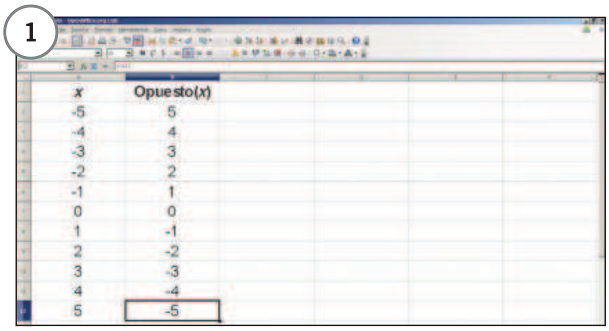
PASO A PASO

OpenOffice. CALC
es.openoffice.org

1

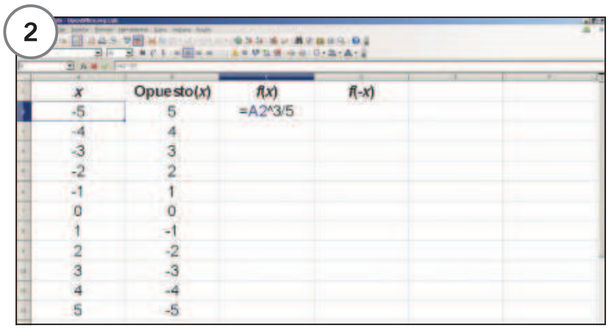


x	Opuesto(x)
-5	5
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	-1
2	-2
3	-3
4	-4
5	-5

Anotamos los valores de x, entre -5 y 5, en la columna **A** y definimos en la columna **B** sus opuestos.

En la celda **B2** escribimos $=-$**A2**, copiamos su contenido y lo pegamos en el resto de esta columna, donde aparecen los opuestos de los valores que hemos escrito en la columna **A**.

2

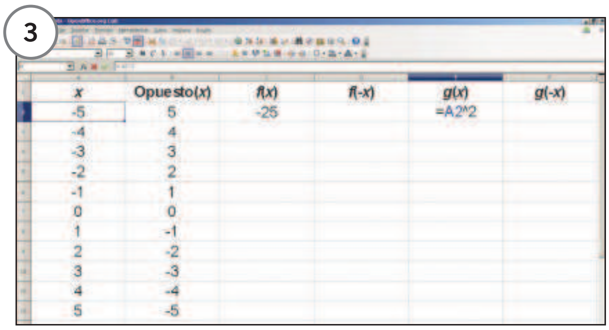


x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)
-5	5	=A2^3/5	
-4	4		
-3	3		
-2	2		
-1	1		
0	0		
1	-1		
2	-2		
3	-3		
4	-4		
5	-5		

Calculamos en las columnas **C** y **D** los valores de la función $f(x) = \frac{x^3}{5}$ en un punto y su opuesto.

Para ello tecleamos en la celda **C2**: =**A2^3/5** y aparece como resultado -25.

3

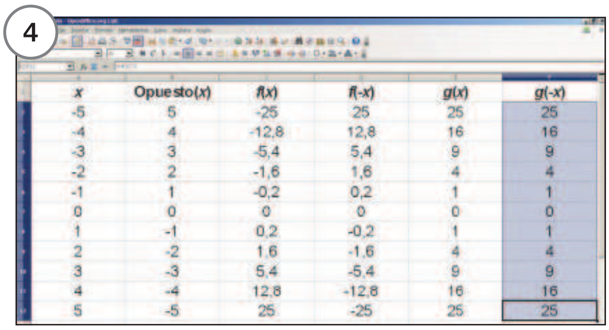


x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
-5	5	-25		=A2^2	
-4	4				
-3	3				
-2	2				
-1	1				
0	0				
1	-1				
2	-2				
3	-3				
4	-4				
5	-5				

Calculamos en las columnas **E** y **F** los valores de la función $f(x) = x^2$ en un punto y su opuesto.

Para ello tecleamos en la celda **E2**: =**A2^2** y aparece como resultado 25.

4



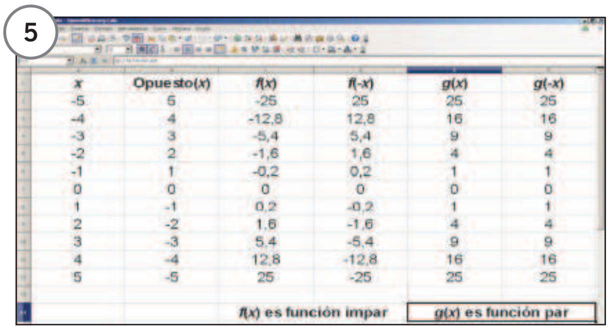
x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
-5	5	-25	25	25	25
-4	4	-12,8	12,8	16	16
-3	3	-5,4	5,4	9	9
-2	2	-1,6	1,6	4	4
-1	1	-0,2	0,2	1	1
0	0	0	0	0	0
1	-1	0,2	-0,2	1	1
2	-2	1,6	-1,6	4	4
3	-3	5,4	-5,4	9	9
4	-4	12,8	-12,8	16	16
5	-5	25	-25	25	25

Copiamos el contenido de la celda **C2** y lo pegamos en el resto de la columna **C** y en la columna **D**.

Copiamos el contenido de la celda **E2** y lo pegamos en el resto de la columna **E** y en la columna **F**.

De esta manera obtenemos los valores de las funciones para todos los valores de x y de sus opuestos, $-x$.

5



x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
-5	5	-25	25	25	25
-4	4	-12,8	12,8	16	16
-3	3	-5,4	5,4	9	9
-2	2	-1,6	1,6	4	4
-1	1	-0,2	0,2	1	1
0	0	0	0	0	0
1	-1	0,2	-0,2	1	1
2	-2	1,6	-1,6	4	4
3	-3	5,4	-5,4	9	9
4	-4	12,8	-12,8	16	16
5	-5	25	-25	25	25
		f(x) es función impar		g(x) es función par	

Comprobamos los valores que aparecen en las columnas **C** y **D** y también los de las columnas **E** y **F**.

- Si los valores son iguales, la función es simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir, es una función par.
- Si los valores son opuestos, la función es simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, es una función impar.
- Si los valores no son iguales ni opuestos, la función no es simétrica.

