1. SUITES

On appelle **suite numérique** toute application d'une partie de N sur *IR*. Une suite peut donc être considérée comme une liste ordonnée de nombres réels. La notation habituelle est, si la suite s'appelle (***a***):

(a_n) qui se lit **: "*a* indice n"** ou **"terme d'indice n de la suite *a*".**

Si la suite ***a*** a pour ensemble d'indice l'ensemble des entiers naturels IN, on a alors la suite:

$a_1 , a_2 , \dots , a_n, \dots.$

RÈGLE DE FORMATION

Il y a de suites où on peut déterminer les termes avec un certain critère de formation, ce critère est appelé règle de formation.

TERME GÉNÉRAL (terme de rang *n*)

Le terme général d'une suite c'est une expression algébrique donnée comme expression de *n,* et permet un calcul direct d'un terme quelconque. La notation de le **terme général** est $\boldsymbol{a_n}$.

SUITES RÉCURRENTES

Une suite est récurrente quand chaque terme, après un certain, est obtenu à partir des précédents.

Ex.
La suite de Fibonacci où chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent et dont on connaît le terme général et sa relation avec le nombre d'or.

2. SUITES ARITHMÉTIQUES

Une **suite arithmétique** est une suite de nombres réels telle que chacun de ses termes, autres que le premier, est obtenu en ajoutant au terme qui le précède un même nombre appelé **raison d**.

EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Si a_1 désigne le premier terme et *d* la raison, on a, pour *n* entier supérieur ou égal à 1

$a_{n+1} = a_n + d$

Pour une suite arithmétique de premier terme et de raison *r*, le terme général est donné, pour $n \geq 1$ par

$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$ Où a_1 désigne le premier terme et *d* la raison

Si a_p et a_q sont des termes d'une suite arithmétique avec p<q, on peut vérifier

$\boldsymbol{a_q = a_p + (q-p)d}$

SOMME DES n PREMIERS TERMES D'UNE SUITE ARITHMÉTIQUE

Pour une suite arithmétique, la somme S_n des n premiers termes est donnée par :

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

3. SUITES GÉOMÉTRIQUES

Une **suite géométrique** est une suite de nombres réels telle que chacun de ses termes, autres que le premier, est obtenu en multipliant celui qui le précède par un même nombre appelé raison **r** .

On vérifie toujours dans les suites géométriques $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Si a_1 désigne le premier terme et r la raison, on a, pour n entier supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = a_n \cdot r$$

Pour une suite géométrique de premier terme a_1 et de raison r, le terme général est donné, pour $n \geq 1$ par

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Si a_p et a_q sont des termes d'une suite géométrique avec p<q, on peut vérifier

$$\boldsymbol{a_q = a_p \cdot r^{q-p}}$$

SOMME DES n PREMIERS TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Pour une suite géométrique de raison r, la somme S_n des n premiers termes est donnée par :

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}}$$

SOMME DES TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE AVEC $|r| < 1$

Pour une suite géométrique de raison $-1 < r < 1$, la somme S des *infinis* termes est donnée par :

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

PRODUIT DES n TERMES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

Le produit $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ des n premiers termes d'une suite géométrique est donné par :

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

EXERCICE 1A.1
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = 3n - 7$
Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.2
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = 2^n$
Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.3
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = n^2$
Déterminer les termes suivants :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.4
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
Déterminer les termes suivants (en écriture fractionnaire) :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.5
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = n^n$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7

EXERCICE 1A.6
On considère la suite (u_n) définie par le terme général $u_n = (-1)^n$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{53}	u_{72}	u_{147}

EXERCICE 1A.7
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

EXERCICE 1A.8
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = -3u_n + 2 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6

EXERCICE 1A.9
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 128 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8

EXERCICE 1A.10
On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 - 4 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5

EXERCICE 1A.11 On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{50}	u_{101}	u_{764}

EXERCICE 1A.12 On considère la suite (u_n) définie par récurrence $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$
Déterminer les termes suivants :

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_{50}	u_{101}	u_{764}

EXERCICE 2A.1
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 2A.2
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n}{2}$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 2A.3
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n + 5$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
c. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 2A.4
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$
a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .
b. (u_n) est-elle une suite arithmétique ?

