

ÁLGEBRA

VIII.- PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES

CONCEPTOS:

En la resolución de problemas se deben seguir los siguientes pasos:

- Leer detenidamente el enunciado, tantas veces como haga falta. Recurrir al diccionario para las palabras que nos sean desconocidas.
- Anotar los datos de forma ordenada (tabla, gráfica, diagrama, esquema, etc.).
- Identificar las incógnitas, adjudicando a cada una de ellas una letra distinta (x, y, z, etc.).
- Construir para cada dato una ecuación que relacione el dato con las incógnitas, traduciendo a lenguaje algebraico la condición descrita en el enunciado.
- Resolver el sistema por el método más adecuado (el de menor complejidad).
- Comprobar resultados.
- Interpretar la solución con palabras, adjudicando a los resultados las unidades que correspondan. Deshechar aquellas soluciones que carezcan de sentido físico en el problema.

EJEMPLOS:

1. Luis y Paloma están jugando una partida de ajedrez. Si Luis se come una ficha más, les quedará a los dos el mismo número de fichas; pero si es Paloma la que se come una ficha de Luis, se quedará con el doble que él. ¿Cuántas fichas tienen en este momento cada uno?.

Jugador	n° de fichas iniciales	Luis come ficha	Paloma come ficha
Luis	x	x	x-1
Paloma	y	y-1	y

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x = y - 1 \\ y = 2 \cdot (x - 1) \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ y = 2x - 2 \end{array} \right\} \quad - \quad \left. \begin{array}{l} x - y = -1 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\} \\
 \hline
 -x \quad = -3 \rightarrow x = 3 \qquad 3 - y = -1 \rightarrow y = 4
 \end{array}$$

Solución: Luis tenía 3 fichas y Paloma tenía 4 fichas.

2. Juan tiene doble número de camisas que Javier, y regala dos a éste para quedarse ambos con la misma cantidad, ¿cuántas camisas tiene finalmente cada chico?.

Personaje	n° de camisas iniciales	Juan regala 2 camisas a Javier
Juan	x	x-2
Javier	y	y+2

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x = 2y \\ x - 2 = y + 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x - y = 4 \end{array} \right\} \quad - \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ x - y = 4 \end{array} \right\} \\
 \hline
 -y = -4 \rightarrow y = 4 \qquad x - 2 \cdot 4 = 0; x - 8 = 0 \rightarrow x = 8
 \end{array}$$

Solución: Juan tenía 8 camisas y Javier seis camisas.

3. Una empresa de autocares para excursiones dispone de dos clases de coches: unos de 40 y otros de 50 asientos. Son en total 24 coches con 1110 plazas. Averigua el número de autocares de cada clase.

Tipo de autobús	n° de autobuses	n° de plazas totales
de 40 asientos	x	40x
de 50 asientos	y	50y

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x + y = 24 \\ 40x + 50y = 1110 \end{array} \right\} \rightarrow x = 24 - y \quad \left. \begin{array}{l} 40 \cdot (24 - y) + 50y = 1110 \\ 10y = 1110 - 960 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 960 - 40y + 50y = 1110 \\ 10y = 1110 - 960 \end{array} \right\} \\
 \hline
 10y = 150 \rightarrow y = 15 \qquad x = 24 - 15 \quad ; \quad x = 9
 \end{array}$$

Solución: La empresa tiene 9 autocares de 40 plazas y 15 autocares de 50 plazas.

4. Un número está formado por dos cifras que suman 7. Si se invierte el orden de las cifras, el número que resulta es 27 unidades mayor que el primero. ¿De qué número se trata?.

Sea el número buscado xy ($y =$ unidades ; $x =$ decenas):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 10y + x = 10x + y + 27 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y = 7 \\ 9y - 9x = 27 \end{array} \rightarrow x = 7 - y$$

$$9y - 9 \cdot (7 - y) = 27 \quad ; \quad 9y - 63 + 9y = 27 \quad ; \quad 18y = 90 \rightarrow y = 5$$

$$x = 7 - 5 \quad ; \quad x = 2$$

Solución: el número pedido es 25 ($52 = 25 + 27$).

5. Los dos términos de una fracción suman 8. Si se le restará 1 al denominador y se le sumara 1 al numerador, los dos términos serían iguales. ¿Cuál es la fracción?.

