Pablo Monteagudo Lago 4°ESO

PROBLEMA Nº 1 QUINCENA DO 6 AO 20 DE OUTUBRO DE 2014

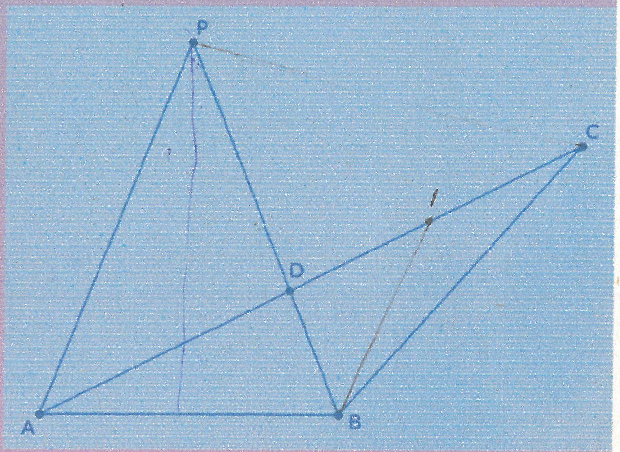
CAMPOS: XEOMETRIA / SEMELLANZA / PROPORCIONALIDADE

DIFICULDADE: MÉDIA

Extraído de "Desafíos de Geometría 2", Joaquín Hernández Gómez e Juan Jesús Donaire Moreno, Ed. Nívola, 2008

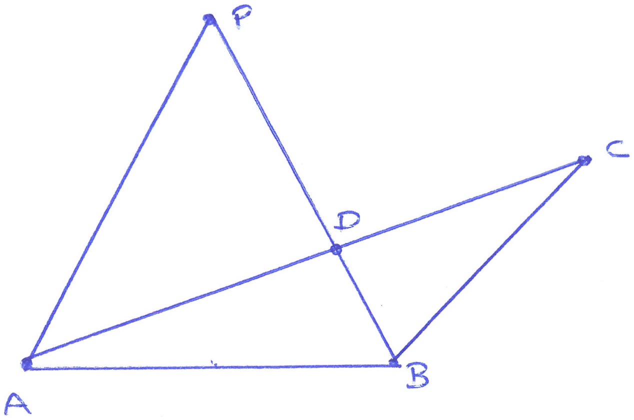
ENUNCIADO

Dados os triángulos *ABP* e *ABC*, calcular o valor do produto $AD \cdot CD$ sabendo que o vértice *P* é equidistante a *A* e *B*, que o ángulo *APB* é duplo de *ACB*, e que os segmentos *PB* e *PD* miden *3* e *2* respectivamente.



RESOLUCIÓN RETO MATEMÁTICO Nº1

FIGURA INICIAL



DATOS:

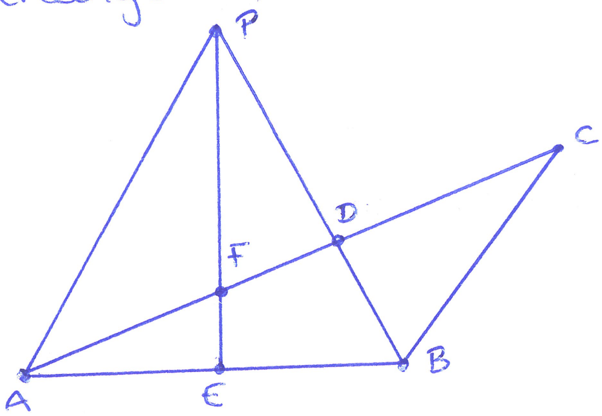
$AP = PB$

$\widehat{APB} = 2\,\widehat{ACB}$

$PB = 3$

$PD = 2$

Dada a figura inicial do problema, trazamos a altura do triángulo APB tomando ~~ba~~ como base o lado AB. Xa que este é un triángulo isósceles, debido a que ten dous lados iguais, esta altura caerá no punto medio do lado AB (punto E) dividindo o triángulo en dous triángulos rectángulos iguais.



