PROBABILIDADE

1) EXPERIMENTO ALEATORIO. ESPACIO MOSTRAL ASOCIADO.

1.1 Concepto de ***experimento aleatorio*** : aqueles experimentos que ó repetilos en análogas condicións non se pode predecir o resultado en cada nova proba ou realización.

Š ***Exemplos***:

Lanzar unha moeda e anotar o resultado da cara superior (cara ou cruz)
Extraer unha carta dunha baralla

Experimento determinista : ó repetilos en análogas condicións producen sempre o mesmo resultado

Š ***Exemplos:***

Tirar unha pedra no vacío e medir a aceleración da caída
Medir a lonxitude dunha circunferencia de radio 5

1.2 Espacio mostral. Suceso elemental

Espacio mostral : conxunto de tódolos posibles resultados dun experimento aleatorio (tamén universo ou colectivo) , denótase normalmente por E

Suceso elemental : cada un dos posibles resultados dun experimento aleatorio, cada un dos elementos que forman o espacio mostral.

Š ***Exemplo*** :

Lanzar un dado e anotar o resultado da cara superior. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sucesos elementais: {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}

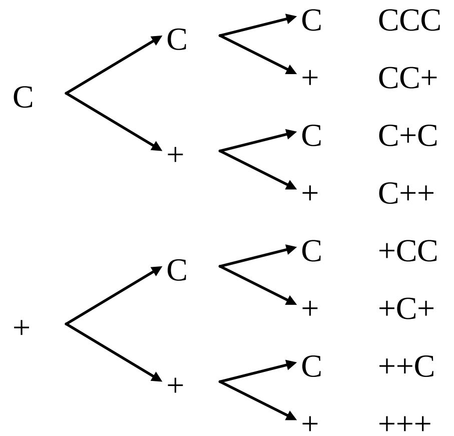
Š ***Exemplo*** :

Lanzar unha moeda e anotar o resultado da cara superior, cara (C) ou cruz (+).
E = {C, +}   Sucesos elementais : {C}→ "sae cara", {+}→ "sae cruz"

Š ***Exemplo*** :

Lanzar tres moedas e anotar o resultado das caras superiores.
E = {CCC, CC+, C+C, +CC, C++, ++C, +++}. Sucesos elementais : {CCC}→ "1ª, 2ª, e 3ª cara" {CC+}→ "1ª cara, 2ª cara, 3ª cruz". {C+C}, {+CC}………
Para construi-lo espacio mostral podemos usar un ***diagrama en árbore***

<u>1ª moeda</u>   <u>2ª moeda</u>   <u>3ª moeda</u>



1.3 ***Sucesos aleatorios*** dun experimento aleatorio: cada un dos subconxuntos do espacio mostral

Espacio de sucesos : conxunto de tódolos posibles sucesos dun experimento aleatorio (**S**)

Un ***suceso A se realiza ou se verifica*** cando ó realizar unha proba do experimento aleatorio conseguimos como resultado un dos ***puntos mostrais*** ou elementos que forman A. ***Suceso imposible*** : o que nunca se realiza **(∅)**. ***Suceso seguro*** (ou certo): o que se realiza sempre, formado por tódolos resultados posibles , coincide co espacio mostral **E**. ***Suceso contrario ou complementario*** dun suceso A : o que se verifica cando non se verifica A **(** $\overline{A}$ **).** ***Suceso composto*** : formado por máis dun punto mostral.

Š ***Exemplo***:

Lanzar unha moeda e anota-lo resultado da cara superior: E = {C,+}. Sucesos : {+} {C}, ∅→ suceso imposible "non sae cara **e** non sae cruz".{C +}→ "sae cara **ou** sae cruz", sería suceso seguro. O espacio de sucesos : S = {∅, {C}, {+}, {C, +}}

Š ***Exemplo*** :

Lanzar un dado e anota-lo resultado da cara superior. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

S = { {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6}, {3,4}, {3,5}, {3,6}, {4,5}, {4,6}, {5,6} {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,2,6}, {1,3,4}, {1,3,5},{1,3,6}, {1,4,5}, {1,4,6}, {1,5,6}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,3,6}, {2,4,5}, {2,4,6}, {2,5,6},{3,4,5}, {3,4,6}, {3,5,6}, {4,5,6}, {1,2,3,4}, {1,2,3,5}, {1,2,3,6}, {1,2,4,5}, {1,2,4,6},{1,2,5,6}, {1,3,4,5}, {1,3,4,6},{1,3,5,6} {1,4,5,6} {2,3,4,5}, {2,3,4,6}, {2,3,5,6},{2,4,5,6}, {3,4,5,6}, {1,2,3,4,5}, {1,2,3,4,6}, {1,2,3,5,6}, {1,2,4,5,6}, {1,3,4,5,6},{2,3,4,5,6}, {1,2,3,4,5,6}, ∅ }

