PROBLEMA Nº 1 QUINCENA DO 6 AO 20 DE OUTUBRO DE 2014

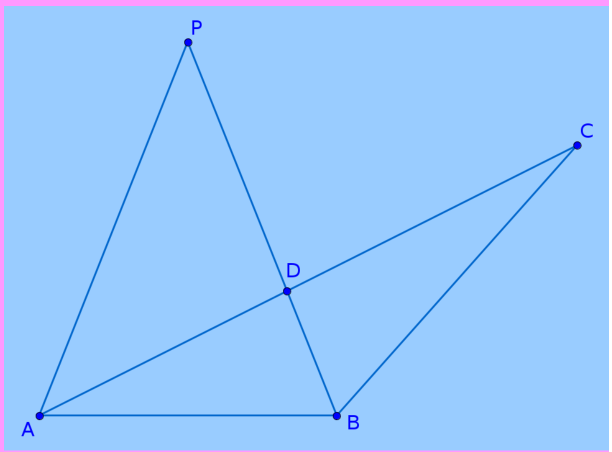
CAMPOS: XEOMETRIA / SEMELLANZA / PROPORCIONALIDADE

DIFICULDADE: MÉDIA

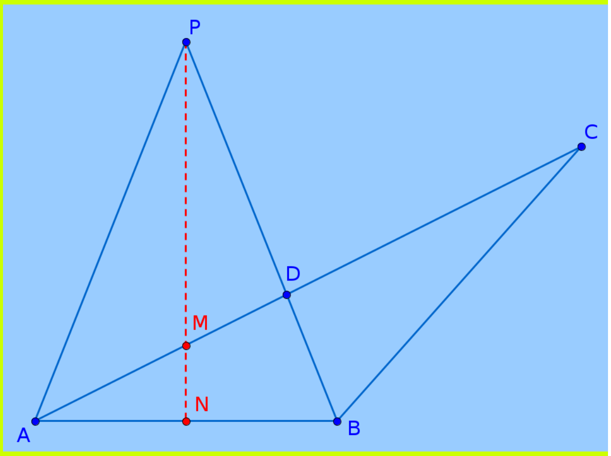
Extraído de "Desafíos de Geometría 2", Joaquín Hernández Gómez e Juan Jesús Donaire Moreno, Ed. Nívola, 2008

ENUNCIADO

Dados os triángulos ABP e ABC , calcular o valor do produto $AD \cdot CD$ sabendo que o vértice P é equidistante a A e B, que o ángulo APB é duplo de ACB, e que os segmentos PB e PD miden 3 e 2 respectivamente.



RESOLUCIÓN



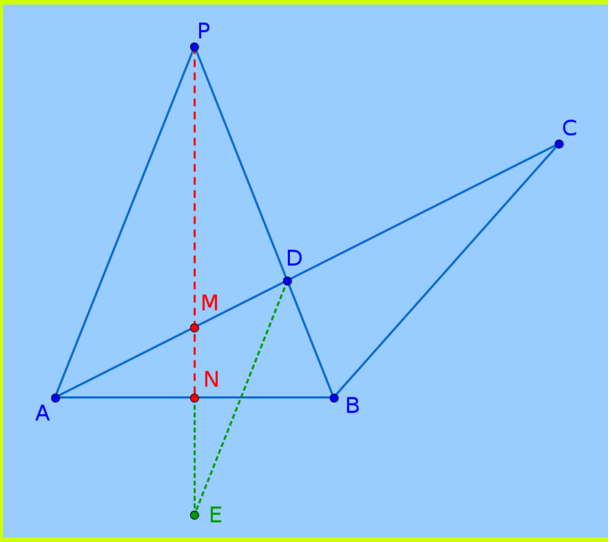
Sexa PN a altura do triángulo isóscele ABP sobre o lado AB e sexa M o ponto interseción de AC e PN.

Os triángulos MPD e BCD son semellantes por teren dous dos seus ángulos iguais: $MDP=BDC$ por seren opostos polo vértice e $MPD=\frac{1}{2}APB=DCB$ polo próprio enunciado do problema.

Logo os lados homólogos son proporcionais, asi que $\frac{MD}{DB}=\frac{PD}{DC} \Leftrightarrow MD\cdot DC=DB\cdot PD$. [1]

Como $PB=PD+DB$ e $PD=2$, $DB=PB-PD=1$, e deste xeito na expresión [1] obtemos:

$MD\cdot DC=DB\cdot PD=1\cdot 2=2$ [2]



Trazando por D unha paralela a AP e sinalando o ponto E , interseción desta paralela coa prolongación da bisectriz PN , obtemos que os triángulos APM e DEM son semellantes, asi que $\frac{AP}{AM}=\frac{ED}{MD}$.

Mas o triángulo DPE é isóscele, asi que $PD=ED$ e polo tanto $\frac{AP}{AM}=\frac{ED}{MD}=\frac{PD}{MD}$.

Da proporción $\frac{AP}{AM}=\frac{PD}{MD}$ podemos concluir que:

$$AP\cdot MD=PD\cdot AM \Rightarrow 3\cdot MD=2\cdot AM=2\cdot(AD-MD) \Rightarrow 5\cdot MD=2\cdot AD \Rightarrow MD=\frac{2}{5}AD$$

E finalmente substituindo na expresión [1] resulta $\frac{2}{5}AD\cdot DC=2 \Rightarrow AD\cdot DC=\frac{2\cdot 5}{2}=5$.

SOLUCIÓN

$AD\cdot DC=5$