RECURSOS PARA EL AULA

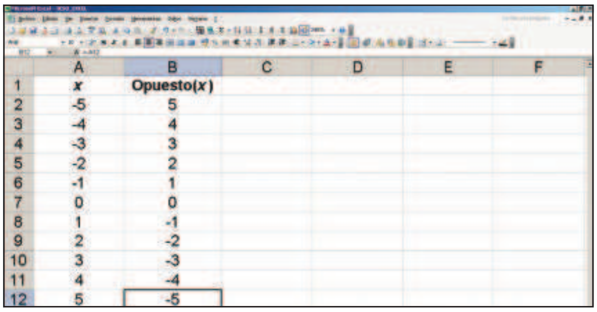
MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Microsoft Office. EXCEL

Comprueba si estas funciones presentan alguna simetría.

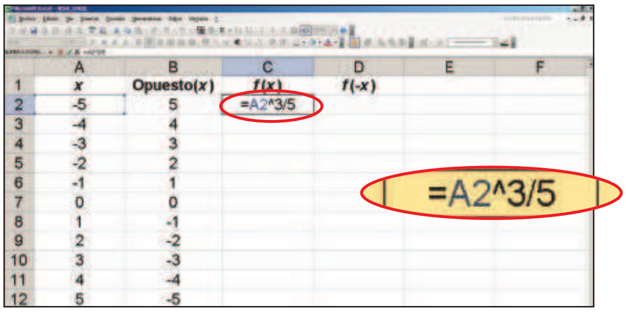
a) $f(x) = \dfrac{x^3}{5}$ **b)** $g(x) = x^2$

1. Anotamos en la columna **A** valores de la variable x, y en la columna **B**, los opuestos.



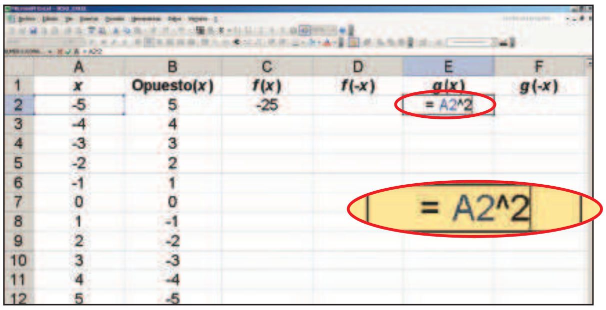
	A	B
1	x	Opuesto(x)
2	-5	5
3	-4	4
4	-3	3
5	-2	2
6	-1	1
7	0	0
8	1	-1
9	2	-2
10	3	-3
11	4	-4
12	5	-5

2. Escribimos =A2^3/5 en la celda **C2**, para calcular el valor de $f(x)$.



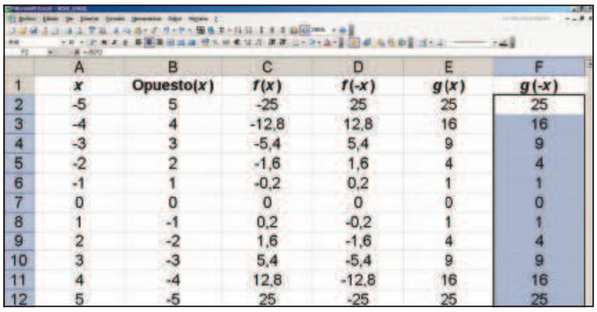
	A	B	C	D
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)
2	-5	5	=A2^3/5	
3	-4	4		
4	-3	3		
5	-2	2		
6	-1	1		
7	0	0		
8	1	-1		
9	2	-2		
10	3	-3		
11	4	-4		
12	5	-5		

3. Escribimos =A2^2 en la celda **E2**, para calcular el valor de $g(x)$.



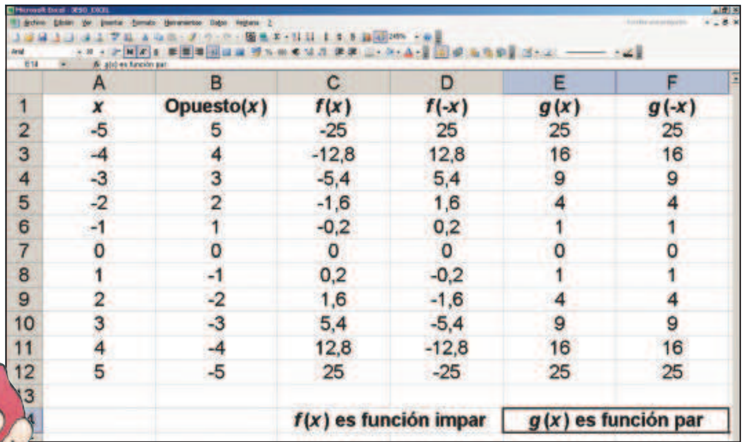
	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
2	-5	5	-25		= A2^2	
3	-4	4				
4	-3	3				
5	-2	2				
6	-1	1				
7	0	0				
8	1	-1				
9	2	-2				
10	3	-3				
11	4	-4				
12	5	-5				

4. Copiamos el contenido de la celda **C2** en las columnas **C** y **D**, y el contenido de la celda **E2** en las columnas **E** y **F**.



	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
2	-5	5	-25	25	25	25
3	-4	4	-12,8	12,8	16	16
4	-3	3	-5,4	5,4	9	9
5	-2	2	-1,6	1,6	4	4
6	-1	1	-0,2	0,2	1	1
7	0	0	0	0	0	0
8	1	-1	0,2	-0,2	1	1
9	2	-2	1,6	-1,6	4	4
10	3	-3	5,4	-5,4	9	9
11	4	-4	12,8	-12,8	16	16
12	5	-5	25	-25	25	25

5. Comprobamos la relación entre las columnas **C** y **D** y entre **E** y **F**: si son iguales u opuestas existe simetría.



	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
2	-5	5	-25	25	25	25
3	-4	4	-12,8	12,8	16	16
4	-3	3	-5,4	5,4	9	9
5	-2	2	-1,6	1,6	4	4
6	-1	1	-0,2	0,2	1	1
7	0	0	0	0	0	0
8	1	-1	0,2	-0,2	1	1
9	2	-2	1,6	-1,6	4	4
10	3	-3	5,4	-5,4	9	9
11	4	-4	12,8	-12,8	16	16
12	5	-5	25	-25	25	25
13						
14			f(x) es función impar		g(x) es función par	

ACTIVIDADES

PRACTICA

1. Comprueba si existe simetría en las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 5x$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x}$

INVESTIGA

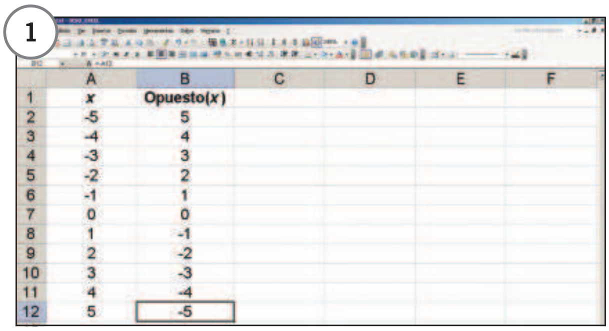
2. Comprueba mediante algunos ejemplos la siguiente propiedad de las funciones que presentan simetrías.