- O número de elementos de S é 2^n onde n é o número de elementos do espacio mostral E. En xeral o número de subconxuntos dun conxunto de n elementos é 2^n
- O complementario do suceso imposible é o suceso seguro : $\overline{\varnothing}$ = **E**
- O complementario do suceso seguro é o suceso imposible : $\overline{\mathbf{E}}$ = ∅
- **Suceso seguro** E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}→ "sae 1, **ou** 2, **ou** 3, **ou** 4, **ou**, 5 **ou**, 6"
- O **suceso imposible** podería estar representado por " **non** sae 1, **e**, **non** sae 2, **e**, **non** sae 3, **e**, **non** sae 4, **e**, **non** sae 5, **e**, **non** sae 6", é o mesmo que : "non sae 1, nin 2, nin 3, nin 4, nin 5, nin 6"
- **Sucesos elementais** : {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}
- Se sae 1, ou 2, ou 3 **verifícase** o suceso {1,2,3}. Se sae un 4 **non se verifica** o suceso {1,2,3}, pero si o suceso {4,5,6}→ "sae 4 **ou** 5 **ou** 6"
- **Sucesos compostos** : {1,2}, {2,3,5,6},……..
- "**Sae número par**"→ A = {2, 4, 6}, o seu **complementario** $\overline{A}$ **=** {1, 3, 5}→"**sae número impar**"
- "**Sae múltiplo de tres**"→ B = {3, 6}, o seu **complementario** $\overline{B}$ = {1, 2, 4, 5}→ "**non sae múltiplo de tres**"
- Outros sucesos : "**sae nº primo**"→ D = {2, 3, 5}. "**Sae múltiplo de 5**"→ {5}

1.4 Operacións con sucesos. Propiedades. Diferencia de sucesos. Sucesos incompatibles

O ***suceso A está contido no suceso B*** , A ⊂ B, se sempre que se realiza A se realiza B

Š *<u>Exemplo</u>*:

Lanzamos un dado e anotamo-lo resultado da cara superior.A = {2,4,6}$\rightarrow$ "sae múltiplo de 2". B = {1,2,4,6}$\rightarrow$ " sae 1 ou nº par". Entón $A \subset B$, sempre que sae múltiplo de 2 sae un 1 ou un nº par

Se $\mathbf{A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}}$ Neste mesmo exemplo $\overline{\mathbf{B}}$ = {3,5} $\subset$ $\overline{\mathbf{A}}$ = {1,3,5,6}

Dados dous sucesos A e B, o ***<u>suceso A unión B</u>***, ***<u>$A \cup B$</u>***, é o suceso que se realiza cando se realizan A **ou** B, é decir cando se realiza **polo menos un dos dous**

Dados dous sucesos A e B, o suceso ***<u>A intersección B</u>***, ***<u>$A \cap B$</u>***, é o suceso que se realiza cando se realizan **A e B simultáneamente**. Se a intersección se realiza, entón realízase a unión

Dados dous sucesos ***<u>A e B son incompatibles</u> se <u>$A \cap B = \varnothing$</u>*** (non hai nada en común entre os dous)

Son ***<u>compatibles</u> se <u>$A \cap B \neq \varnothing$</u>.*** Dados dous sucesos A e B defíneses a ***<u>diferencia de sucesos</u> $A-B = A \cap \overline{B}$.*** Os elementos de A que non están en B, quitar de A os elementos de B

Š ***<u>Exemplos</u>*** :

Lanzar un dado e anotar o resultado da cara superior. Sexan A = "sae par", B = " sae impar", C = "Sae múltiplo de tres". Entón **A = {2,4,6}, B = {1,3,5}, C = {3,6}**.

$A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}$\rightarrow$ "sae par **ou** impar", coincide neste caso con E

$A \cap B$ = $\varnothing \rightarrow$ "sae par **e** impar", neste caso é o suceso imposible, serían sucesos incompatibles. **$A \cap C$ =** {6}$\rightarrow$ " sae par **e** múltiplo de tres", neste caso son compatibles

A-C = {2, 4}$\rightarrow$ "sae par **e non** múltiplo de tres", **A-B** = {2,4,6}, neste caso coincide con A.

<u>Propiedades das operacións</u>

	UNIÓN	INTERSECCIÓN
1. Asociativa	$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
2. Conmutativa	$A\cup B = B\cup A$	$A\cap B = B\cap A$
3. Idempotente	$A\cup A = A$	$A\cap A = A$
4. Simplificativa	$A\cup(B\cap A) = A$	$A\cap(B\cup A) = A$
5. Distributiva	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
6. Todo suceso A do espacio de sucesos S ten un contrario, complementario, $\overline{\mathbf{A}}$ que verifica $\mathbf{A\cup \overline{A} = E}$ **e** $\mathbf{A\cap \overline{A} = \varnothing}$		

Cando dúas operacións verifican as propiedades anteriores decimos que forman unha estructura de **Álxebra de Boole**, no noso caso de sucesos. Outras propiedades son :

•**Elemento ínfimo** $\rightarrow \varnothing$, o suceso imposible, verifica : $\mathbf{A\cup\varnothing = A}$ e $\mathbf{A\cap\varnothing = \varnothing}$, para todo A

