento
Misericordia 58
Viveiro, Lugo

December 2, 2015

Outline

Outline

Determinante dunha matriz de orde dous

Determinante dunha matriz de orde dous

Dada a matriz cadrada de orde 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

chámase determinante de A ao número real

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

A regra mnemotécnica para lembrar os determinantes de orde dous é: *o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundaria*.

Determinante dunha matriz de orde dous

Determinante dunha matriz de orde dous

Dada a matriz cadrada de orde 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

chámase determinante de A ao número real

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

A regra mnemotécnica para lembrar os determinantes de orde dous é: *o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundaria*.

Outline

1. Definicións básicas
   - Determinante dunha matriz de orde dous
   - Determinante dunha matriz de orde tres

2. Propiedades dos determinantes
   - Propiedades dos determinantes
   - Matriz complementaria, menor complementario e adxunto
   - Dous resultados que nos conducen ao cálculo da inversa

3. Matriz inversa e o seu cálculo
   - Matriz inversa
   - Cálculo do rango usando determinantes

4. Ecuacións matriciais

Determinante dunha matriz de orde tres

Dada a matriz cadrada de orde 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

chámase determinante de A ao número real, denotado por $det(A) = |A|$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Determinantes de orde tres: Regra de Sarrus

A regra mnemotécnica para lembrar os determinantes de orde tres, coñecida como **regra de Sarrus,** é:

- Con **signo positivo** aparecen *os produtos dos elementos da diagonal principal e os das diagonais paralelas co seu correspondente vértice oposto*.
- Con **signo negativo** aparecen *os produtos dos elementos da diagonal secundaria e os das diagonais paralelas co seu correspondente vértice oposto*.

Determinantes de orde tres: Regra de Sarrus

A regra mnemotécnica para lembrar os determinantes de orde tres, coñecida como **regra de Sarrus,** é:

- Con **signo positivo** aparecen *os produtos dos elementos da diagonal principal e os das diagonais paralelas co seu correspondente vértice oposto*.
- Con **signo negativo** aparecen *os produtos dos elementos da diagonal secundaria e os das diagonais paralelas co seu correspondente vértice oposto*.

Regra de Sarrus graficamente

Con signo positivo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Con signo negativo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Regra de Sarrus graficamente

Con signo positivo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Con signo negativo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinante de orde catro

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\ +a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ -a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\ -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\ +a_{13}a_{22}a_{41}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{41}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{44} \\ +a_{11}a_{23}a_{42}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{43}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{44} \end{array}$$

Precisamos unha forma mellor de calculalo que memorizar a expresión anterior!!!!!!

Determinante de orde catro

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\
&+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\
&-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\
&-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\
&-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\
&+a_{13}a_{22}a_{41}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{41}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{44} \\
&+a_{11}a_{23}a_{42}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{43}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{44}
\end{aligned}$$

Precisamos unha forma mellor de calculalo que memorizar a expresión anterior!!!!!!

Determinante de orde catro

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} \\ & +a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\ & +a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} \\ & -a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} \\ & -a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \\ & +a_{13}a_{22}a_{41}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{41}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{42}a_{44} \\ & +a_{11}a_{23}a_{42}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{43}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{43}a_{44} \end{aligned}$$

Precisamos unha forma mellor de calculalo que memorizar a expresión anterior!!!!!!

Outline

Propiedades dos determinantes

1. O determinante dunha matriz coincide co da súa transposta.

$$det(A) = det(A^t).$$

2. Se unha matriz cadrada ten unha fila (resp. columna) de ceros entón o seu determinante é cero.

$$det(F_1, \ldots, 0, \ldots, F_n) = 0, \qquad det(C_1, \ldots, 0, \ldots, C_n) = 0.$$

3. Se se permutan dúas filas (resp. columnas) dunha matriz cadrada o seu determinante cambia de signo.

$$det(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = -det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_j, \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = -det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n)$$

Propiedades dos determinantes

1. O determinante dunha matriz coincide co da súa transposta.

$$det(A) = det(A^t).$$

2. Se unha matriz cadrada ten unha fila (resp. columna) de ceros entón o seu determinante é cero.

$$det(F_1, \dots, 0, \dots, F_n) = 0, \qquad det(C_1, \dots, 0, \dots, C_n) = 0.$$