Sea la fracción buscada $\frac{x}{y}$ ($x =$ numerador ; $y =$ denominador):

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ y - 1 = x + 1 \end{array} \right\} + \left. \begin{array}{l} x + y = 8 \\ -x + y = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2y = 10 \rightarrow y = 5 \\ x + 5 = 8 \rightarrow x = 3 \end{array}$$

Solución: la fracción pedida es $\frac{3}{5}$.

6. La densidad del alcohol puro es 0,79 kg./litro y la del agua 1 kg./litro. Si tenemos un alcohol cuya densidad es de 0,86 kg./litro, ¿qué proporción de alcohol puro y de agua contiene?

Supongamos que hemos preparado una mezcla de alcohol y agua de 100 litros (da igual el volumen pues se desea saber la proporción, no la cantidad exacta). Puesto que:

$$densidad = \frac{masa}{volumen} \rightarrow masa = densidad \cdot volumen$$

la mezcla de 10 litros pesará, por tanto:

$$m_{mezcla} = 0.86 \frac{kg}{lt} \cdot 100 (lt) = 86 (kg)$$

Sean:

$$x = n^{\circ} \text{ litros de agua} \rightarrow m_{agua} = 1 \left(\frac{kg}{lt} \right) \cdot x (lt) = x (kg)$$

$$y = n^{\circ} \text{ litros de alcohol} \rightarrow m_{alcohol} = 0.79 \left(\frac{kg}{lt} \right) \cdot y (lt) = 0.79y (kg)$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 100 \\ x + 0.79y = 86 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y = 100 \\ x + \frac{79}{100}y = 86 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y = 100 \\ 100x + 79y = 8600 \end{array} \right\} \rightarrow y = 100 - x$$

$$100x + 79 \cdot (100 - x) = 8600 \quad ; \quad 100x + 7900 - 79x = 8600$$

$$21x = 8600 - 7900 \quad ; \quad 21x = 700 \quad ; \quad x = \frac{700}{21} = \frac{100}{3}$$

$$y = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$$

$$proporción: \frac{alcohol}{agua} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}} = \frac{200}{100} = 2$$

Solución: la mezcla se ha preparado mezclando 2 partes de alcohol por cada una de agua.

7. Juan, el padre de Ana, tiene ahora 3 veces la edad de su hija, pero hace 5 años la edad de Juan era 4 veces la de Ana. ¿Qué edades tienen Ana y Juan?.

	Hoy	Hace 5 años
Juan	x	x-5
Ana	y	y-5

$$\left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x - 5 = 4 \cdot (y - 5) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x - 5 = 4y - 20 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 3y \\ x - 4y = -15 \end{array} \right\} 3y - 4y = -15 \quad ; \quad -y = -15 \rightarrow y = 15 \quad x = 3 \cdot 15 = 45$$

Solución: En la actualidad el padre tiene 45 años y su hija 15 años.

8. Se desea mezclar vino de 5'50 euros/lit. Con otro de 4 euros/lit., de modo que la mezcla resulte a 4'50 euros/lit. ¿Cuántos litros de cada clase hay que mezclar para obtener 300 litros de la mezcla?.

Sean:

$$x: n^{\circ} \text{ lts. de vino de } 5.50 \text{ €/lt} \quad y: n^{\circ} \text{ lts. de vino de } 4 \text{ €/lt.}$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 300 \\ 5.50x + 4y = 300 \cdot 4.50 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y = 300 \\ 5.50x + 4y = 1350 \end{array} \right\} \xrightarrow{-10} \left. \begin{array}{l} x + y = 300 \\ 55x + 40y = 13500 \end{array} \right\} \xrightarrow{-55} \begin{array}{l} 55x + 55y = 16500 \\ - 55x + 40y = 13500 \\ \hline 15y = 3000 \end{array} \rightarrow y = \frac{3000}{15} = 200$$

$$x + 200 = 300 \rightarrow x = 100$$

Solución: Se han mezclado 100 litros de vino de 5.50 €/lt con 200 litros de vino de 4 €/lt.

9. Un número de tres cifras es capicúa, y sus cifras suman 13. Si la cifra de las decenas supera en 7 la de las centenas, ¿de qué número se trata?

