DOMINIOS DE DEFINICIÓN

El dominio de definición de una función es el conjunto de todos los originales, es decir, los números de partida, los que tienen una y solo una imagen.

Ejemplo 1:

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$$

La imagen de cada original x, se calcula sustituyendo x por su valor, en la expresión analítica de la función.

En este caso, las cuentas que hay que hacer con cada valor de x son: sumas, restas, multiplicaciones y potencias de exponente positivo.

Todas ellas, son cuentas que existen y dan un único resultado para cada valor de x.

Por lo tanto todos los números tienen imagen y además una única imagen. Entonces:

$$D = R$$

Ejemplo 2:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 4}$$

En este caso, las cuentas que se indican en el numerador y las que se indican en el denominador, siempre existen, pues de nuevo son sumas, restas, multiplicaciones y potencias de exponente positivo.

Pero, finalmente hay que dividir los dos resultados, y la división no siempre existe.

No existe la división entre cero.

Si tratásemos de hallar la imagen de 2, nos encontramos con:

$$\frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 - 4} = \frac{4 - 8 + 1}{4 - 4} = \frac{-3}{0}\ esta\ operación\ no\ existe$$

Por lo tanto los números x, tales que 2x – 4 sea igual a cero, no tendrán imagen por esta función. Pero dichos números son las soluciones de la ecuación:

$$2x - 4 = 0 \ \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

Entonces, únicamente el 2 no tiene imagen, el resto de los números sí.

$$D = R - \{2\}$$

Ejemplo 3:

$$f(x) = \frac{2x+5}{3x^3+6x^2-3x-6}$$

Aunque estamos en la misma situación que en el ejemplo 2, no es tan evidente averiguar los números que no tienen imagen.

Pero el razonamiento, es el mismo, son aquellos números x tales que $3x^3+6x^2-3x-6$ es igual a cero.

Por lo tanto para averiguar los números que no tienen imagen, tendremos que resolver la ecuación:

$$3x^3+6x^2-3x-6=0$$

Y hemos aprendido a resolver ecuaciones. En este caso debemos factorizar e igualar a cero cada factor.

$$3x^3+6x^2-3x-6=0 \qquad 3\cdot 1^3+6\cdot 1^2-3\cdot 1-6=3+6-3-6=0$$

$$1 \; es \; raíz$$

	3	6	-3	-6
1		3	9	6
	3	9	6	0

$$(x-1)(3x^2+9x+6)=0$$

$$(x-1)\cdot 3\cdot(x^2+3x+2)=0$$

$$x-1=0 \qquad x^2+3x+2=0$$

$$x=1 \qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\begin{cases}\dfrac{-3+1}{2}=-1\\[2mm] \dfrac{-3-1}{2}=-2\end{cases}$$

Entonces el 1, el -1 y el -2, son las soluciones de la ecuación y por lo tanto los números que hacen que el denominador sea cero. En consecuencia no tienen imagen, por no existir la división entre cero. El resto de los números no son solución de la ecuación, y por lo tanto tienen imagen.

$$D = R - \{1,-1,-2\}$$

Ejemplo 4:

$f(x) = \sqrt[4]{-2x + 6}$

En este caso, la única cuenta que no existe, es la raíz de índice 4 de un número negativo, pues un número multiplicado por sí mismo cuatro veces da, como resultado, un número positivo o cero.

Entonces sólo se podrá calcular la imagen de aquellos valores de x tales que -2x+6 sea positivo o cero.

En consecuencia, tendrán imagen los números x que cumplan la inecuación:

$$-2x + 6 \geq 0$$

Dado que hemos aprendido a resolver inecuaciones de primer grado:

$$-2x + 6 \geq 0$$
$$-2x \geq -6$$
$$x \leq \frac{-6}{-2}$$
$$x \leq 3$$
$$x \in (-\infty, 3]$$

$Entonces \quad D = (-\infty, 3]$

Ejemplo 5:

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4}$

Estamos en el mismo caso que en el ejemplo anterior, tendrán imagen los valores de x tales que $-x^2 + 4$ sea mayor o igual a cero.