3. Se se permutan dúas filas (resp. columnas) dunha matriz cadrada o seu determinante cambia de signo.

$$det(F_1, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n) = -det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, F_n),$$

$$det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)$$

Propiedades dos determinantes

1 O determinante dunha matriz coincide co da súa transposta.

$$det(A) = det(A^t).$$

2 Se unha matriz cadrada ten unha fila (resp. columna) de ceros entón o seu determinante é cero.

$$det(F_1, \ldots, 0, \ldots, F_n) = 0, \qquad det(C_1, \ldots, 0, \ldots, C_n) = 0.$$

3 Se se permutan dúas filas (resp. columnas) dunha matriz cadrada o seu determinante cambia de signo.

$$det(F_1, \ldots, F_j, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = -det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_j, \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = -det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n).$$

Propiedades dos determinantes

4 Se unha matriz cadrada ten dúas filas (resp. columnas) iguais o seu determinante vale cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = 0,$$
$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = 0.$$

5 Se unha matriz cadrada ten dúas filas (resp. columnas proporcionais o seu determinante vale cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, \lambda F_i, \ldots, F_n) = 0,$$
$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = 0.$$

Propiedades dos determinantes

4 Se unha matriz cadrada ten dúas filas (resp. columnas) iguais o seu determinante vale cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_i, \ldots, F_n) = 0,$$

$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_i, \ldots, C_n) = 0.$$

5 Se unha matriz cadrada ten dúas filas (resp. columnas proporcionais o seu determinante vale cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, \lambda F_i, \ldots, F_n) = 0,$$

$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = 0.$$

Propiedades dos determinantes

6 Se unha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada é combinación lineal das restantes filas (resp. columnas) entón o seu determinante vale cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_{n-1}, \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{n-1} F_{n-1}) = 0,$$

$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_{n-1}, \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} C_{n-1}) = 0.$$

7 Se a unha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada se lle suma outra fila (resp. columna) paralela o seu determinante non varía.

$$det(F_1, \ldots, F_i + F_j, \ldots, F_n) = det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, C_i + C_j, \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

Propiedades dos determinantes

6 Se unha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada é combinación lineal das restantes filas (resp. columnas) entón o seu determinante vale cero.

$$det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_{n-1}, \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{n-1} F_{n-1}) = 0,$$

$$det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_{n-1}, \lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{n-1} C_{n-1}) = 0.$$

7 Se a unha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada se lle suma outra fila (resp. columna) paralela o seu determinante non varía.

$$det(F_1, \ldots, F_i + F_j, \ldots, F_n) = det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, C_i + C_j, \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

Propiedades dos determinantes

8 Se a unha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada se lle suma un múltiplo doutra fila (resp. columna) o seu determinante non varía.

$$det(F_1, \dots, F_i + \lambda F_j, \dots, F_n) = det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n),$$

$$det(C_1, \dots, C_i + \lambda C_j, \dots, C_n) = det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

9 Se todos os elementos dunha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada se descompoñen en dous sumandos entón o seu determinante é igual á suma de dous determinantes que teñen nesa fila (resp. columna) os primeiros e segundos sumandos respectivamente e nas demais os mesmos elementos que o determinante inicial.

$$det(F_1, \dots, F_i + F_i', \dots, F_n) = det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n) + det(F_1, \dots, F_i', \dots, F_n),$$

$$det(C_1, \dots, C_i + C_i', \dots, C_n) = det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) + det(C_1, \dots, C_i', \dots, C_n).$$

Propiedades dos determinantes

8 Se a unha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada se lle suma un múltiplo doutra fila (resp. columna) o seu determinante non varía.

$$det(F_1, \ldots, F_i + \lambda F_j, \ldots, F_n) = det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, C_i + \lambda C_j, \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

9 Se todos os elementos dunha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada se descompoñen en dous sumandos entón o seu determinante é igual á suma de dous determinantes que teñen nesa fila (resp. columna) os primeiros e segundos sumandos respectivamente e nas demais os mesmos elementos que o determinante inicial.

$$det(F_1, \ldots, F_i + F_i', \ldots, F_n) = det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n) + det(F_1, \ldots, F_i', \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, C_i + C_i', \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n).$$

Propiedades dos determinantes

10 Se se multiplican todos os elementos dunha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada por un número entón o determinante queda multiplicado polo dito número.

$$det(F_1, \ldots, \lambda F_i, \ldots, F_n) = \lambda det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n),$$
$$det(C_1, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = \lambda det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

11 Se A e B son dúas matrices cadradas da mesma orde entón o determinante do seu produto coincide co produto dos determinantes.

