INTEGRAL INDEFINIDA

Integración es el proceso contrario a la derivación, es decir, integrar una función consiste en encontrar otra función que tenga por derivada a la anterior.

DEF.- $F(x)$ *es una* ***PRIMITIVA*** *de* $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

Ej: $F(x) = senx$ es una primitiva de $f(x) = cosx$

$F(x) = Lnx$ " " " " $f(x) = \frac{1}{x}$

De la definición, se deduce que si una función tiene una primitiva, entonces tiene infinitas más, ya que si F(x) es una primitiva de f(x), evidentemente F(x)+K también lo es, siendo K una constante.

Ej : $si\ f(x) = x^3$, $F(x) = \frac{x^4}{4} + k$

DEF.- Al conjunto de todas las primitivas de una función f(x) , se llama ***INTEGRAL INDEFINIDA*** y se representa :

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + k}$$

NOTACIÓN : $y' = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow dy = y'dx$

Ej : $en\ C.D\ ;\ y = x^3\ ;\ y' = 3x^2\ ;\ en\ C.I.;\ y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Longrightarrow dy = 3x^2dx$

PROPIEDADES :

a) $\int (f \pm g) = \int f \pm \int g$
b) $\int k \cdot f = k \cdot \int f$

INTEGRALES INMEDIATAS :

1) $\int dx = x + k$; $\int dz = z + k$; $\int du = u + k$
2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$; $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k$ $(n \neq -1)$
3) $\int e^x dx = e^x + k$; $\int e^u du = e^u + k$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{Lna} + k$; $\int a^u du = \frac{a^u}{Lna} + k$

4) $\int \frac{1}{x} dx = Lnx + k$; $\int \frac{1}{u} du = Lnu + k$

5) $\int senxdx = -cosx + k$; $\int senu\,du = -cosu + k$

6) $\int cosxdx = \ senx + k$; $\int cosudu = senu + k$

7) $\int \frac{1}{sen^2x}dx = \ -cotgx + k$; $\int \frac{1}{sen^2u}du = \ -cotgu + k$

8) $\int \frac{1}{cos^2x}dx = tgx + k$; $\int \frac{1}{cos^2u}du = tgu + k$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + k$; $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = arcsenu + k$

10) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + k$; $\int \frac{1}{1+u^2}du = arctgu + k$

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN : aunque hay muchos métodos más, este curso trabajareis con estes :

1) INMEDIATAS o " CASI INMEDIATAS "
2) CAMBIO DE VARIABLE.
3) PARTES $\int udv = u \cdot v - \int vdu$
4) RACIONALES $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, y $gradop(x) < gradoq(x)$

1) INMEDIATAS o CASI INMEDIATAS :

Son casi inmediatas aquellas que mediante transformaciones algebraicas sencillas (poner una raíz en forma de potencia, desarrollar la potencia de un binomio, " romper" una fracción , etc…) se transforman en inmediatas.

Ej: $\int \sqrt[5]{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{5}}dx = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + k$

$\int \frac{3x^4+5x^2+2}{x}dx = \int \left(3x^3 + 5x + \frac{2}{x}\right)dx = 3\frac{x^4}{4} + 5\frac{x^2}{2} + 2Lnx + k$

2) CAMBIO DE VARIABLE:

Se trata de buscar una relación de derivabilidad entre las funciones o "trozos" de funciones que aparecen en la integral, es decir, una función o "trozo" debe coincidir con la derivada de otra función o "trozo", salvo, quizá , una constante. (hay cambios de variables específicos para determinados tipos de funciones, pero no son objetivo de este curso)

Ej : $\int sen^3x\ cosdx =$

$$hacemos\ el\ cambio : u = senx \ \Rightarrow du = cosxdx \ , luego :$$

$$\int sen^3xcosxdx = \int u^3du = \frac{u^4}{4} + k = \frac{sen^4x}{4} + k$$

3) PARTES

$$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv\ \ ;\ \ despejando\ :u\cdot dv=d(u\cdot v)-v\cdot du\,;$$

$$e\ integrando\ los\ dos\ miembros\ :\ \int u\cdot dv=\int (d(u\cdot v)-v\cdot du)\ \ ;\ \ luego:$$

$$\boldsymbol{\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du}$$

Ej: calcular $\int x\cdot cosx\,dx$

$\begin{cases} u=x & \Rightarrow du=dx \\ dv=cosx\,dx & \Rightarrow v=senx \end{cases}$ luego :

$$\int x\cdot cosx\,dx=x\cdot senx-\int senxdx=x\cdot senx+cosx+k$$

NOTAS:

- ✓ Normalmente se suele llamar "u" a las funciones polinómicas, salvo que dv de lugar a una integral no inmediata.
- ✓ $\int vdv$ debe ser más sencilla que la original, y puede ser inmediata, o por cambio de variable , por partes o racional.