•**Elemento Universal**$\rightarrow$ **E** , o suceso seguro, verifica : $\mathbf{A\cup E = E}$ e $\mathbf{A\cap E = A}$**,** para todo A

•<u>Leis de Morgan</u> :

a) $\overline{\mathbf{A\cup B}} = \overline{\mathbf{A}}\cap\overline{\mathbf{B}}$ ***. O complementario da unión é a intersección dos complementarios***

b) $\overline{\mathbf{A\cap B}} = \overline{\mathbf{A}}\cup\overline{\mathbf{B}}$ ***. O complementario da intersección é a unión dos complementarios***

Š ***<u>Exemplos</u>*** :

Lanzar un dado e anotar o resultado da cara superior. A = {2, 4, 6}$\rightarrow$ " sae par"

B = {3, 6}$\rightarrow$ "sae múltiplo de tres". $A\cup B$ = {2, 3, 4, 6} $\overline{\mathbf{A\cup B}}$ = {1, 5}. $\overline{\mathbf{A}}$ = {1, 3, 5}

$\overline{\mathbf{B}}$ = {1, 2, 4, 5}. $\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$ = {1, 5}. Sería un exemplo dunha das leis de Morgan

---

•Definición $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ son un ***sistema completo de sucesos*** se :
1º) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup A_n = E$ 2º) Son incompatibles dous a dous

Š ***Exemplo*** :
No experimento de lanzar un dado e anotar o resultado da súa cara superior:
$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{4\}$, $A_5 = \{5\}$, $A_6 = \{6\}$ Son un sistema completo
Tamén : $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$, $A_3 = \{6\}$

2) PROBABILIDADE

2.1 Frecuencia relativa e absoluta dun suceso

Se realizamos un **experimento** aleatorio **n** veces, e un suceso **A** preséntase **k** veces decimos que a ***frecuencia absoluta*** do suceso A é k, **f (A) = k**, e a ***frecuencia relativa do suceso*** A é **h (A) =** $\mathbf{\frac{k}{n}}$

Š ***Exemplo*** :
Lanzo 6 veces consecutivas unha moeda e consigo : C, +, +, C, +, +
A = "sae cara", B = "sae cruz". f (A) = 2. h (A) = 2/6 = 1/3
f (B) = 4. h (B) = 4/6 = 2/3

Propiedades : **1) $0 \le f(A) \le n$**
2) Se **A e B incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$) $\Rightarrow$ **$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$**
3) f (E) = n. A frecuencia absoluta do suceso seguro é n
4) $0 \le h(A) \le 1$
5) Se **A e B incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$) $\Rightarrow$ **$h(A \cup B) = h(A) + h(B)$**
6) h (E) = 1

2.2 Probabilidade como límite de frecuencias

A frecuencia relativa tende a estabilizarse en torno a un número, a medida que o nº de probas do experimento crece indefinidamente, a este número chamarémoslle probabilidade do suceso. (Este resultado coñécese como a lei dos grandes números)

Š ***Exemplo*** :
Se realizamos o experimento aleatorio lanzar unha moeda 10 veces e anotamos a frecuencia relativa de "sae cara", repetimos 20 veces máis o experimento e anotamos de novo a frecuencia relativa, e así continuamente, aumentando o número de probas, veremos que a frecuencia relativa achégase cada vez máis a 1/2 . (O mesmo pasaría con "sair cruz")

2.3 Definición axiomática da Probabilidade. Propiedades.

• Chámase ***probabilidade*** a unha **aplicación P** definida no espacio de sucesos, S, e que **a cada suceso A** faille corresponder **un número real P (A)** , que verifica os seguintes **axiomas**:
AX.1 Para todo A de **S** **$P(A) \ge 0$** (A probabilidade de calquera suceso é positiva ou nula)

AX.2 Se ***A*** e ***B*** son ***incompatibles*** ($A \cap B = \emptyset$) $\Rightarrow$ ***P (A∪B) = P (A) + P (B)***. Se son incompatibles a probabilidade da unión é a suma das probabilidades

AX.3 **P (E) = 1**. (A probabilidade do suceso seguro é 1)

• ***Propiedades***

1) $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Demostración : $1 \underset{AX.3}{=} P(E) \underset{1.4}{=} P(A \cup \overline{A}) \underset{AX.2}{=} P(A) + P(\overline{A})$

A probabilidade dun suceso é 1 menos a probabilidade do seu complementario

2) $P(\emptyset) = 0$. Demostración : $P(\emptyset) \underset{1.4}{=} P(\overline{E}) \underset{PROP\ 1}{=} 1 - P(E) \underset{AX.3}{=} 1 - 1 = 0$

A probabilidade do suceso imposible é cero

3) Se **$A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$**. Se un suceso está contido en outro a súa probabilidade é menor ou igual.