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Propiedades dos determinantes

10 Se se multiplican todos os elementos dunha fila (resp. columna) dunha matriz cadrada por un número entón o determinante queda multiplicado polo dito número.

$$det(F_1, \ldots, \lambda F_i, \ldots, F_n) = \lambda det(F_1, \ldots, F_i, \ldots, F_n),$$

$$det(C_1, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = \lambda det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

11 Se A e B son dúas matrices cadradas da mesma orde entón o determinante do seu produto coincide co produto dos determinantes.

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Outline

Matriz complementaria dun elemento

Matriz complementaria

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ orde n e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **matriz complementaria de** a_{ij}, que se representa por M_{ij}, á submatriz de orde $n-1$ que se obtén suprimindo a fila i e a columna j de A.

A matriz complementaria do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz complementaria dun elemento

Matriz complementaria

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ orde n e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **matriz complementaria de** a_{ij}, que se representa por M_{ij}, á submatriz de orde $n-1$ que se obtén suprimindo a fila i e a columna j de A.

A matriz complementaria do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz complementaria dun elemento

Matriz complementaria

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ orde n e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **matriz complementaria de** a_{ij}, que se representa por M_{ij}, á submatriz de orde $n-1$ que se obtén suprimindo a fila i e a columna j de A.

A matriz complementaria do elemento a_{23} da matriz
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -\mathbf{5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -\mathbf{5} \\ 2 & 4 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz complementaria dun elemento

Matriz complementaria

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ orde n e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **matriz complementaria de** a_{ij}, que se representa por M_{ij}, á submatriz de orde $n-1$ que se obtén suprimindo a fila i e a columna j de A.

A matriz complementaria do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -\mathbf{5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -\mathbf{5} \\ 2 & 4 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz complementaria dun elemento

Matriz complementaria

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ orde n e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **matriz complementaria de** a_{ij}, que se representa por M_{ij}, á submatriz de orde $n-1$ que se obtén suprimindo a fila i e a columna j de A.

A matriz complementaria do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -\mathbf{5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & -\mathbf{5} \\ 2 & 4 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Menor complementario dun elemento

Menor complementario

Dada unha matriz cadra $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **menor complementario do elemento** a_{ij} e denótase por α_{ij} ao número $\alpha_{ij} = det(M_{ij})$.

O menor complementario do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Menor complementario dun elemento

Menor complementario

Dada unha matriz cadra $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **menor complementario do elemento** a_{ij} e denótase por α_{ij} ao número $\alpha_{ij} = det(M_{ij})$.

O menor complementario do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Menor complementario dun elemento

Menor complementario

Dada unha matriz cadra $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **menor complementario do elemento** a_{ij} e denótase por α_{ij} ao número $\alpha_{ij} = det(M_{ij})$.

O menor complementario do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Menor complementario dun elemento

Menor complementario

Dada unha matriz cadra $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **menor complementario do elemento** a_{ij} e denótase por α_{ij} ao número $\alpha_{ij} = det(M_{ij})$.

O menor complementario do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Menor complementario dun elemento

Menor complementario

Dada unha matriz cadra $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **menor complementario do elemento** a_{ij} e denótase por α_{ij} ao número $\alpha_{ij} = det(M_{ij})$.

O menor complementario do elemento a_{23} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ é}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

Adxunto dun elemento

Adxunto dun elemento

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **adxunto do elemento** a_{ij} e denótase por A_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$.

O adxunto do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Adxunto dun elemento

Adxunto dun elemento

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **adxunto do elemento** a_{ij} e denótase por A_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$.

O adxunto do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Adxunto dun elemento

Adxunto dun elemento

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **adxunto do elemento** a_{ij} e denótase por A_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$.