Ej : calcular $\int x^3\cdot Lnx\,dx$

$\begin{cases} u=Lnx & \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^3\cdot dx & \Rightarrow v=\frac{x^4}{4} \end{cases}$ luego :

$$\int x^3\cdot Lnxdx=Lnx\cdot x^3-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=Lnx\cdot x^3-\frac{1}{4}\int x^3dx=Lnx\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+k$$

4) RACIONALES $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$ y gradop(x)<gradoq(x)

Hallar las raíces del denominador, o sea , q(x)=0. Entonces puede pasar :

a) **Que tenga raíces reales simples**. Supongamos que son α ; β; λ luego :
$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)}+\frac{C}{(x-\lambda)}$; es decir, se descompone la fracción en fracciones simples (tantas como raíces tenga q(x)). Ahora se calculan las ctes A,B, C y luego se integra , quedando :

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\frac{A}{(x-\alpha)}dx+\int\frac{B}{(x-\beta)}dx+\int\frac{C}{(x-\lambda)}dx=$$

$$=A\cdot Ln(x-\alpha)+B\cdot Ln(x-\beta)+C\cdot Ln(x-\lambda)+k$$

NOTA: si son R.R.S. siempre da Logaritmos neperianos.

Ej : calcular $\int \frac{3x-2}{x^2-1}\,dx$

$x^2-1=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$; $\frac{3x-2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \Longrightarrow A=\frac{1}{2}$; $B=\frac{5}{2}$; luego :

$$\int \frac{3x-2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1/2}{x-1}\,dx + \int \frac{5/2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}Ln(x-1)+\frac{5}{2}Ln(x+1)+k$$

b) Que tenga raíces reales múltiples. Supongamos que las raíces son :α; β ; β ; λ; λ ; λ; o sea $q(x)=0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ raiz real simple} \\ \beta \text{ raíz real doble} \\ \lambda \text{ raíz real triple} \end{cases}$ Entonces :

$$\frac{\mathrm{p(x)}}{\mathrm{q(x)}}=\frac{\mathrm{A}}{(\mathrm{x}-\alpha)}+\frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{x}-\beta)^2}+\frac{\mathrm{C}}{(\mathrm{x}-\beta)}+\frac{\mathrm{D}}{(\mathrm{x}-\lambda)}+\frac{\mathrm{E}}{(\mathrm{x}-\lambda)^2}+\frac{\mathrm{F}}{(\mathrm{x}-\lambda)^3}$$

Es decir, a cada raíz le corresponden tantas fracciones como veces se repita. Una vez calculadas las ctes A; B ; C ; D ; E y F, se integra :

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{A}{(x-\alpha)}\,dx + \int \frac{B}{(x-\beta)^2}\,dx + \cdots \int \frac{F}{(x-\lambda)^3}\,dx$$

Las integrales que se correspondan con las raíces simples, igual que el caso anterior,dan Ln ; las repetidas son potencias con exponentes negativos.

Ej : calcular $\int \frac{1}{x^2-x^3}\,dx$

$$x^2-x^3=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \;\; \text{raiz real simple} \\ x=0 \;\; \text{raiz real doble} \end{cases}$$

$\frac{1}{x^2-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{1-x} \Longrightarrow A=1$; $B=1$; $C=1$; <u>luego :</u>

$\int \frac{1}{x^2-x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx = Lnx + \frac{x^{-1}}{-1} + Ln(1-x) + K$

c) Que tenga raíces complejas simples.

A cada factor cuadrático de la forma ax^2+bx+c que tenga raíces complejas, le corresponde una fracción de la forma :$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ y su integral da un Ln ; un arctg o las dos cosas.

En general : si q(x)=0 $\Longrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ raiz real simple} \\ \beta \text{ raiz real doble} \\ ax^2+bx+c \text{ raices complejas simples} \end{cases}$ luego :

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A}{(x-\alpha)}+\frac{B}{(x-\beta)^2}+\frac{C}{(x-\beta)}+\frac{Dx+E}{ax^2+bx+c}$$

Una vez calculadas las constantes A , B ; C ; D y E , las tres primeras integrales son conocidas y la última $\int \frac{Dx+E}{ax^2+bx+c}dx$ es la que tiene que dar Ln ; arctg o las dos cosas.

Ej : calcular $\int \frac{x+7}{x^2-4x+5}dx$

$$x^2-4x+5=0 \Longrightarrow raíces\ complejas\ simples.$$

$$\int \frac{x+7}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+9}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+5}dx + \int \frac{9}{(x-2)^2+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}Ln(x^2-4x+5)+9arctg(x-2)+k$$

- Si el numerador es de grado ≥ que el denominador, hay que hacer la división de p(x) entre q(x) y quedaría : $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, con lo cual, al integrar ya estaríamos en el caso anterior.
-

Ej : calcular $\int \frac{2x^3-1}{x+3}dx$

Hacemos la división ; luego : $\frac{2x^3-1}{x+3} = 2x^2-6x+18-\frac{55}{x+3} \Longrightarrow$

$$\int \frac{2x^3-1}{x+3}dx = \int (2x^2-6x+18)dx - \int \frac{55}{x+3}dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 18x - 55Ln(x+3) + k$$