Sea xyz el número buscado (x =centenas ; y =decenas ; z =unidades). Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x = z \text{ (capicúa)} \\ x + y + z = 13 \\ y = x + 7 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + x + 7 + x = 13 \\ 3x + 7 = 13 \\ 3x = 6 \rightarrow x = 2 = z \end{array} \right\} \quad y = 2 + 7 ; y = 9$$

Solución: El número pedido es 292

10. La suma de las edades de tres hermanos es 18. Además, el mayor tiene doble edad que el mediano y la diferencia entre las edades de los dos pequeños es la quinta parte de la edad del mayor. Calcula las edades de los tres hermanos.

Sean: x = edad mayor y = edad mediano z =edad menor

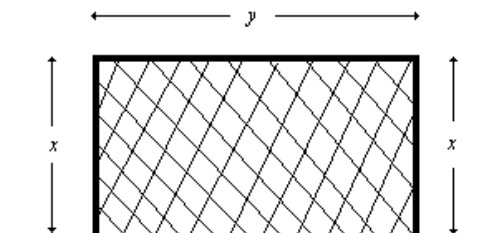
Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x = 2y \\ y - z = \frac{x}{5} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 18 \\ x = 2y \\ 5y - 5z = x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2y + y + z = 18 ; 3y + z = 18 \\ 5y - 5z = 2y ; 3y - 5z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3y + z = 18 \\ - 3y - 5z = 0 \\ \hline 6z = 18 \rightarrow z = 3 \end{array}$$

$$3y - 5 \cdot 3 = 0 ; 3y = 15 \rightarrow y = 5 \quad x = 2 \cdot 5 = 10$$

Solución: El mayor tiene 10 años, el mediano 5 años y el pequeño 3 años.

11. En el marco de un portería de fútbol reglamentaria, el larguero mide 4,88 m más que cada poste, y las longitudes de los dos postes y el larguero suman 12,20 m. Hallar el largo y el alto de la portería



$$\left. \begin{array}{l} y = x + 4.88 \\ y + 2x = 12.20 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y - x = 4.88 \\ y + 2x = 12.20 \end{array} \right\} \xrightarrow{-100} \begin{array}{l} 100y - 100x = 488 \\ - 100y + 200x = 1220 \\ \hline -300x = -732 \end{array} \rightarrow x = \frac{732}{300} = 2.44 \quad y = 2.44 + 4.88 = 7.32$$

Solución: Los postes miden 2'44 m y el larguero 7'32 m.

12. El producto de dos números es -15 y su diferencia 8. Hallarlos.

Sean: x: primer número y: segundo número

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot y = -15 \\ x - y = 8 \end{array} \right\} \rightarrow x = 8 + y \quad \begin{array}{l} (8+y) \cdot y = -15 ; \\ y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-8 \pm 2}{2} = \begin{cases} -3 \\ -5 \end{cases} \end{array}$$

para $y = -3 \rightarrow x = 8 + (-3) = 5$
para $y = -5 \rightarrow x = 8 + (-5) = 3$

Solución: $5y - 3$ ó $3y - 5$

13. El cociente exacto de dos números es 3 y su producto es 48. ¿Qué números son?.

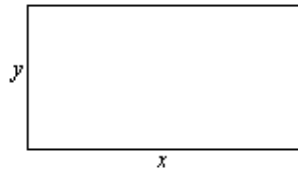
Sean: x: primer número y: segundo número

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = 3 \\ x \cdot y = 48 \end{array} \right\} \rightarrow x = 3y \quad \begin{array}{l} 3y^2 = 48 ; \\ y^2 = \frac{48}{3} ; \\ y^2 = 16 ; \\ y = \pm 4 \end{array}$$

para $y = -4 \rightarrow x = 3 \cdot (-4) = -12$
para $y = 4 \rightarrow x = 3 \cdot 4 = 12$

Solución: 12 y 4 ó -12 y -4

14. Halla las dimensiones de un rectángulo de 64 cm de perímetro y 240 cm² de área.



$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 64 \\ x \cdot y = 240 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x + y = 32 \\ x \cdot y = 240 \end{array} \rightarrow y = 32 - x$$

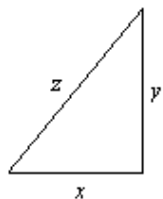
$$\begin{array}{l} x \cdot (32 - x) = 240 ; \\ 32x - x^2 = 240 ; \\ x^2 - 32x + 240 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 240}}{2 \cdot 1} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 960}}{2} = \frac{32 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{32 \pm 8}{2} = \begin{cases} 20 \\ 12 \end{cases}$$

para $x = 20 \rightarrow y = 32 - 20 = 12$
para $x = 12 \rightarrow y = 32 - 12 = 20$

Solución: el rectángulo es de 20×12 m.