O adxunto do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Adxunto dun elemento

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **adxunto do elemento** a_{ij} e denótase por A_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$.

O adxunto do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Adxunto dun elemento

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ e dado un elemento a_{ij} de A, chámase **adxunto do elemento** a_{ij} e denótase por A_{ij} ao número $A_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$.

O adxunto do elemento a_{23} da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & \mathbf{-5} \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -4.$$

Regra mnemotéctica para o signo do adxunto

Orde 2 : $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$

Orde 3 : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Orde 4 : $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

Regra mnemotéctica para o signo do adxunto

Orde 2 : $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$

Orde 3 : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Orde 4 : $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

Regra mnemotéctica para o signo do adxunto

Orde 2 : $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$

Orde 3 : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Orde 4 : $\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$

Outline

Primeiro resultado

Teorema

O determinante dunha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ de orde n é igual a suma dos produtos dos elementos dunha fila (resp. columna) calquera e os seus adxuntos correspondentes.

Así, desenvolvendo o determinante pola fila i :

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

e desenvolvendo o determinante pola columna j :

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Primeiro resultado

Teorema

O determinante dunha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ de orde n é igual a suma dos produtos dos elementos dunha fila (resp. columna) calquera e os seus adxuntos correspondentes.
Así, desenvolvendo o determinante pola fila i :

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

e desenvolvendo o determinante pola columna j :

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Exemplo do desenvolvemento dun determinante

Exemplo:

Cálcula o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

Desenvolvendo pola primeira fila temos que

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -160.$$

Exemplo do desenvolvemento dun determinante

Exemplo:

Cálcula o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

Desenvolvendo pola primeira fila temos que

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 2 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -160.$$

Método práctico para calcular determinantes de orde superior.

Consiste en facer o maior número de ceros posible nunha fila ou columna, aplicando as propiedades dos determinantes, e despois desenvolver o determinante pola dita fila ou columna.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 5 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \\ F_4 + 4F_1 \to F_4}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 6 & -13 \\ 0 & -16 & 13 & -14 \\ 0 & -19 & 22 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 6 & -13 \\ -16 & 13 & -14 \\ -19 & 22 & -26 \end{vmatrix} = 165.$$

Método práctico para calcular determinantes de orde superior.

Consiste en facer o maior número de ceros posible nunha fila ou columna, aplicando as propiedades dos determinantes, e despois desenvolver o determinante pola dita fila ou columna.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 5 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2-2F_1\to F_2 \\ F_3-3F_1\to F_3 \\ F_4+4F_1\to F_4}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 6 & -13 \\ 0 & -16 & 13 & -14 \\ 0 & -19 & 22 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 6 & -13 \\ -16 & 13 & -14 \\ -19 & 22 & -26 \end{vmatrix} = 165.$$

Método práctico para calcular determinantes de orde superior.

Consiste en facer o maior número de ceros posible nunha fila ou columna, aplicando as propiedades dos determinantes, e despois desenvolver o determinante pola dita fila ou columna.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 5 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \\ F_4 + 4F_1 \to F_4}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 6 & -13 \\ 0 & -16 & 13 & -14 \\ 0 & -19 & 22 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 6 & -13 \\ -16 & 13 & -14 \\ -19 & 22 & -26 \end{vmatrix} = 165.$$

Método práctico para calcular determinantes de orde superior.

Consiste en facer o maior número de ceros posible nunha fila ou columna, aplicando as propiedades dos determinantes, e despois desenvolver o determinante pola dita fila ou columna.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 5 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 - 3F_1 \to F_3 \\ F_4 + 4F_1 \to F_4}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 6 & -13 \\ 0 & -16 & 13 & -14 \\ 0 & -19 & 22 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 6 & -13 \\ -16 & 13 & -14 \\ -19 & 22 & -26 \end{vmatrix} = 165.$$

Segundo resultado

Teorema

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ de orde n a suma dos produtos dos elementos dunha fila (resp. columna) calquera e os adxuntos correspondentes a unha fila (resp. columna) distinta vale cero.