Si una función, f(x), es una función par o una función impar, entonces se verifica que $f(x)^2 = f(-x)^2$.

PASO A PASO

Microsoft Office. EXCEL

1

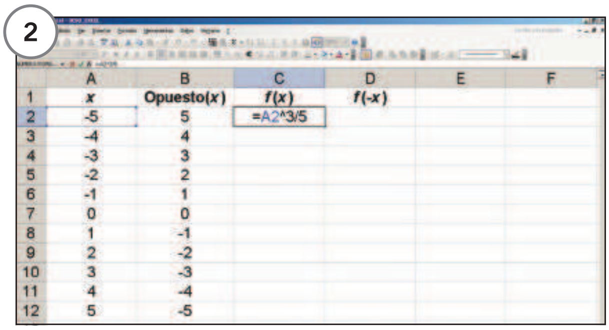


	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)				
2	-5	5				
3	-4	4				
4	-3	3				
5	-2	2				
6	-1	1				
7	0	0				
8	1	-1				
9	2	-2				
10	3	-3				
11	4	-4				
12	5	-5				

Anotamos los valores de x, entre -5 y 5, en la columna **A** y definimos en la columna **B** sus opuestos.

En la celda **B2** escribimos $=$**−A2**, copiamos su contenido y lo pegamos en el resto de esta columna, donde aparecen los opuestos de los valores que hemos escrito en la columna **A**.

2

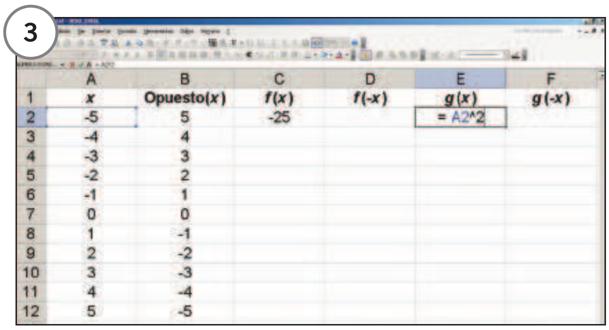


	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)		
2	-5	5	=A2^3/5			
3	-4	4				
4	-3	3				
5	-2	2				
6	-1	1				
7	0	0				
8	1	-1				
9	2	-2				
10	3	-3				
11	4	-4				
12	5	-5				

Calculamos en las columnas **C** y **D** los valores de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{5}$ en un punto y su opuesto.

Para ello tecleamos en la celda **C2**: $=$**A2^3/5** y aparece como resultado -25.

3

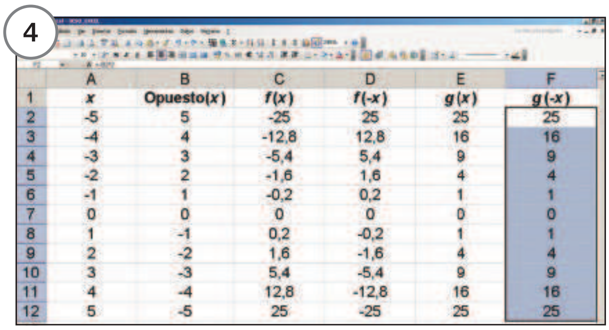


	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
2	-5	5	-25		= A2^2	
3	-4	4				
4	-3	3				
5	-2	2				
6	-1	1				
7	0	0				
8	1	-1				
9	2	-2				
10	3	-3				
11	4	-4				
12	5	-5				

Calculamos en las columnas **E** y **F** los valores de la función $f(x) = x^2$ en un punto y su opuesto.

Para ello tecleamos en la celda **E2**: $=$**A2^2** y aparece como resultado 25.

4



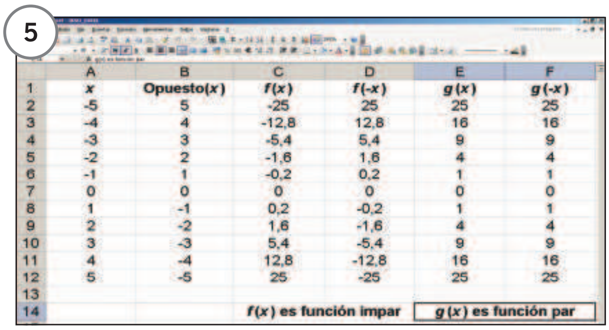
	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
2	-5	5	-25	25	25	25
3	-4	4	-12,8	12,8	16	16
4	-3	3	-5,4	5,4	9	9
5	-2	2	-1,6	1,6	4	4
6	-1	1	-0,2	0,2	1	1
7	0	0	0	0	0	0
8	1	-1	0,2	-0,2	1	1
9	2	-2	1,6	-1,6	4	4
10	3	-3	5,4	-5,4	9	9
11	4	-4	12,8	-12,8	16	16
12	5	-5	25	-25	25	25

Copiamos el contenido de la celda **C2** y lo pegamos en el resto de la columna **C** y en la columna **D**.

Copiamos el contenido de la celda **E2** y lo pegamos en el resto de la columna **E** y en la columna **F**.

De esta manera obtenemos los valores de las funciones para todos los valores de x y de sus opuestos, $-x$.

5



	A	B	C	D	E	F
1	x	Opuesto(x)	f(x)	f(-x)	g(x)	g(-x)
2	-5	5	-25	25	25	25
3	-4	4	-12,8	12,8	16	16
4	-3	3	-5,4	5,4	9	9
5	-2	2	-1,6	1,6	4	4
6	-1	1	-0,2	0,2	1	1
7	0	0	0	0	0	0
8	1	-1	0,2	-0,2	1	1
9	2	-2	1,6	-1,6	4	4
10	3	-3	5,4	-5,4	9	9
11	4	-4	12,8	-12,8	16	16
12	5	-5	25	-25	25	25
13						
14			f(x) es función impar		g(x) es función par	

Comprobamos los valores que aparecen en las columnas **C** y **D** y también los de las columnas **E** y **F**.