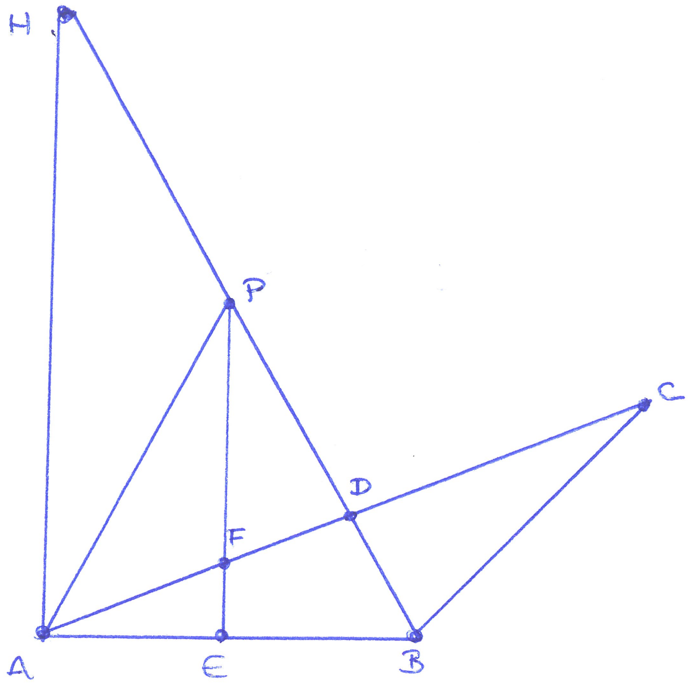
Ao punto no que a altura corta ao segmento AD denominarémolo F.

O triángulo FPD é semellante ao triángulo DCB xa que teñen todos os ángulos iguais, o que se demostra da seguinte forma.

- Sabemos que o ángulo $\widehat{DCB}$ é a metade do ángulo $\widehat{APB}$. ~~pero~~. O lado PF coincide ca altura PE que divide o ángulo en dous iguales: $\widehat{APE} = \widehat{EPB}$ (xa que o triángulo é isósceles) e ~~polo tanto ao dividir $\widehat{APB}$ en dúas metades ol sabemos~~ e polo tanto o ángulo $\widehat{EPD}$ ~~será~~ (a metade de $\widehat{APB}$) será igual ao ángulo $\widehat{DCB}$ (tamén a metade de $\widehat{APB}$).
- O ángulo $\widehat{PDF}$ é igual ao ángulo $\widehat{BDC}$ xa que son dous ángulos opostos polo vértice.
- Xa que $\widehat{EPD} = \widehat{DCB}$ e $\widehat{PDF} = \widehat{BDC}$ sabemos tamén que $\widehat{PFD} = \widehat{DBC}$ e polo tanto, como os ángulos son iguais, os triángulos son semellantes.

Agora creamos outro triángulo chamado ADH, cuxo lado AH sexa paralelo a PF e compartindo o ángulo oposto ao este lado. ~~e polo tanto coloca~~ colocándoos de forma que estén en posición de Tales, o que nos indica que son semellantes.

Excelente idea



Como ambos triángulos son semellantes e polo tanto, tamén semellantes ao triángulo DCB, podemos establecer a seguinte relación:

$$\frac{DH}{AD} = \frac{DC}{DB} \Leftrightarrow AD \cdot CD = DB \cdot DH$$

Como: $DB = PB - PD$ e $PB = 3$ e $PD = 2$ entón

$$DB = 3 - 2 = 1$$

Substituíndo na fórmula anterior:

$$AD \cdot CD = 1 \cdot DH \Leftrightarrow AD \cdot CD = DH$$

E agora precisamos obter a lonxitude do lado DH.

Para iso, construímos un triángulo semellante a EPB. Este triángulo será AHB. Como ambos triángulos están en posición de Tales, deducimos que son semellantes.

Sabendo esto podemos establecer a seguinte relación:

$$\frac{HB}{PB} = \frac{AB}{EB}$$

Como sabemos que o punto E está dividindo o segmento AB en dúas partes iguais, sacamos a seguinte relación sabendo que $AE = EB$

$AB = AE + EB \Leftrightarrow AB = EB + EB \Leftrightarrow AB = 2EB$

Substituíndo agora na fórmula que relacionaba os triangulos AHB e EPB:

$$\frac{HB}{PB} = \frac{AB}{EB} \Leftrightarrow \frac{HB}{PB} = \frac{2EB}{EB} \Leftrightarrow HB = 2PB$$

~~Sabendo agora o valor~~

Como $PB = 3$

$$HB = 2 \cdot 3 = 6$$

Sabendo agora o valor de HB volvemos a fórmula obtida anteriormente:

$AD \cdot CD = DH$

Dado que:

$DH = HB - DB$

e sabemos que

$HB = 6$ e $DB = 1$

entón o valor de DH é:

$DH = HB - DB \Leftrightarrow DH = 6 - 1 = 5$

E a través desto atopamos substituíndo na fórmula o valor de AC·DC:

$AC \cdot DC = DF \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{AC \cdot DC = 5}$$