Así, se $i \neq k$:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

e se $j \neq l$:

$$a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + \cdots + a_{nj}A_{nl} = 0.$$

Segundo resultado

Teorema

Dada unha matriz cadrada $A = (a_{ij})$ de orde n a suma dos produtos dos elementos dunha fila (resp. columna) calquera e os adxuntos correspondentes a unha fila (resp. columna) distinta vale cero.

Así, se $i \neq k$:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

e se $j \neq l$:

$$a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + \cdots + a_{nj}A_{nl} = 0.$$

Outline

Recordatorio de definición de matriz inversible

Unha matriz cadrada A dise **inversible** se ten matriz inversa, é dicir, existe unha matriz, que se denota por A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

As matrices cadradas que posúen inversa chámanse **matrices regulares** e as que non teñen inversa chámanse **matrices singulares.**

Caracterización de matriz regular

Unha matriz cadrada A é inversible se e soamente se $det(A) \neq 0$.

Recordatorio de definición de matriz inversible

Unha matriz cadrada A dise **inversible** se ten matriz inversa, é dicir, existe unha matriz, que se denota por A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

As matrices cadradas que posúen inversa chámanse **matrices regulares** e as que non teñen inversa chámanse **matrices singulares.**

Caracterización de matriz regular

Unha matriz cadrada A é inversible se e soamente se $det(A) \neq 0$.

Recordatorio de definición de matriz inversible

Unha matriz cadrada A dise **inversible** se ten matriz inversa, é dicir, existe unha matriz, que se denota por A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

As matrices cadradas que posúen inversa chámanse **matrices regulares** e as que non teñen inversa chámanse **matrices singulares.**

Caracterización de matriz regular

Unha matriz cadrada A é inversible se e soamente se $det(A) \neq 0$.

Matriz inversa

Sexa $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Chámase matriz adxunta de A e denótase por $Adx(A)$, á matriz que se obtén substituindo o elemento a_{ij} polo seu adxunto correspondente A_{ij}.

Fórmula para a matriz inversa

Se $|A| \neq 0$ entón:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adx(A)^t.$$

Matriz inversa

Sexa $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Chámase matriz adxunta de A e denótase por $Adx(A)$, á matriz que se obtén substituindo o elemento a_{ij} polo seu adxunto correspondente A_{ij}.

Fórmula para a matriz inversa

Se $|A| \neq 0$ entón:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adx(A)^t.$$

Propiedades da inversa

- Se existe A^{-1}, é única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Propiedades da inversa

- Se existe A^{-1}, é única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Propiedades da inversa

- Se existe A^{-1}, é única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Propiedades da inversa

- Se existe A^{-1}, é única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Outline

Rango dunha matriz usando determinantes

Dada unha matriz A de dimensión $m \times n$, chámase **menor de orde** k ($k \leq m$, $k \leq n$) ao determinante dunha submatriz de orde k de A.

Rango dunha matriz usando determinantes

O **rango dunha matriz** A coincide coa orde do maior menor non-nulo de A.

Rango dunha matriz usando determinantes

Dada unha matriz A de dimensión $m \times n$, chámase **menor de orde** k ($k \leq m$, $k \leq n$) ao determinante dunha submatriz de orde k de A.

Rango dunha matriz usando determinantes

O **rango dunha matriz** A coincide coa orde do maior menor non-nulo de A.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Buscamos un menor de orde dous non-nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Sabemos que:

- F_1 e F_2 (C_1 e C_2) son linealmente independentes.
- O rango da matriz é ≥ 2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Buscamos un menor de orde dous non-nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Sabemos que:

- F_1 e F_2 (C_1 e C_2) son linealmente independentes.
- O rango da matriz é ≥ 2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Buscamos un menor de orde dous non-nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

Sabemos que:

- F_1 e F_2 (C_1 e C_2) son linealmente independentes.
- O rango da matriz é ≥ 2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$
ran\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?
$$

Buscamos un menor de orde dous non-nulo:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0
$$

Sabemos que:

- F_1 e F_2 (C_1 e C_2) son linealmente independentes.
- O rango da matriz é ≥ 2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.
Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.
Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.
Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.
Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.
Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 3 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_3 é combinación lineal de C_1 e C_2.
Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 4 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_4 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 5 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_5 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Obtemos que o rango da matriz é dous.