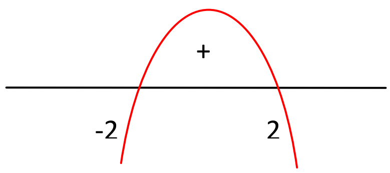
En consecuencia, tendrán imagen los números x que cumplan la inecuación:

$$-x^2 + 4 \geq 0$$

Dado que hemos aprendido a resolver inecuaciones de segundo grado:

$$-x^2 + 4 = 0$$
$$4 = x^2$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

La parábola corta al eje OX en



$Solución \quad x \in [-2,2] \quad Entonces \quad D = [-2,2]$

Ejemplo 6:

$f(x) = \log_3(x^2 - x - 6)$

En este caso, la única cuenta que no existe es el logaritmo de negativo y de cero, pues una potencia de base positiva nunca puede dar cero ni negativo.

Entonces sólo se podrá calcular la imagen de aquellos valores de x tales que $x^2 - x - 6$ sea positivo.

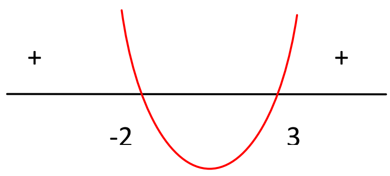
En consecuencia, tendrán imagen los números x que cumplan la inecuación:

$$x^2 - x - 6 > 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

La parábola corta al eje OX en los puntos (-2,0) y (3,0)



$Solución\ x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty) \quad Entonces \quad D = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

Ejemplo 7:

$f(x) = \log_3(3x - 9)$

Estamos en el mismo caso que en el ejemplo anterior, tendrán imagen los valores de x tales que $3x - 9$ sea mayor que cero.

En consecuencia, tendrán imagen los números x que cumplan la inecuación:

$$3x - 9 > 0$$

$$3x - 9 > 0$$
$$3x > 9$$
$$x > \frac{9}{3}$$
$$x > 3$$
$$x \in (3, +\infty)$$

$Entonces \ D = (3, +\infty)$

RESUMEN

NO EXISTE LA DIVISIÓN ENTRE CERO

$$\nexists \quad \frac{N}{0}$$

NO EXISTEN LAS RAÍCES DE ÍNDICE PAR Y RADICANDO NEGATIVO

$$\nexists \quad \sqrt[PAR]{NEGATIVO}$$

NO EXISTEN LOS LOGARITMOS DE CERO NI DE NEGATIVO

$$\nexists \quad \log_a 0 \quad Y \quad \nexists \quad \log_A NEGATIVO$$

 # EJERCICIO: Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

$a)\quad f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-2x-3}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ $\qquad c)\quad f(x)=3^{\sqrt{-x^2+9}}$

$d)\quad f(x)=\log_2(x^2-2x+1)$ $\qquad e)\quad f(x)=\sqrt{2x-4}$ $\qquad f)\quad f(x)=\log_3(-x+1)$

$g)\quad f(x)=\sqrt[4]{-x^2+x+2}$ $\qquad h)\quad f(x)=\log_3(-x+5)$ $\qquad i)\quad f(x)=\dfrac{2x^3+3x}{x^3-4x^2-11x+30}$

$j)\quad f(x)=3x^4-4x^2+5$ $\qquad k)\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2-5x+6}$ $\qquad l)\quad f(x)=\sqrt{x^2-4}$

$ll)\quad f(x)=\log_5(-2x^2+4)$ $\qquad m)\quad f(x)=\sqrt{2x+1}$ $\qquad n)\quad f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$

$ñ)\quad f(x)=\sqrt[6]{-2x+4}$ $\qquad o)\quad f(x)=\dfrac{2}{(x-1)(x+3)}$ $\qquad p)\quad f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3-7x^2+10x}$

$q)\quad f(x)=x^3+3x^2$ $\qquad r)\quad f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-8x+7}$ $\qquad s)\quad f(x)=\sqrt{-3x-1}$

$t)\quad f(x)=\log(2x^2-4x+5)$ $\qquad u)\quad f(x)=\sqrt{-x^2+6x-8}$ $\qquad v)\quad f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3+6x^2+5x-12}$