EXERCICE 2A.5
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 4n$
(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

EXERCICE 2A.6
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - 5n^2$
(u_n) est-elle une suite arithmétique ?

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
On rappelle la formule : $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

EXERCICE 2A.7
a. On donne $u_0 = 5$ et $r = -2$ .Calculer u_7 .
b. On donne $u_0 = -7$ et $r = \frac{3}{2}$. Calculer u_5.
c. On donne $u_0 = 7$ et $r = \frac{-5}{7}$ .Calculer u_7 .

EXERCICE 2A.8
a. On donne $u_3 = 8$ et $r = 4$ .Calculer u_{11} .
b. On donne $u_2 = -7$ et $r = 2$ .Calculer u_8.
c. On donne $u_{12} = 31$ et $r = -\frac{1}{2}$ .Calculer u_{17} .

EXERCICE 2A.9
a. On donne $u_2 = 15$ et $u_{12} = 10$.
→ Calculer r puis u_{16} .
b. On donne $u_5 = 12$ et $u_{17} = 72$.
→ Calculer r puis u_{21} .
c. On donne $u_7 = 4$ et $u_4 = 7$.
→ Calculer r puis u_{35} .

EXERCICE 2A.10
a. Soit (u_n) est la suite arithmétique : de premier terme $u_0 = 5$, de raison $r = 2$.
→ Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.
b. Soit (u_n) est la suite arithmétique : de premier terme $u_1 = 1$, de raison $r = \frac{1}{3}$.
→ Calculer $u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.
c. Soit (u_n) est la suite arithmétique : de premier terme $u_5 = 8$, de raison $r = -\frac{1}{2}$.
→ Calculer $u_5 + \ldots + u_{10}$.

EXERCICE 2A.11
A l'aide d'une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison, calculer la somme :

$$S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$$

(c'est-à-dire la somme des 50 premiers nombres pairs).

EXERCICE 2A.12
En janvier, un jeune diplômé décide d'ouvrir une concession automobile. Ce premier mois, il vend 3 voitures. Ensuite, chaque mois il vendra 2 voitures de plus que le mois précédent.
a. Définir une suite arithmétique de premier terme u_1 qui permette de déterminer le nombre de voitures vendues chaque mois.
b. Combien de voitures vendra-t-il en février ? mai ? décembre ?
c. Combien de voitures aura-t-il vendu au cours de la 1ère année ?
d. Combien de voiture aura-t-il vendu en 5 ans ?
e. Combien de voitures aura-t-il vendu au cours de la 3ème année.

EXERCICE 3A.1

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 3A.2

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 3A.3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -5 \times (-1)^n$

a. Calculer u_1 ; u_2 et u_3 .

b. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

c. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_0 et la raison.

EXERCICE 3A.4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

EXERCICE 3A.5

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 7^n$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

EXERCICE 3A.6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times \left(\frac{-5}{2}\right)^n$

(u_n) est-elle une suite géométrique ?

Dans tous les exercices qui suivent, (u_n) est une suite géomtrique de raison q.

On rappelle la formule : $\boxed{u_n = u_0 . q^n}$

EXERCICE 3A.7

a. On donne $u_0 = -1$ et $q = 2$ .Calculer u_7 .

b. On donne $u_0 = 7$ et $q = \frac{1}{2}$ .Calculer u_5.

c. On donne $u_0 = 243$ et $q = \frac{-1}{3}$ .Calculer u_5 .

EXERCICE 3A.8

a. On donne $u_3 = 2$ et $q = 3$ .Calculer u_6 .

b. On donne $u_5 = 2$ et $q = -5$ .Calculer u_9 .

c. On donne $u_3 = 0{,}01$ et $q = -10$ .Calculer u_7.

d. On donne $u_8 = 512$ et $q = 2$ .Calculer u_3.

e. On donne $u_2 = \frac{3}{4}$ et $q = \frac{2}{3}$ .Calculer u_5 .