4) Para calquera suceso A **$P(A) \le 1$**. Demostración : $A \subset E \underset{PROP\ 3}{\Rightarrow} P(A) \le P(E) \underset{AX.3}{=} 1$

A probabilidade dun suceso sempre é un número entre 0 e 1

5) Se ***A*** e ***B*** son ***compatibles*** ($A \cap B \neq \emptyset$) entón ***$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$***

6) O Axioma 2 xeralízase se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **incompatibles 2 a 2** :
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

7) A propiedade 5 xeralízase **$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$**

8) $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$. Deduciríase da propiedade 5

9) $P(A \cap B) \le P(A) + P(B)$. Tamén da 5

2.4 REGRA DE LAPLACE

Se o espacio mostral E pode descompñerse en **n** posibles sucesos equiprobables e incompatibles entre si, e deles **h** son favorables á realización dun certo suceso B entón a probabilidade deste suceso B é

$$\boxed{P(B) = \frac{h}{n} = \frac{\text{número de casos favorables a B}}{\text{número de casos posibles}}}$$

É aplicable na gran maioría dos casos

Š ***Exemplo*** :

Lanzamos un dado e anotámo-lo resultado da súa cara superior, A = “sae nº impar”
B = “sae múltiplo de 3”, C = “sae múltiplo de 5”, D = “sae par”.

a) P (A) d) P (D) g) $P(\overline{B})$
b) P (B) e) $P(A \cup B)$
c) P (C) f) $P(C \cup D)$

•Estamos nas condicións da Regra de Laplace. O espacio mostral E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} podo descompoñelo en 6 sucesos equiprobables e incompatibles P ({1}) = P ({2}) = P ({3}) = P ({4}) =
= P ({5}) = P ({6}) = 1/6 xa que é lóxico pensar que se o dado non está trucado tódalas caras terán a mesma probabilidade de sair

a) A = {1, 3, 5} P (A) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 3/6 =1/2

•Tamén podería pensar que A = {1,2,3} = {1}∪{2}∪{3} entón pola propiedade 6 , xa que son incompatibles , nun lanzamento do dado se sae 1 non pode sair 2 ou tres, P (A) = P ({1}) + P ({2}) + P ({3}) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2

b) B = {3,6} P (B) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 2/6 =1/3

c) C = {5} P (C) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 1/6

d) D = {2,4,6} P (D) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 3/6 = 1/2

e) P (A∪B) = P ({1,3,5,6}) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 4/6 = 2/3

•Como **A** = {1,3,5} e **B** = {3,6} son **compatibles,** (**A∩B** = {3} ≠ ∅), pola propiedade 5 tamén podería pensar **P (A∪B) = P (A) + P (B)-P (A∩B)** = 3/6 + 2/6 -1/6 = 4/6 =2/3 onde a probabilidade en cada sumando está calculada usando a Regra de Laplace

f) Como **C** = {5}e **D** = {2,4,6} son **incompatibles** , (**C∩D =** ∅), polo axioma 2 podería pensar
P (C∪D) = P (C) + P (D) = 1/6 +3/6 = 4/6 = 2/3 onde a probabilidade en cada sumando está calculada usando a Regra de Laplace

•Tamén directamente P (C∪D) = P ({2,4,5,6}) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 4/6 = 2/3

•Nótese que **C** e **D** son **incompatibles** pero **non complementarios** (para selo a súa unión tería que ser o espacio mostral E)

g) P ($\overline{B}$) = 1-P (B) = 1-P (B) = 1-2/6 = 4/6= 2/3 onde P (B) está calculada usando a Regra de Laplace.

•Tamén directamente P ($\overline{B}$) = P ({1,2,4,5}) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 4/6 = 2/3

Š ***<u>Exemplo</u>*** :

Probabilidade de que ó lanzar unha moeda tres veces consigamos "polo menos unha cara" ("al menos unha cara", é decir unha , dúas ou tres caras) . Sempre que apareza esta frase é **<u>moi útil pasar ó suceso complementario</u>**. **A = "polo menos unha cara"** entón $\overline{\mathbf{A}}$ **= "ningunha cara"**

P(A) = 1-P($\overline{\mathbf{A}}$ **)** = 1-1/8 = 7/8 ,xa que casos favorables a ningunha cara só hai un ,tres cruces, e casos posibles neste experimento aleatorio hai 8 como comprobamos no segundo exemplo de **1.2** cando construimo-lo seu espacio mostral

•Tamén directamente usando o espacio mostral P (A) = $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 7/8

Š ***<u>Exemplo</u>*** :

Lanzar dous dados e anota-la suma das caras superiores. Espacio mostral :
E = {S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12}} onde S_i = "suma i", i = 2,…,12
Agora non son equiprobables S_2 = {(1,1)}→ "1 no primeiro e 1 no segundo"
S_4 = {(3,1),(2,2),(1,3)}, non é o mesmo "1 no primeiro e 3 no segundo" que "3no primeiro e 1 no

segundo". P $(S_2) = \dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 1/36 xa que hai 36 resultados posibles neste experimento : do 1 ó 6 para o primeiro dado e para cada un destes outros 6, para o segundo en total 6x6 = 36.($VR_{6,2}$)

P $(S_4) = \dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 3/36, xa que hai 3 casos favorables a suma 4

3) PROBABILIDADE CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES.

