MATEMÁTICA 3º ESO 29/05/2014

TEMAS 4 SISTEMAS LINEARES

5 PROGRESIÓNS

TOTAL	SUMA	NOTA
14		

NOME	GRUPO

1	

1. i. Explicar que se entende por solución dun sistema linear e pór algún exemplo.

0.5	

ii. Estudar se $x=3$ e $y=-\frac{1}{4}$ é solución do sistema $\begin{cases} 2x+8y=4 \\ \frac{x}{2}+2y=1 \end{cases}$.

i. Entende-se por solución dun sistema linear o conxunto de valores das incógnitas que fan certas todas as ecuacións que compoñen o sistema.

Por exemplo, para o sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ os valores $x=3$ e $y=1$ son a sua solución, xá que cumpren ambas as condicións: $\begin{cases} 3+1=4 \\ 3-1=2 \end{cases}$.

ii. Substituíndo resulta: $2\cdot 3+8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=6-2=4$ e $\frac{3}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{2}-\frac{2}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Logo os valores dados son solución do sistema.

1	

2. Obter unha solución (x, y) e o valor de termo independente c no sistema $\begin{cases} 2x-3y=c \\ 4x+y=2 \end{cases}$, sabendo que $y=4$.

Para $y=4$, na segunda ecuación resulta $4x+4=2 \Leftrightarrow 4x=2-4=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$.

Substituíndo na primeira ecuación resulta: $2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3\cdot 4=-1-12=-13$, logo a solución é $\left(-\frac{1}{2},4\right)$ e $c=-13$.

1	

3. i. Explicar que se entende por sistema compatíbel e sistema incompatíbel e pór un exemplo de cada tipo.

0.5	

ii. Estudar, sen resolvé-lo, a compatibilidade do sistema $\begin{cases} x-5y=4 \\ 2x-10y=-8 \end{cases}$.

i. Sistema compatíbel é aquel que ten solución. Chama-se sistema compatíbel determinado se a sua solución é única e sistema comnpatíbel indeterminado se a solución é múltiple. Chama-se sistema incompatíbel aquel que non ten solución.

Exemplos

O sistema $\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$ é compatíbel xá que ten polo menos unha solución, que é $x=1$, $y=0$.

O sistema $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=3 \end{cases}$ é incompatíbel xá que non ten solución.

Multiplicando a primeira ecuación por 2 e restando resulta $0=6$, algo que é imposíbel. Polo tanto o sistema non ten solución.

ii. Utilizando o critério dos coeficientes, temos que:

$\frac{1}{2}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{4}{-8}$, polo tanto o sistema é incompatíbel.

1	

4. Resolver o sistema linear $\begin{cases} 2x-\frac{y}{4}=5 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=3 \end{cases}$ utilizando calquer método alxébrico.

Eliminando os denominadores obtemos $\begin{cases} 2x-\frac{y}{4}=5 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-y=20 \\ 2x-3y=18 \end{cases}$.

Multiplicando a segunda ecuación por 4 resulta $\begin{cases} 8x-y=20 \\ 2x-3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-y=20 \\ 8x-12y=72 \end{cases}$; e restando ambas as ecuacións obtemos:

$11y=-52 \Leftrightarrow y=-\frac{52}{11}$

Substituíndo temos: $8x-y=20 \Leftrightarrow x=\frac{20+y}{8}=\frac{20-\frac{52}{11}}{8}=\frac{\frac{220-52}{11}}{8}=\frac{168}{11\cdot 8}=\frac{21}{11}$

Logo a solución é $\left(\frac{21}{11},-\frac{52}{11}\right)$.

2	

5. Resolver graficamente o sistema $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 3x+4y=-3 \end{cases}$.

Resolvendo y en ambas as ecuacións obtemos: $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 3x+4y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6-3x \\ y=\dfrac{-3-3x}{4} \end{cases}$.

Dando valores na primeria ecuación resulta: $x=0 \Rightarrow y=6$ e $x=1 \Rightarrow y=3$, logo os pontos $A(0,6)$ e $B(1,3)$ pertencen á primeira das rectas.

Na segunda ecuación: $x=-1 \Rightarrow y=0$ e $x=3 \Rightarrow y=-3$, logo os pontos $C(-1,0)$ e $D(3,-3)$ pertencen á segunda recta.

As tabelas de valores son:

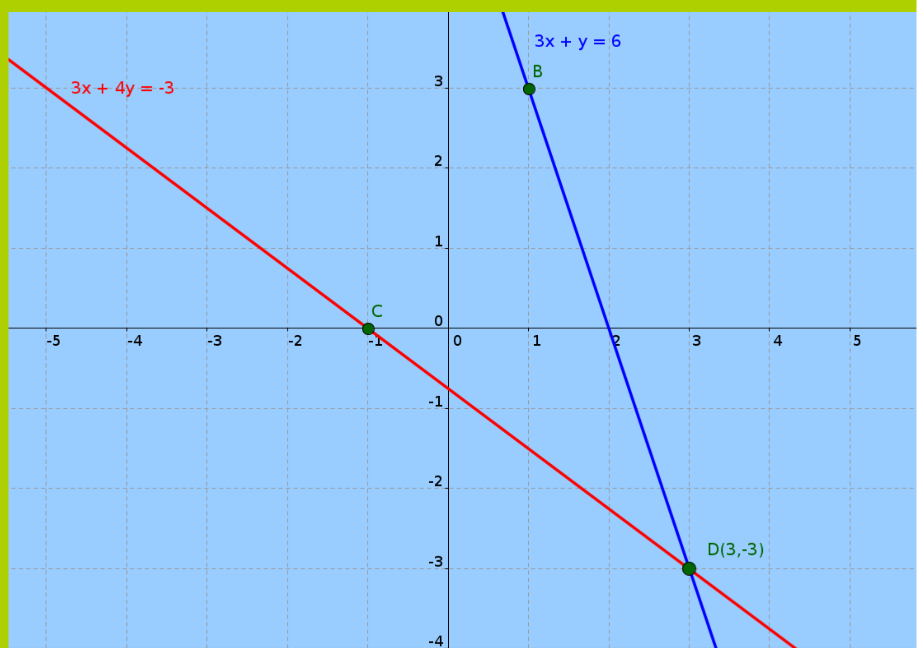
Ecuación $3x+y=6$

x	y
0	6
1	3

Ecuación $3x+4y=-3$

x	y
-1	0
3	-3

A gráfica é:



As rectas cortan-se no ponto $D(3,-3)$ que é a solución do sistema, logo $x=3$, $y=-3$.

2	

6. Por duas multas de tráfico debo pagar $650\,€$, pero se non pago antes de 30 dias, a primeira delas sofre un recargo do $50\,\%$, e teria que pagar en total $820\,€$. Calcular o importe de cada unha delas.

Se chamamos x e y aos importes de cada unha das multas, resulta $x+y=650$.

O recargo na primeira delas supón pagar a multa mais o $50\,\%$, ou sexa $x+\frac{50}{100}\cdot x=\frac{150}{100}\cdot x=\frac{3}{2}\cdot x$, asi que de non pagar pronto, o importe final seria $\frac{3}{2}\cdot x+y=820$.

Logo temos o sistema $\begin{cases} x+y=650 \\ \frac{3}{2}\cdot x+y=820 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x+y=650 \\ 3x+2y=1.640 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=1.300 \\ 3x+2y=1.640 \end{cases}$.

Restando a segunda ecuación e a primeira obtemos $x=340$ e polo tanto $y=650-340=310$.

Asi que as multas serán de $340\,€$ e $310\,€$ respectivamente.

1	

7. i. Escreber os cinco primeiros termos da progresión $a_n=2\cdot 3^{1-n}$ e razoar se é aritmética ou xeométrica. Calcular nese caso a diferenza ou a razón, segundo corresponda.

1	

ii. Obter o termo xeral dunha progresión aritmética tal que o seu terceiro termo é -11 e o décimo é -32 , reducindo ao máximo a expresión resultante.

i. $a_1=2\cdot 3^{1-1}=2\cdot 3^0=2$, $a_2=2\cdot 3^{1-2}=2\cdot 3^{-1}=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $a_3=2\cdot 3^{1-3}=2\cdot 3^{-2}=2\cdot\frac{1}{3^2}=\frac{2}{9}$, $a_4=2\cdot 3^{1-4}=2\cdot 3^{-3}=2\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{2}{27}$ e $a_5=2\cdot 3^{1-5}=2\cdot 3^{-4}=2\cdot\frac{1}{3^4}=\frac{2}{81}$.

Logo é unha progresión xeométrica porque cada termo obtén-se a partir do anterior multiplicando por $\frac{1}{3}$, que é a razón da progresión.

ii. Como $a_3=-11$ e $a_{10}=-32$, podemos obter:

$$a_{10}=a_3+(10-3)\cdot d \;\Leftrightarrow\; -32=-11+7d \;\Leftrightarrow\; -32+11=7d \;\Leftrightarrow\; -21=7d \;\Leftrightarrow\; d=-\frac{21}{7}=-3$$

Ademais $a_3=a_1+2\cdot(-3) \;\Leftrightarrow\; -11=a_1-6 \;\Leftrightarrow\; a_1=-11+6=-5$

Polo tanto o termo xeral é $a_n=-5+(n-1)\cdot(-3)=-5-3n+3=-2-3n$.

2	

8. Obter o termo xeral dunha progresión aritmética sabendo que a suma dos 20 primeiros termos é 240 e a diferenza é $d=4$.

A suma calcula-se coa expresión $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, onde n representa o número total de termos a sumar; logo neste caso seria:

$$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=10\cdot(a_1+a_{20})$$

Sabemos que a suma é 240, logo $240=10\cdot(a_1+a_{20}) \Leftrightarrow a_1+a_{20}=\frac{240}{10}=24$.

Ademais, do termo xeral sabemos que $a_{20}=a_1+(20-1)\cdot d=a_1+19\cdot 4=a_1+76$.

Destas duas ecuacións obtemos o sistema $\begin{cases} a_1+a_{20}=24 \\ a_{20}=a_1+76 \end{cases}$.

Substituíndo a_{20} na primeira ecuación resulta:

$$a_1+a_{20}=a_1+a_1+76=24 \Leftrightarrow 2a_1=-52 \Leftrightarrow a_1=-\frac{52}{2}=-26.$$

Asi que o termo xeral será $a_n=-26+(n-1)\cdot 4$, ou tamén, reducindo a expresión:

$$a_n=-26+(n-1)\cdot 4=-26+4n-4=4n-30$$

1	

9. Interpolar 2 médios xeométricos entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{9}$.

Ao interpolarmos dous termos resulta $a_1=\frac{3}{4}$ e $a_4=\frac{2}{9}$.

Asi, por ser unha progresión xeométrica: $a_4=a_1\cdot r^3 \Leftrightarrow \frac{2}{9}=\frac{3}{4}\cdot r^3 \Leftrightarrow r^3=\frac{2}{9}:\frac{3}{4}=\frac{8}{27} \Leftrightarrow r=\frac{2}{3}$.

Logo os termos son: $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ e $a_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.