Se non orlamos habería que calcular 10 determinantes de orde 3 para poder obter o rango.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 5 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_5 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Obtemos que o rango da matriz é dous.

Se non orlamos habería que calcular 10 determinantes de orde 3 para poder obter o rango.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 5 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_5 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Obtemos que o rango da matriz é dous.

Se non orlamos habería que calcular 10 determinantes de orde 3 para poder obter o rango.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 5 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_5 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Obtemos que o rango da matriz é dous.

Se non orlamos habería que calcular 10 determinantes de orde 3 para poder obter o rango.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 5 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_5 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Obtemos que o rango da matriz é dous.

Se non orlamos habería que calcular 10 determinantes de orde 3 para poder obter o rango.

Esquema para estudar o rango dunha matriz

$$ran \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Orlamos o menor de orde dous non-nulo coa fila 3 e a columna 5 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 10 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sabemos que C_5 é combinación lineal de C_1 e C_2.

Obtemos que o rango da matriz é dous.

Se non orlamos habería que calcular 10 determinantes de orde 3 para poder obter o rango.

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX = B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}B$$

Consideremos a ecuación matricial

$$XA = B$$

Multiplicando pola dereita por A^{-1}

$$X = BA^{-1}$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX = B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}B$$

Consideremos a ecuación matricial

$$XA = B$$

Multiplicando pola dereita por A^{-1}

$$X = BA^{-1}$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX = B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}B$$

Consideremos a ecuación matricial

$$XA = B$$

Multiplicando pola dereita por A^{-1}

$$X = BA^{-1}$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX = B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}B$$

Consideremos a ecuación matricial

$$XA = B$$

Multiplicando pola dereita por A^{-1}

$$X = BA^{-1}$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX + B = C$$

Pasando B para a dereita

$$AX = C - B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}(C - B)$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX + B = C$$

Pasando B para a dereita

$$AX = C - B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}(C - B)$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX + B = C$$

Pasando B para a dereita

$$AX = C - B$$

Multiplicando pola esquerda por A^{-1}

$$X = A^{-1}(C - B)$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = CX$$

Pasando B para a dereita e CX para a esquerda

$$AX - CX = B$$

Quitando factor común

$$(A - C)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - C)^{-1}$

$$X = (A - C)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = CX$$

Pasando B para a dereita e CX para a esquerda

$$AX - CX = B$$

Quitando factor común

$$(A - C)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - C)^{-1}$

$$X = (A - C)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = CX$$

Pasando B para a dereita e CX para a esquerda

$$AX - CX = B$$

Quitando factor común

$$(A - C)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - C)^{-1}$

$$X = (A - C)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = CX$$

Pasando B para a dereita e CX para a esquerda

$$AX - CX = B$$

Quitando factor común

$$(A - C)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - C)^{-1}$

$$X = (A - C)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = 5X$$

Pasando B para a dereita e $5X$ para a esquerda

$$AX - 5X = B$$

Quitando factor común (ollo, $A - 5$ non ten sentido, agás que A sexa un número)

$$(A - 5I)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - 5I)^{-1}$

$$X = (A - 5I)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = 5X$$

Pasando B para a dereita e $5X$ para a esquerda

$$AX - 5X = B$$

Quitando factor común (ollo, $A - 5$ non ten sentido, agás que A sexa un número)

$$(A - 5I)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - 5I)^{-1}$

$$X = (A - 5I)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = 5X$$

Pasando B para a dereita e $5X$ para a esquerda

$$AX - 5X = B$$

Quitando factor común (ollo, $A - 5$ non ten sentido, agás que A sexa un número)

$$(A - 5I)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - 5I)^{-1}$

$$X = (A - 5I)^{-1}B$$

Ecuacións matriciais

Consideremos a ecuación matricial

$$AX - B = 5X$$

Pasando B para a dereita e $5X$ para a esquerda

$$AX - 5X = B$$

Quitando factor común (ollo, $A - 5$ non ten sentido, agás que A sexa un número)

$$(A - 5I)X = B$$

Multiplicando pola esquerda por $(A - 5I)^{-1}$

$$X = (A - 5I)^{-1}B$$