3.1 ***Probabilidade condicionada*** do suceso **B** respecto do suceso **A** :

$$\boxed{\mathbf{P\,(B|_A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}} \text{ se } P(A) > 0}$$ *Probabilidade do suceso B condicionado polo suceso A*

Análogamente *Probabilidade de A condicionado por B*: $\boxed{\mathbf{P\,(A|_B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}} \text{ se } P(B) > 0}$

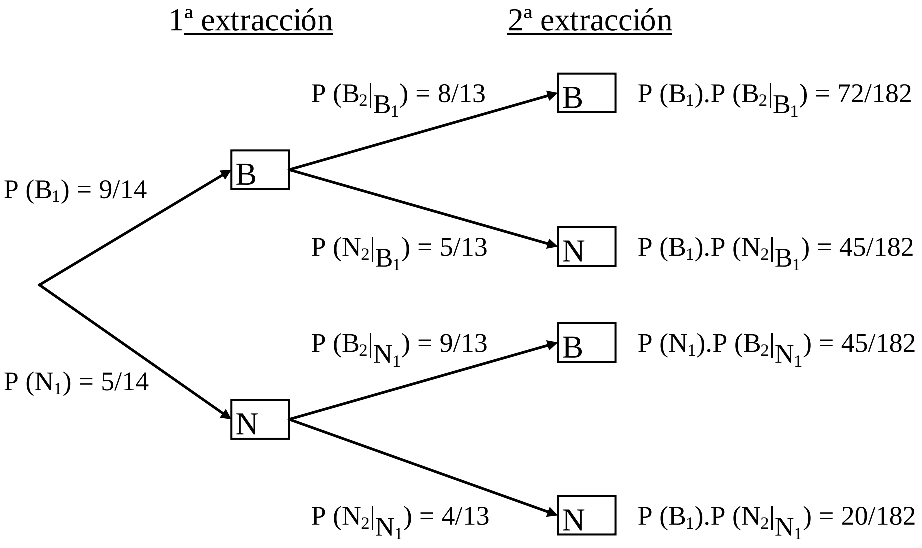
Das dúas relacións dedúcense as seguintes
Expresións para a *probabilidade da intersección*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{P\,(A\cap B) = P\,(A)*P\,(B|_A) \text{ se } P\,(A) > 0} \\ \mathbf{P\,(A\cap B) = P\,(B)*P\,(A|_B) \text{ se } P\,(B) > 0}\end{array}}$$

Š ***Exemplo*** :

Dunha caixa con 9 bolas brancas e 5 negras extraemos sucesivamente , sen reemprazamento, 2 bolas. Calcula a probabilidade de : a) a 1ª é branca **e** a 2ª é negra
b) **Unha** branca **e unha** negra

É moi útil un diagrama en árbore para esquematizar nel os distintos casos e as súas probabilidades **B_1 = "sacar a 1ª bola branca", B_2 = "sacar a 2ª bola branca", N_1 = "sacar a 1ª bola negra", N_2 = "sacar a 2ª bola negra"**.



Tódalas probabilidades do diagrama están calculadas usando : $\dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ e tendo en conta que despois da 1ª extracción queda unha bola menos dentro da caixa, xa que non hai reemprazamento e os casos posibles pasan a ser 13 en vez dos 14 iniciais. Esta bola de menos pode ser branca ou negra polo que tamén poden ser menores os casos favorables a cada suceso dependendo do resultado da 1ª extracción.

a) Piden **$P(B_1 \cap N_2)$** = $P(B_1) * P(N_2|_{B_1})$ = 9/14∗5/13 = 45/182. É decir : a **2ª rama do diagrama**

b) Pode ser "1ª branca **e** 2ª negra" **ou** "1ª negra **e** 2ª branca" , é decir piden :

$P[(B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2)$ = $P(B_1) * P(N_2|_{B_1}) + P(N_1) * P(B_2|_{N_1})$ =

= 9/14∗5/13 +5/14∗9/13 = 90/182 = 45/91 . En definitiva piden a **suma da 2ª e 3ªrama do diagrama**

3.2 Sucesos dependentes e independentes. Probabilidade da intersección.

Dous ***sucesos A e B son independentes*** se $\boxed{P(B) = P(B|_A)}$

Dous ***sucesos A e B son dependentes*** se $\boxed{P(B) \neq P(B|_A)}$

A partir das igualdades anteriores dedúcese:

$\boxed{\textit{A e B son independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B).}$ ***A probabilidade da intersección é igual ó producto das probabilidades***. En caso contrario son dependentes.