- Si los valores son iguales, la función es simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir, es una función par.
- Si los valores son opuestos, la función es simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, es una función impar.
- Si los valores no son iguales ni opuestos, la función no es simétrica.

RECURSOS PARA EL AULA

EN LA VIDA COTIDIANA…

Los movimientos y las gráficas

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Interpretar las gráficas espacio-tiempo y velocidad-tiempo, que relacionan el espacio o la velocidad de un móvil en función del tiempo transcurrido. • Relacionar estos dos tipos de gráficas.
• Diseñar una gráfica a partir de un dibujo.

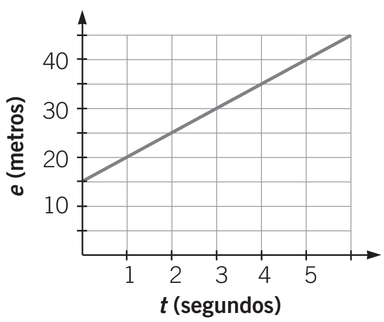
1 Interpretación de las gráficas espacio-tiempo

En primer lugar conviene que recordemos que la velocidad de un móvil es la magnitud que relaciona el espacio que recorre con el tiempo empleado en ello.

Hay dos tipos de gráficas para analizar los movimientos: la gráfica espacio-tiempo y la gráfica velocidad-tiempo.

En ambas representamos, en el eje horizontal, el tiempo como variable independiente, y en el eje vertical, el espacio recorrido o la velocidad, respectivamente.

Un móvil parte de un punto con un movimiento uniforme (a velocidad constante) que viene representado por la siguiente gráfica.



HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿A qué distancia inicial se encontraba el móvil?*

b) *¿Cuál es la velocidad del móvil? ¿Cómo será la gráfica velocidad-tiempo?*

c) *Escribe la expresión algebraica del movimiento.*

Para responder a las preguntas anteriores, ten en cuenta que:

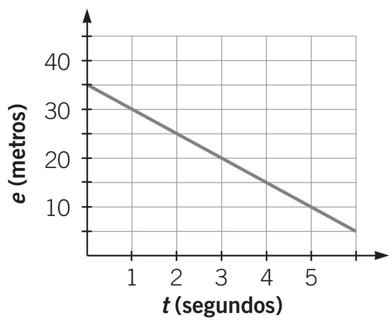
a) *La distancia inicial corresponderá a un valor del tiempo* $t = 0$*, que según la gráfica es igual a…*

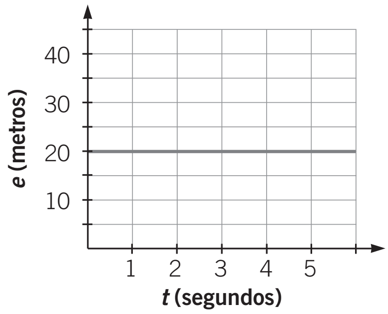
b) *Esta es una gráfica espacio-tiempo, y la velocidad que relaciona ambas magnitudes es de la forma:* $v = \frac{e}{t}$*. Como vemos, en 1 segundo el móvil ha pasado de estar a 15 metros a estar a 20 metros, por lo que ha recorrido 5 metros. En 2 segundos pasa de 15 a 25 metros y ha recorrido 10 metros, etcétera. Por tanto, su velocidad es…*

Representa la gráfica velocidad-tiempo. ¿Qué forma tiene?

c) *La expresión algebraica del movimiento indica el espacio que recorre el móvil en función del tiempo. En este caso, hay un espacio inicial, y luego el espacio es directamente proporcional al tiempo empleado. La expresión es…*

Observa estas gráficas de movimientos y contesta a los apartados a), b) y c) formulados para la gráfica anterior.

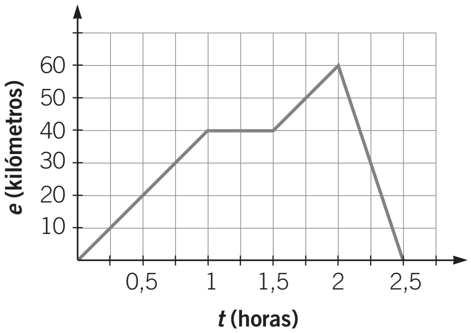




2 Análisis de las gráficas espacio-tiempo y velocidad-tiempo

En este apartado vamos a analizar las gráficas espacio-tiempo y a calcular la velocidad del móvil en cada tramo. También representaremos la gráfica velocidad-tiempo.

Dada esta gráfica espacio-tiempo, calcula la velocidad en cada tramo y representa la gráfica velocidad-tiempo correspondiente.



Algunas observaciones importantes son:

- En la gráfica hay cuatro tramos que se corresponderán con cuatro velocidades diferentes.
- La forma de la gráfica espacio-tiempo no tiene relación con el movimiento real del móvil, que se supone rectilíneo. No debemos confundir la gráfica de un movimiento con el movimiento real.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Describe la situación del móvil en cada uno de los tramos. ¿Se encuentra más lejos o cerca del punto de partida?*

b) *En una hora, ¿qué espacio ha recorrido? ¿Y en una hora y media?*

c) *La velocidad del móvil es constante, pero no todo el tiempo, sino en cada tramo. ¿Cuál es la velocidad del móvil en cada tramo?*

d) *Escribe la expresión algebraica del movimiento en los cuatro tramos.*

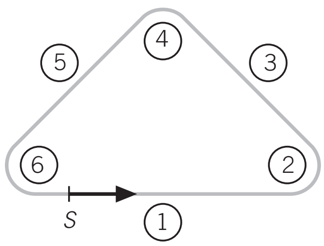
e) *Representa la gráfica velocidad-tiempo. ¿Qué forma tiene?*

f) *Compara la forma de la gráfica velocidad-tiempo con la forma de la gráfica espacio-tiempo.*

g) *Indica los máximos y mínimos de la gráfica velocidad-tiempo.*

3 Diseño de gráficas a partir de dibujos

Observa el circuito de carreras de la figura: los coches salen del punto *S* y van siempre a la máxima velocidad posible.



Ten en cuenta que, al llegar a una curva, se frena, y al salir, se acelera.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Cómo varía la velocidad del coche en función de su posición en el circuito?*

b) *Representa gráficamente la velocidad del coche en función del tiempo.*

c) *En el supuesto de un circuito circular de 100 m de radio y una velocidad constante de 30 m/s, representa gráficamente la velocidad en función del tiempo y el espacio recorrido en función del tiempo.*

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Relacionar tabla, gráfica y fórmula

Estrategia La comprensión de un fenómeno o problema es un proceso que, a veces, se inicia obteniendo una tabla de valores que nos permita realizar una gráfica. El objetivo es la obtención de una fórmula que relacione las variables que intervienen.