EXERCICE 3A.9

a. On donne $u_2 = 17$ et $u_3 = 51$

→ Calculer q puis u_5 .

b. On donne $u_1 = 7$ et $u_3 = 112$

→ Calculer q puis u_6 .

c. On donne $u_7 = 11$ et $u_{10} = 3\,773$

→ Calculer q puis u_{12} .

d. On donne $u_5 = 41$ et $u_9 = 25\,625$

→ Calculer q puis u_{10} .

e. On donne $u_4 = 256$ et $u_{15} = 0{,}125$

→ Calculer q puis u_{18} .

EXERCICE 3A.10

a. Soit (u_n) est la suite géométrique :
- de premier terme $u_0 = -3$
- de raison $q = 2$.

→ Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

b. Soit (u_n) est la suite géométrique :
- de premier terme $u_1 = 64$
- de raison $q = 0{,}5$.

→ Calculer $u_1 + \ldots + u_{12}$.

c. Soit (u_n) est la suite géométrique :
- de premier terme $u_5 = 5$
- de raison $q = 0{,}9$.

→ Calculer $u_5 + u_6 + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 3A.11

Un nageur s'apprête à traverser la manche, soit une distance de 21 km.

Pendant de la première heure, il parcourt 2,1 km. Mais à cause de la fatigue, à chaque heure il ne nage que 90% de la distance nagée pendant l'heure précédente.

1. a. Déterminer un suite géométrique u_n de premier terme $u_1 = 2{,}1$ dont chaque terme correspond à la distance nagée pendant la $n^{ème}$ heure.

b. Déterminer u_2, u_5 et u_{10}.

2. Quelle est la distance parcourue…

a. … en 10 heures ?

b. … en 20 heures ?

c. … en 100 heures ?

AUTOÉVALUATION CHAPITRE 4

1. Écris le terme général de chacune des suites suivantes :

   a) $-\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, \ldots$ b) $3;\ 0{,}6;\ 0{,}12;\ 0{,}024;\ \ldots$

   c) $1{,}2;\ 2{,}3;\ 3{,}4;\ 4{,}5;\ \ldots$ d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

2. Trouve la formule par récurrence de la suite 8, 14, 6, -8,… et écris les trois termes suivantes.

3. Calcule la somme des dix premiers termes des suites suivantes :
   a) 9 ; 6,5 ; 4 ; 1,5 ; …
   b) 2, -4, 8, -16, …

4. Soit (a_n) est la suite arithmétique avec le terme a_5 = 22, et a_9 = 38. Calcule a_{25} et le lieu qui occupe le terme qui vaut 58.

5. Calcule la fraction de $6{,}\widehat{4}$ en utilisant les suites géométriques.

6. La somme des douzes multiples consécutifs de 5 est 750. Calcule le premier et le dernier des multiples additionnés.

7. Une entreprise offre à ses employés un salaire de 15 000 € par an et une augmentation de 500 € pour chacune des années suivantes. Une autre entreprise offre le même salaire avec une augmentation annuelle de 5%. Justifie lequel des deux est le meilleur en comparant le salaire des 5 ans.

8. Afin d'enregistrer un annonce publicitaire, un grand nombre de personnes ont été embauchées et doivent être placées sur 51 lignes. Chaque ligne a deux personnes de plus que la précédente et à la ligne 26, il doit y avoir 57 personnes. Détermine le nombre de personnes dans la première ligne, le nombre de personnes de la dernière ligne et le nombre total de personnes impliquées dans l'annonce.

9. Vrai ou faux? Justifie tes réponses.
   a) Pour calculer S_{20} selon une progression arithmétique ou géométrique, il suffit de connaître deux de ses termes.
   b) Les termes d'une progression géométrique peuvent être obtenus en multipliant chaque terme par le précédent.
   c) La somme des termes infinis d'une progression géométrique peut être calculée si $-1 < r < 1$.
   d) Une progression arithmétique diminue lorsque la différence est inférieure à 1.