Š ***Exemplo*** :

Sacamos dúas cartas dunha baralla española . ¿ Cal é a probabilidade de sacar dous ases ?

a) Con devolución

b) Sen devolución

A_1 = "As na 1º extracción", A_2 = "As na 2ª extracción"

a) $P(A_2|_{A_1}) = P(A_2)$ xa que debido á devolución a composición da baralla é a mesma polo tanto sacar as na 2ª extracción non depende para nada de sacar as na 1ª. Entón :

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cap P(A_2)$ = 4/40∗4/40 = 1/100 xa que neste caso:

$P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{\textbf{casos favorables}}{\textbf{casos posibles}}$ = 4 (ases) / 40 (cartas)

b) Agora son dependentes xa que cambia a composición da baralla. Entón :

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) * P(A_2|_{A_1})$ = Probabilidade de sacar as na 1ª por Probabilidade de sacar as na 2ª sabendo que o saquei na 1ª = 4/40∗3/39 = 1/130

Definición :

Tres sucesos ***A, B e C son independentes*** cando **verifican simultáneamente** :

1) $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$
2) $P(A \cap C) = P(A) * P(C)$
3) $P(B \cap C) = P(B) * P(C)$
4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B) * P(C)$

•A propiedade $P(A \cap B) = P(A) * P(B|_A)$ se $P(A) > 0$ xeralízase a 3 sucesos así:

$P(A \cap B \cap C) = P(A) * P(B|_A) * P(C|_{A \cap B})$ se $P(A) > 0$.

•En xeral: Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son n sucesos independentes nun mesmo experimento aleatorio e ales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$ entón temos :(***TEOREMA DA PROBABILIDADE COMPOSTA***)

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) * P(A_2|_{A_1}) * P(A_3|_{A_1 \cap A_2}) * \ldots * P(A_n|_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}})}$$

Exemplo :

Extraemos tres cartas (sen devolución) dunha baralla española. Probabilidade de sacar tres ases

A_1 = "As na 1º extracción", A_2 = "As na 2ª extracción", A_3 = "As na 3ª extracción"

Piden $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_2 | A_1) * P(A_3|_{A_1 \cap A_2}) = 4/40 * 3/39 * 2/38$

$P(A_2 | A_1)$ = Probabilidade de sacar a segunda carta as sabendo que a primeira saquei as" = 3/39 xa que hai un caso posible menos (unha carta menos) e un caso favorable menos (a carta de menos é un as)

3.3 TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL.

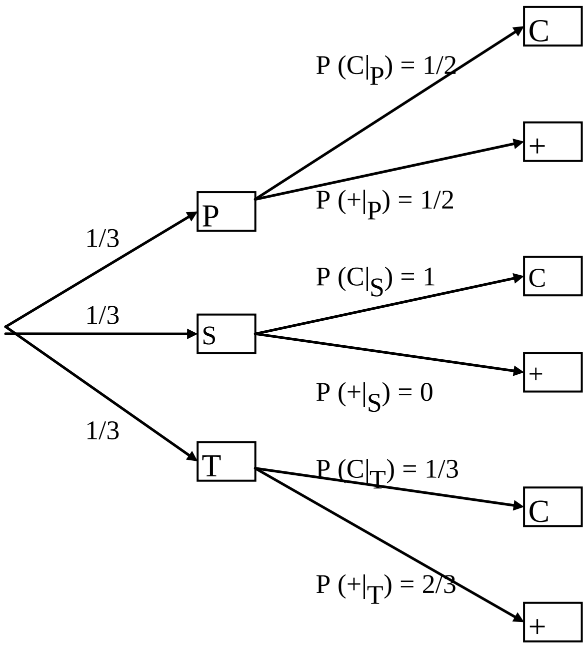
Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un **sistema completo de sucesos** (incompatibles 2 a2 e a unión de todos eles é o espacio mostral ou suceso seguro) tales que $\mathbf{P(A_i) \neq 0}$ $i = 1, \ldots, n$. Sexa B un suceso para o que **coñecemos** $\mathbf{P(B|_{A_i})}$ $i = 1, \ldots, n$.

<u>Entón</u> $$\boxed{P(B) = P(A_1) * P(B|_{A_1}) + P(A_2) * P(B|_{A_2}) + \ldots\ldots + P(A_n) * P(B|_{A_n})}$$

Š ***Exemplo***

Unha caixa ten tres moedas P; S, T, a primeira é normal, a segunda ten cara polos dous lados e a terceira está trucada de tal xeito que a probabilidade de sair cara é 1/3. Escollemos unha moeda ó azar e a tiramos. ¿Probabilidade de sair cara?.

P = "escollo P", S = "escollo S", T= "escollo T" (son os A_i do teorema)
C = "sae cara" (é o B do teorema) . Sei as $P(C|_{A_i})$ probabilidades de sair cara según a moeda que resulte escollida , e como escollo ó azar P(P) = P (S) = P (T) = 1/3 xa que podo supoñer que teño a mesma probabilidade de escoller unha calquera delas



Piden $P(C) = P(C \cap P) + P(C \cap S) + P(C \cap T) = P(C) * P(C|_P) + P(S) * P(C|_S) + P(T) * P(C|_T) =$
$= 1/3 * 1/2 + 1/3 * 1 + 1/3 * 1/3 = 11/18$

P (sair cruz) = 1-P (sair cara) = 1-11/18 = 7/18

3.3 TEOREMA DE BAYES

Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un **sistema completo de sucesos** (incompatibles 2 a 2 e a unión de todos eles é o espacio mostral ou suceso seguro) tales que $\mathbf{P(A_i) \neq 0}$ $i = 1, \ldots, n$. Sexa B un suceso para o que **coñecemos** $\mathbf{P(B|A_i)}$ $i = 1, \ldots, n$.