PROBLEMA RESUELTO

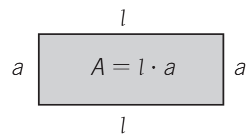
Se quiere construir un recinto rectangular con 20 metros de valla. ¿Cuál es la relación entre el área cercada por la valla y la longitud del recinto?

Planteamiento y resolución

Con la ayuda de una cuerda atada por los extremos podemos hacernos una idea del problema. Vemos que se pueden formar distintos rectángulos, todos ellos con igual perímetro.

Siendo l = largo y a = ancho del rectángulo:

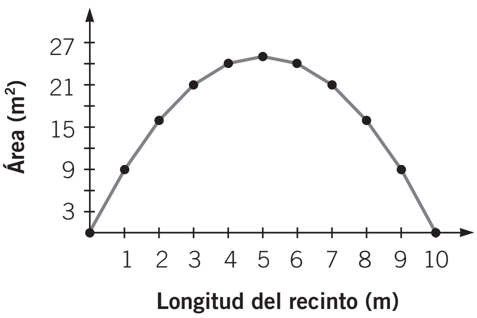
$$2l + 2a = 20 \rightarrow l + a = 10$$
$$A = l \cdot a$$



Elaboramos la tabla de valores y representamos los puntos (l, A) sobre unos ejes cartesianos:

Tabla

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
A	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0



Fórmula

$A = l \cdot a = l \cdot (10 - l)$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 **Una tienda de alquiler de cámaras de vídeo cobra 6 € al día y el primer día de alquiler es gratuito. ¿Cuál será el precio si alquilas una cámara 5 días? ¿Y 10 días? Forma una tabla, haz la gráfica y halla su expresión algebraica.**

2 **Un oficial cobra 90 € por cada hora de trabajo y su ayudante 60 €. Si el ayudante empieza a trabajar a las 8 de la mañana y el oficial a las 10, resuelve.**

a) ¿Cuánto dinero habrá ganado cada uno a las 10 y a las 11 de la mañana?
b) El oficial y su ayudante siguen trabajando hasta las 15 horas. Construye una tabla en la que reflejes el dinero que han ganado.
c) Representa gráficamente los valores de la tabla. ¿A qué hora han conseguido la misma cantidad de dinero?
d) ¿Puedes deducir la expresión algebraica o fórmula que determina lo que cobra el oficial según las horas trabajadas? ¿Y su ayudante?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

INTRODUCCIÓN

El concepto de función es uno de los más importantes que se tratan en este curso y, aunque no reviste una especial dificultad, plantea a veces problemas a los alumnos.

Por ello, la unidad comienza explicando cómo determinar si una relación entre magnitudes es función o no, así como las distintas formas de expresar una función: mediante texto, tabla, fórmula y gráfica, dedicando atención al análisis de estas últimas.
Es importante trabajar las distintas expresiones de una función, señalando que todas son equivalentes y expresan lo mismo. Una vez determinado que la relación entre dos magnitudes es una función, el siguiente paso es diferenciar entre variable independiente y dependiente.

El análisis de las características de las funciones centrará el resto de la unidad. Se estudiarán el dominio y el recorrido de la función, su continuidad o discontinuidad, intervalos donde la función crece o decrece y la determinación de los valores donde alcanza un máximo o un mínimo.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- Una *magnitud* es una característica que puede ser medida y expresada con un número.
- Una *función* es una correspondencia entre dos variables que asocia a cada valor de una de ellas un único valor de la otra.
- En una función, la *variable independiente* es la que puede tomar cualquier valor. La *variable dependiente* depende del valor que tome la variable independiente.
- *Dominio*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- *Recorrido*: conjunto de todos los valores que puede tomar la variable dependiente.
- *Gráfica de una función*: representación del conjunto de puntos del plano que la definen.
- *Función periódica*: su gráfica se repite cada cierto intervalo, $f(x) = f(x + T)$, siendo T el período.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir relaciones funcionales entre magnitudes.	• Variables. • Relación funcional.	• Determinación de la relación entre dos variables, señalando si es o no una función.
2. Conocer las diferentes expresiones de una función.	• Expresión de una función mediante texto, tabla, gráfica o expresión algebraica.	• Expresión de una función. • Obtención de unas expresiones a partir de otras.
3. Calcular el dominio y el recorrido de una función.	• Variable independiente y variable dependiente. • Dominio y recorrido de una función.	• Obtención del recorrido y el dominio de una función.
4. Distinguir entre funciones continuas y discontinuas.	• Función continua. • Función discontinua.	• Diferenciación de funciones continuas y discontinuas. • Resolución de problemas: ecuación, variables y representación gráfica.
5. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función.	• Función creciente y función decreciente. • Máximos y mínimos.	• Obtención de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. • Determinación de los máximos y mínimos.
6. Reconocer las funciones periódicas.	• Función periódica.	• Reconocimiento de funciones periódicas y su período.

OBJETIVO 1

DISTINGUIR RELACIONES FUNCIONALES ENTRE MAGNITUDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **Magnitud** es cualquier característica que puede ser medida y su valor expresado mediante un número.
- Una **relación entre dos magnitudes** es una forma de asociar una serie de valores de una de ellas con una serie de valores de la otra. Por ejemplo:
  – El consumo de gasolina de un coche está asociado a la distancia recorrida.
  – El precio del menú de un restaurante depende de los platos elegidos.
  – El precio de las entradas de cine está relacionado con el número de amigos que vamos.
- En una relación entre magnitudes, los valores de estas cambian, y por eso las magnitudes se llaman **variables**.

1 **¿Qué características son magnitudes? Marca con una cruz.**

a) El número de páginas de un libro.
b) El color de la tapa de un cuaderno.
c) El precio de un disco compacto.
d) La altura de un edificio.

2 **De las parejas de magnitudes, ¿cuáles están relacionadas? Marca con una cruz.**

a) La altura de los alumnos de clase y su nota en Matemáticas.
b) El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento.
c) El número de entradas de cine y su importe.
d) La velocidad de un coche y el tiempo utilizado en un trayecto.

FUNCIÓN

Si en una relación entre dos magnitudes, cada valor de una de ellas está asociado a un único valor de la otra, se dice que esa correspondencia o relación es una **función**.