15. Halla las medidas de los tres lados de un triángulo rectángulo de área 30 cm², sabiendo que sus catetos suman 17 cm. (Sol.: catetos 5 y 12 cm; hipotenusa 13 cm)



$$\left. \begin{array}{l} \frac{x \cdot y}{2} = 30 \\ x + y = 17 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right\} \rightarrow y = 17 - x \quad \begin{array}{l} x \cdot y = 60 \\ x \cdot (17 - x) = 60 ; \\ 17x - x^2 = 60 ; \\ x^2 - 17x + 60 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2} = \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$$

Para $x = 12 \rightarrow y = 17 - 12 = 5$
Para $x = 5 \rightarrow y = 17 - 5 = 12$

Los catetos son 12 y 5 cm. La hipotenusa valdrá: $z^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \rightarrow z = \sqrt{169} = 13$ cm

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1. Un comerciante vende 84 pantalones vaqueros a dos precios distintos: unos a 45 euros y otros a 36 euros, obteniendo de la venta 3105 euros. ¿Cuántos pantalones vendió de cada clase?
2. En un video club se alquilan películas en video a 3 euros/día y películas en DVD a 4 euros/día. Al finalizar un día se han alquilado 110 películas cobrando por ellas 470 euros en total. Determinar cuántas películas se alquilaron de cada tipo.
3. Una empresa aceitera ha envasado 3000 lts. de aceite en 1200 botellas de dos y de cinco lts. ¿Cuántas botellas de cada clase se ha utilizado?.
4. Un jurado está compuesto por hombres y mujeres. El número de mujeres es igual al doble de hombres menos 4. Con dos mujeres menos, el jurado tendría el mismo número de hombres que de mujeres. ¿Cuántos hombres y mujeres había inicialmente?.
5. Halla las edades de dos personas, sabiendo que hace 10 años la edad de la primera era 4 veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera será sólo el doble.
6. Se dispone de dos clases de café. ¿Cuántos kilogramos se han mezclado de cada clase, a razón de 105 y 125 pesetas el kilogramo, respectivamente, para obtener otra de 120 pesetas el Kilogramo, si de la clase mejor se han tomado 20 Kg. más que de la otra?.
7. La gasolina de 95 octanos cuesta 80 céntimos y la de 98 octanos cuesta 90 céntimos. Se mezclan ciertas cantidades de ambos tipos hasta obtener 100 litros. Determina dichas cantidades sabiendo que el litro de mezcla cuesta 0'87 euros.
8. Averigua las edades de tres hermanos, Luis, Antonio y Ana, sabiendo que Luis y Antonio suman 25 años; Antonio y Ana suman 28 años y Luis y Ana suman 33 años.
9. La suma de las edades de 3 personas es 100 años. Hallar dichas edades sabiendo que la mediana tiene 10 años más que la menor y que hace 10 años la mayor tenía cuádruple edad que la menor.
10. Una madre y sus dos hijos tienen en total 60 años. El hijo mayor tiene 3 veces la edad del menor, y la madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. Hallar las edades de cada uno.
11. Calcula los ángulos de un triángulo sabiendo que es la mitad del otro y que el tercero es la cuarta parte de la suma de los dos primeros.
12. Hallar dos números que sumen 18 y cuyos cuadrados sumen 234.
13. Descompón el número 12 en dos sumandos tales que el cuadrado del primero más el doble del segundo dé 29.
14. Hallar dos números que sumen 18 y cuyos cuadrados sumen 234.
15. Hallar dos números cuyos cuadrados suman 20 y sus inversos $\frac{3}{4}$.
16. El zócalo de una habitación de 30 m^2 tiene una longitud de 22 m. Hallar las dimensiones de la habitación.
17. Hallar las dimensiones de una parcela rectangular sabiendo que su área es 1250 m^2 . y que para cercarlo se requieren 150 m. de valla.