Entón : $$\mathbf{P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)\cdot P(B|A_n)}}$$

ou escrito así : $$\boxed{\mathbf{P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i)}}}$$ as $\mathbf{P(A_i|B)}$ son probabilidades "a posteriori"

Š ***Exemplo***

No exemplo anterior, escollemos unha moeda ó azar lanzámola e observamos que sae cara. ¿Cal é a probabilidade de que a moeda escollida fose a trucada ?

Piden $$P(T|C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{P(T)\cdot P(C|T)}{P(P)\cdot P(C|P) + P(S)\cdot P(C|S) + P(T)\cdot P(C|T)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = 8/99$$

3.5 Experimento composto

Formado por varios experimentos simples.

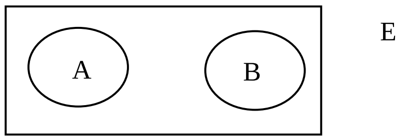
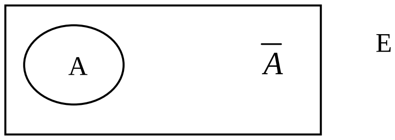
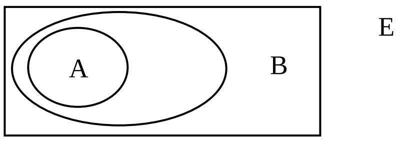
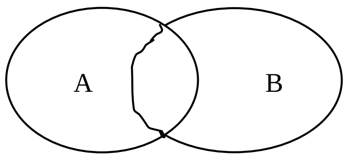
Š ***Exemplo***

Lanzar un dado e unha moeda

E1 = {1,2,3,4,5,6}, E2 = {C,+}. Espacios mostrais simples

E = {(1,C), (1,+), (2,C), (2,+),…………., (6,C), (6,+)}. Espacio mostral composto.

PROBABILIDADE

DEFINICIÓN	**É unha aplicación (función) do espacio de sucesos S no corpo dos números reais, que cumple os seguintes axiomas** :
AXIOMAS	1. $P(A) \geq 0$
	2. $P(E) = 1$
	3. $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$ Se A e B son incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) 
OUTRAS PROPIEDADES	1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ 
	2. $P(\varnothing) = 0$
	3. Se $A_1, A_2, ..., A_n$, son incompatibles dous a dous entón $P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$
	4. $P(A - B) \equiv P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
	5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ En concreto $P(B) = P(A) + P(B - A)$ 
	6. $P(A) \leq 1$
	7. $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$ A e B compatibles ($A \cap B \neq \varnothing$) 
	REGRA DE LAPLACE : $P(A) = \dfrac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles}$ **LEIS DE MORGAN** : $\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$ $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$

PROBABILIDADE EN EXPERIMENTOS COMPOSTOS

Experimento aleatorio formado por varios experimentos aleatorios simples, ou que se pode descompoñer en varios experimentos máis simples

<table>
<tr><td colspan="2">Probabilidade condicionada</td><td>$\mathbf{P\,(A|_B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ se P (B) > 0</td><td>$\mathbf{P\,(B|_A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$ se P (A) > 0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">TEOREMAS</td><td rowspan="2">COMPOSTA
(No caso de 2 sucesos)</td><td colspan="2">$\mathbf{P\,(A \cap B) = P(A) * P(B)}$
Se A e B independentes, é dicir $P(A|_B) = P(A)$ e $P(B|_A) = P(B)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{P\,(A \cap B) = P\,(A) * P\,(B|_A)}$ se P (A) > 0
$\mathbf{P\,(A \cap B) = P\,(B) * P\,(A|_B)}$ se P (B) > 0
Se A e B dependentes</td></tr>
<tr><td>PROBABILIDADE TOTAL</td><td colspan="2">Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos (incompatibles 2 a 2 e a unión de todos eles é o espacio mostral ou suceso seguro) tales que $\mathbf{P\,(A_i) \neq 0}$ $i = 1, \ldots, n$. Sexa B un suceso para o que coñecemos $\mathbf{P(B|_{A_i})}$ $i = 1, \ldots, n$.

<u>Entón</u> :
$\mathbf{P\,(B) = P\,(A_1) * P\,(B|_{A_1}) + P(A_2) * P(B|_{A_2}) + \ldots\ldots + P(A_n) * P(B|_{A_n})}$</td></tr>
<tr><td>BAYES</td><td colspan="2">TEOREMA DE BAYES
Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos (incompatibles 2 a 2 e a unión de todos eles é o espacio mostral ou suceso seguro) tales que $\mathbf{P\,(A_i) \neq 0}$ $i = 1, \ldots, n$. Sexa B un suceso para o que coñecemos $\mathbf{P(B|_{A_i})}$ $i = 1, \ldots, n$.