– Las magnitudes *número de kilos de naranjas* y *coste* representan una función.
A un cierto número de kilos solo le corresponde un precio.
– El coeficiente intelectual de una persona y su lugar de nacimiento no representan una función.
A un cierto coeficiente le pueden corresponder varios lugares de nacimiento.

La **variable independiente (*x*)** puede tomar cualquier valor, y el valor de la **variable dependiente (*y*)** depende del que tome la variable independiente.

3 **De los siguientes pares de magnitudes, señala cuáles representan una función. Identifica su variable dependiente e independiente.**

a) El volumen de un cubo y su arista.
b) La edad de una persona y su color de ojos.
c) El importe del recibo de la luz y la cantidad de electricidad que se gasta.
d) La edad de una persona y su talla de camisa.
e) El número de diagonales y el número de lados de un polígono.
f) La edad de un padre y la edad de su hijo.

CONOCER LAS DIFERENTES EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FORMAS DE EXPRESAR UNA FUNCIÓN

La relación entre dos variables se puede expresar de diferentes maneras:

- **Mediante un texto:** descripción verbal y/o escrita que expresa la relación entre dos variables. Es lo que se suele llamar enunciado del problema.
- **Mediante una tabla:** los valores de las variables independiente y dependiente se organizan en forma de tabla.
- **Mediante un gráfico:** nos da una visión cualitativa de la relación que existe entre las variables. Puede ser una representación en unos ejes de coordenadas.
- **Mediante una fórmula o expresión algebraica:** podemos calcular qué valor de la variable dependiente corresponde a un valor de la variable independiente.

EJEMPLO

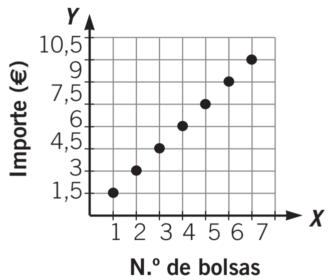
Un grupo de amigos va al cine y compran bolsas de palomitas. Una bolsa vale 1,50 €, dos bolsas valen 3 € y cinco bolsas valdrán 7,50 €.

Vamos a expresar este ejemplo de las cuatro maneras que acabamos de ver:

- **Mediante un texto:** el importe que hay que pagar en euros es el producto de 1,50 por el número de bolsas de palomitas compradas.
- **Mediante una tabla:** el número de bolsas es la variable independiente y el importe es la variable dependiente.

N.º DE BOLSAS	1	2	3	…
IMPORTE (€)	1,50	3	4,50	…

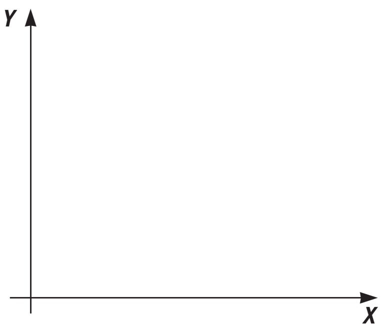
- **Mediante un gráfico:** hemos elegido un gráfico de puntos en un sistema de ejes de coordenadas.



- **Mediante una fórmula:** si llamamos y al importe en euros y x al número de bolsas de palomitas, la fórmula será: $y = 1,5 \cdot x$

1 **Una compañía telefónica cobra en su recibo una cuota fija de 0,13 € en cada llamada y 0,15 € por cada minuto. Obtén la tabla, la gráfica y la fórmula que expresa la relación entre el importe del recibo de teléfono y el número de minutos.**

N.º DE MINUTOS (x)				
IMPORTE DEL RECIBO (y)				



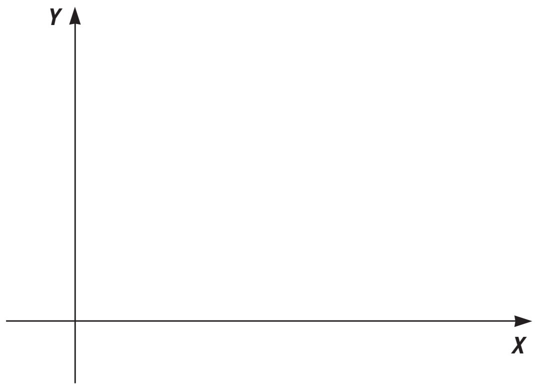
ADAPTACIÓN CURRICULAR

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

La **gráfica de una función** es la representación del conjunto de puntos que definen esa función.

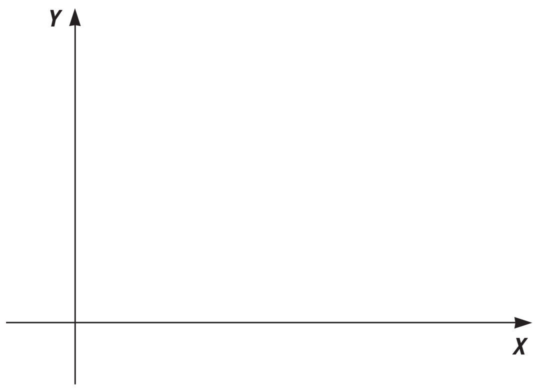
2 **La siguiente tabla expresa la relación entre el lado de un cuadrado y su área. Obtén la gráfica y la fórmula que representa la relación entre ambas magnitudes.**

LADO	ÁREA
2	4
4	16
6	36
8	64
10	100



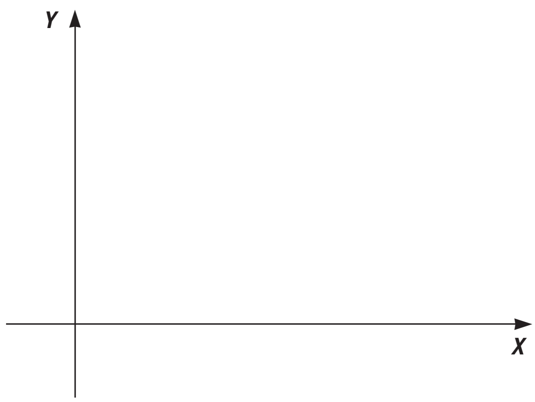
3 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 + 1$, obtén la tabla y la gráfica.**

x	$y = f(x)$
-3	$(-3)^2 + 1 = 10$
-2	
1	
0	
1	
2	
3	



4 **Dada la función mediante la fórmula $y = x^2 - 2$, obtén la tabla y la gráfica.**

x	$y = f(x)$



5 **Expresa, mediante una fórmula, la relación que existe entre las siguientes magnitudes.**

a) El radio de una circunferencia y su longitud.
b) El lado de un cuadrado y su área.
c) El radio de una esfera y su volumen.

CALCULAR EL DOMINIO Y EL RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- Una relación entre dos magnitudes es una **función** si a cada valor de la variable independiente se le asocia un único valor de la variable dependiente: $f(x) = y$
- El valor de la **variable independiente** se suele representar por x, y también se llama **original**.
- El valor de la **variable dependiente** se suele representar por y, y también se llama **imagen**.
- El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x.
- El **recorrido** de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable y.

EJEMPLO

Dada la función $f(x) = 2x + 3$, calcula las imágenes para $x = 0$ y $x = -1$.

$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$ $\qquad$ $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$

Halla el dominio y el recorrido de la función $f(x) = 3x - 7$.

El dominio y el recorrido de la función son el conjunto de los números reales, ya que la variable x puede tomar como valor cualquier número real, y para cada uno de esos números reales, la variable y tiene como valor también un número real.

1 **Dada la función que asocia a cada número entero su cuarta parte más 5 unidades:**

a) Halla su fórmula o expresión algebraica.

b) Calcula $f(2)$ y $f(0)$.

c) ¿Es posible encontrar la imagen de $\frac{2}{3}$?

d) Determina el dominio.

2 **Dada la relación que asocia a cada número real el inverso de la suma de ese número más 5:**

a) ¿Es una función? Si lo es, determina cuál es su fórmula.

b) ¿Se puede calcular $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$ y $f(-5)$?

c) Determina su dominio y recorrido.

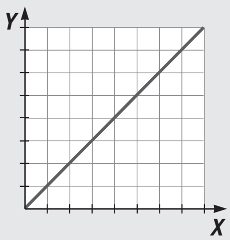
ADAPTACIÓN CURRICULAR

DISTINGUIR ENTRE FUNCIONES CONTINUAS Y DISCONTINUAS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

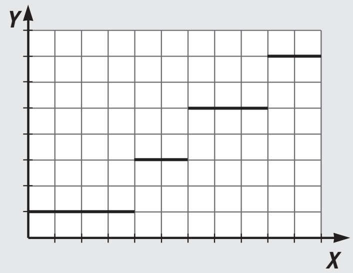
FUNCIÓN CONTINUA

Una función es continua si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo.



FUNCIÓN DISCONTINUA

Una función es discontinua si no se puede dibujar de un solo trazo.



Los puntos donde necesitamos levantar el lápiz del papel se denominan puntos de discontinuidad.

1 **Estudia la relación que existe entre la edad de Juan y la paga semanal que le dan sus padres, teniendo en cuenta estos datos. Desde que nació hasta los 10 años no recibió paga semanal, desde los 10 años hasta los 12 recibió 5 € semanales, desde los 12 años hasta los 15 recibió 8 €, desde los 15 años hasta los 20 recibió 10 €, y a partir de los 20 años dejó de recibir paga semanal. Obtén la tabla que relaciona ambas magnitudes y la gráfica. ¿Cómo es la función que has obtenido, continua o discontinua?**

2 **Un vendedor de muebles tiene un sueldo base de 650 € y por cada mueble que vende cobra una comisión de 100 €.**

a) Representa la gráfica que expresa el sueldo en función del número de muebles vendidos.
b) ¿Es la función continua o discontinua?

3 **Dada la función que asocia a cada número real su cuádruple más 2 unidades:**

a) Escribe su expresión algebraica.
b) Representa gráficamente la función.
c) ¿Es continua o discontinua?

ESTUDIAR EL CRECIMIENTO Y EL DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

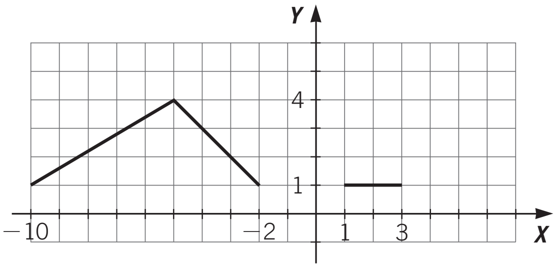
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Dada una función $f(x)$ y dos valores x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$:

- Si $f(x_2) - f(x_1) > 0$, la función es **creciente** entre x_1 y x_2.
- Si $f(x_2) - f(x_1) < 0$, la función es **decreciente** entre x_1 y x_2.

EJEMPLO

Dada la siguiente función, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Siempre se empieza estudiando el eje X, de izquierda a derecha.

- En el intervalo $[-10, -5]$, la función crece y su tasa de crecimiento es:

$$\left.\begin{array}{r} f(-10) = 1 \\ f(-5) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow f(-5) - f(-10) = 4 - 1 = 3$$

- En el intervalo $[-5, -2]$, la función decrece y su tasa de decrecimiento es:

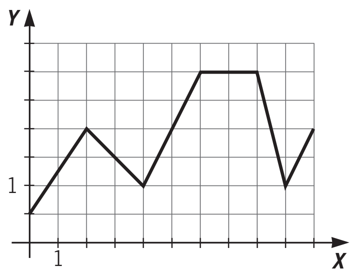
$$\left.\begin{array}{r} f(-5) = 4 \\ f(-2) = 1 \end{array}\right\} \rightarrow f(-5) - f(-2) = 4 - 1 = 3$$

- Hay una discontinuidad desde $x = -2$ a $x = 1$.
- En el intervalo $[1, 3]$, la función no crece ni decrece, se mantiene constante.

1 **Representa una función con las siguientes características.**

a) Es creciente en los intervalos $[2, 5]$ y $[7, 9]$.
b) Es decreciente en $[5, 7]$.
c) Es constante en $[0, 2]$.

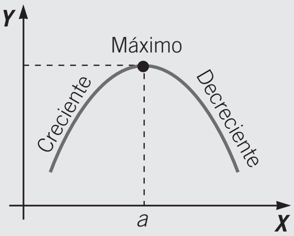
2 **Dada la función representada por la gráfica siguiente, estudia su continuidad y crecimiento.**

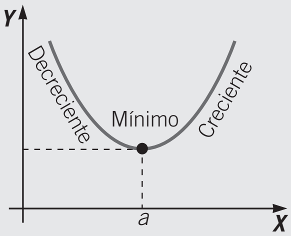


ESTUDIAR EL CRECIMIENTO Y EL DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

- Una función tiene un **máximo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, la función es creciente, y a la derecha es decreciente.
- Una función tiene un **mínimo** en un punto si, a la izquierda de ese punto, es decreciente, y a la derecha, creciente.