Entón :

$\mathbf{P\,(A_i|_B) = \dfrac{P\,(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P\,(A_1) \cdot P\,(B|A_1) + P\,(A_2) \cdot P\,(B|A_2) + \ldots\ldots + P\,(A_n) \cdot P\,(B|A_n)}}$

ou escrito así $\boxed{\mathbf{P\,(A_i|_B) = \dfrac{P\,(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\,(A_i) \cdot P(B|A_i)}}}$ as $\mathbf{P\,(A_i|_B)}$ son probabilidades “a posteriori”</td></tr>
</table>

PROBLEMAS.

1) Xoán e Pedro lanzan unha pelota a un branco. A probabilidade de que Xoán dea no branco é 1/3, e a probabilidade de que dea Pedro é de 1/4 . Supóñase que Xoán lanza primeiro e que os dous rapaces vanse turnando para lanzar.
a) Calcula a probabilidade de que o primeiro lanzamento que dea no branco sexa o segundo de Xoán.
b) ¿Cal é a probabilidade de que Xoan dea o branco antes de que o faga Pedro?.

2) Nunha cidade publícanse tres periódicos: X, Y, Z. Sábese que o 60% das familias están subscritas ó periódico X, o 40% ó periódico Y, e o 30% a Z. Ademáis o 20% está subscrito ós periódicos X e Y, o 10% a X e Z, o 20% a Y e Z e o 5% ós tres. Pídese:
a) Porcentaxe de familias que están subscritas polo menos a un periódico.
b) Porcentaxe de familias que están subscritas só ó periódico X.
c) Se unha familia seleccionada ó azar está subscrita polo menos a un dos tres periódicos. ¿ Cal é a probabilidade de que esa familia estea subscrita ó periódico X.?.

3) A. ¿Que relación existe entre a definición de probabilidade condicionada e a de sucesos independentes?
B. Se os sucesos P e Q son independentes,¿son independentes os sucesos complementarios? Razoar a resposta.

---

4). Unha fábrica de TV somete as unidades fabricadas a tres controles de calidade (X, Y e Z) sendo as probabilidades de non superar estes controles de 0'1, 0'2 e 0'3 respectivamente. Se os controles se realizan de xeito independente, calcular:
A. A probabilidade de que un aparato supere os tres controles.
B. A probabilidade de que un aparato supere, polo menos, un dos tres controles.
C. A probabilidade de que un aparato supere só un dos controles.

---

5). Tres máquinas X, Y e Z produciron 20, 30 e 30 pezas, respectivamente. Sábese que X produce un 10% de pezas defectuosas, Y un 20% e Z un 30%. Tómase unha peza ó chou e pídese:
A. Probabilidade de que sexa defectuosa.
B. Sabendo que a peza é defectuosa, a probabilidade de que proceda da máquina X ou Y.

---

6). Nunha Universidade o 20% dos estudiantes son de Enxeñería, o 30% de Letras e o 50% de Ciencias. Sábese que aproban o curso o 30% dos alumnos de Enxeñería, o 60% dos de Letras e o 50% dos de Ciencias.
A. Elexido un alumno ó chou, ¿cal é a probabilidade de que aprobe o curso?
B. Dinnos que o alumno elexido aprobou o curso, ¿cal é a probabilidade de que sexa de Letras?

---

7) O 70% dos clientes dunha compañía de seguros de automóbiles ten máis de 25 anos. Un 5 % dos clientes deste grupo ten un accidente ó longo do ano. No caso de clientes menores de 25 anos, este porcentaxe é do 20%. Se escollemos un asegurado ó chou, calcular a probabilidade de que teña un accidente ese ano.
Se unha persoa tivo un accidente, calcular a probabilidade de que sexa menor de 25 anos.

8) A. Enunciado do Teorema de Bayes.
B. Unha enfermidade pode ser producida por dous virus A e B. Nun laboratorio teñense tres tubos do virus A e dous do B. A probabilidade de que o virus A produza a enfermidade é 1/3 e que a produza o virus B é 2/5. Inocúlase ó chou un virus nun animal e contrae a enfermidade. ¿Cal é e probabilidade de que o virus que se inoculou fora o A?, e ¿cal de que fora o B?

---

9) A. Definición axiomático de probabilidade.
B. Se a probabilidade da intersección de dous sucesos independentes é 0'2 e a da súa unión é 0'7, ¿cal é a probabilidade de cada un destes sucesos?

---

10). O 60% dos alumnos de COU dun colexio aprobaron Filosofía e o 70% aprobaron Matemáticas. Ademais a porcentaxe de alumnos que aprobaron Filosofía aprobando Matemáticas é do 80%, ¿que porcentaxe de alumnos suspendeu ambas materias? Se Xoán sabe que aprobou Filosofía, ¿que probabilidade ten de aprobar tamén Matemáticas?

---

11) A. ¿Que relación existe entre a definición de probabilidade condicionada e a de sucesos independentes?
B. Se os sucesos P e Q son independentes,¿son independentes os sucesos complementarios? Razoar a resposta.