3 **Dada la función $y = x^2 - 4$, haz una tabla de valores, represéntala y estudia si es continua, dónde es creciente y decreciente y si tiene máximos y mínimos.**

4 **La siguiente tabla muestra la cantidad de medicamento en sangre que tiene una persona después de tomar un jarabe.**

TIEMPO (horas)	1	2	3	4	5	6	7
CANTIDAD (mg/dl)	90	75	60	45	30	15	0

a) Haz una gráfica a partir de la tabla.
b) La función representada, ¿es continua?
c) ¿Es creciente o decreciente?
d) ¿Tiene máximo o mínimo?

RECONOCER LAS FUNCIONES PERIÓDICAS

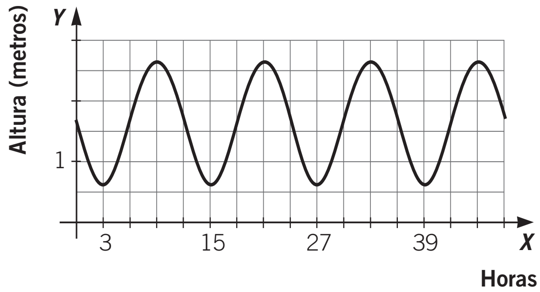
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FUNCIÓN PERIÓDICA

En una **función periódica**, su gráfica se repite cada cierto intervalo, que se denomina período, es decir: $f(x) = f(x + T)$, siendo T el valor del período.

EJEMPLO

Analiza cómo varía la profundidad del agua en una playa a lo largo del tiempo.



Esta función es periódica porque si tomamos la gráfica en el intervalo [3, 15], vemos que se repite exactamente igual en el intervalo [15, 27] y sigue repitiéndose en [27, 39], y así de forma sucesiva.

Se llama período a la longitud del intervalo que se repite:

$$\left.\begin{array}{r} [3, 15] \rightarrow \quad 3 - 15 = 12 \\ [15, 27] \rightarrow 27 - 15 = 12 \\ [27, 39] \rightarrow 39 - 27 = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{En este caso, el período es 12.}$$

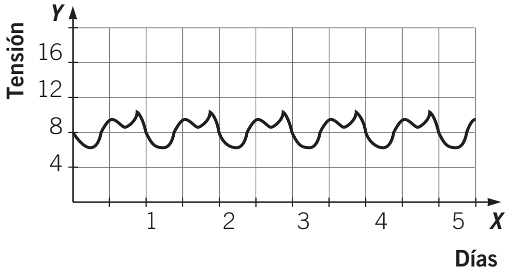
1 **Un tren sale de Alborada a las 12 horas y se dirige a Borán a velocidad constante, llegando en 40 minutos. Para durante 20 minutos y, después, sale de Borán con dirección a Alborada, llegando en 50 minutos. Vuelve a parar 10 minutos y a la hora en punto vuelve a salir hacia Borán respetando los mismos tiempos y las mismas paradas.**

a) Representa gráficamente esta situación (coloca en el eje de abscisas el tiempo, y en el eje de ordenadas la distancia del tren respecto a Alborada).

b) ¿Es periódica esta función? ¿Cuál es su período?

2 **La cantidad de lluvia que cae en un lugar depende de su situación y de la época del año. Inventa los datos y dibuja una gráfica. ¿Es una función periódica? ¿Tiene máximos y mínimos?**

3 **La gráfica muestra cómo varía la tensión arterial mínima de una persona a lo largo de varios días.**

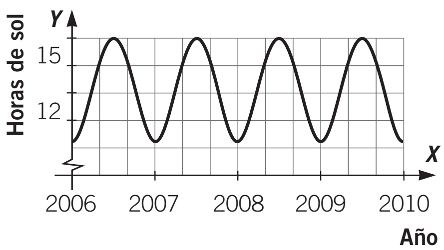


a) ¿Es una función periódica? Si lo es, indica el período.

b) ¿En qué intervalos es creciente? ¿Y decreciente?

c) ¿Cuándo se da un máximo? ¿Y un mínimo?

4 **Observa el gráfico que muestra las horas de luz solar en un lugar en el mes de enero durante 5 años consecutivos.**



a) ¿Es una función periódica?

b) ¿Cuál es el período?

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento?

PROPUESTAS DE EVALUACIÓN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Conviene repasar algunos conceptos estudiados en cursos anteriores y que resultan importantes en el desarrollo de la unidad: las coordenadas de un punto en el plano y las magnitudes directa e inversamente proporcionales, así como una revisión de las expresiones algebraicas trabajadas en la Unidad 3 de este curso.

- Representación de puntos en un sistema de referencia. Lectura de funciones.
- Determinación de magnitudes directa e inversamente proporcionales.
- Trabajo con expresiones algebraicas.

SUGERENCIAS SOBRE LAS EVALUACIONES Y SU CORRECCIÓN

EVALUACIÓN INICIAL

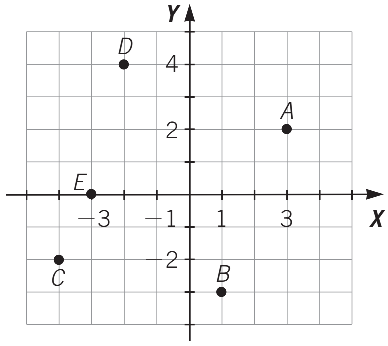
- Esta prueba contiene actividades que repasan aspectos importantes de la unidad: representación gráfica de puntos en el plano, estudio de relaciones de forma algebraica y gráfica, interpretación y lectura de gráficas y estudio de una tabla de proporcionalidad.

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

- En la prueba se ha realizado una selección de los conceptos más importantes de la unidad: trabajo con funciones expresadas de diferentes formas y, en el caso de funciones expresadas mediante expresiones algebraicas: dominio y recorrido, puntos de corte con los ejes, continuidad y crecimiento y decrecimiento.

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Observa los puntos de la gráfica siguiente.**



a) Escribe sus coordenadas.

b) Calcula y dibuja el punto simétrico de *A* respecto del eje de ordenadas.

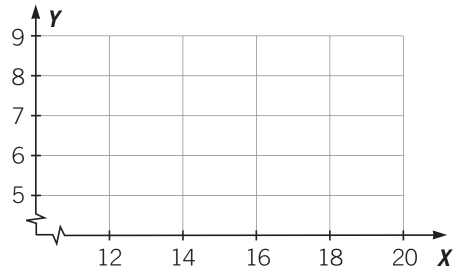
c) Halla el simétrico del punto *B* respecto del eje de abscisas.

d) Calcula y dibuja el punto simétrico de *C* respecto del origen.

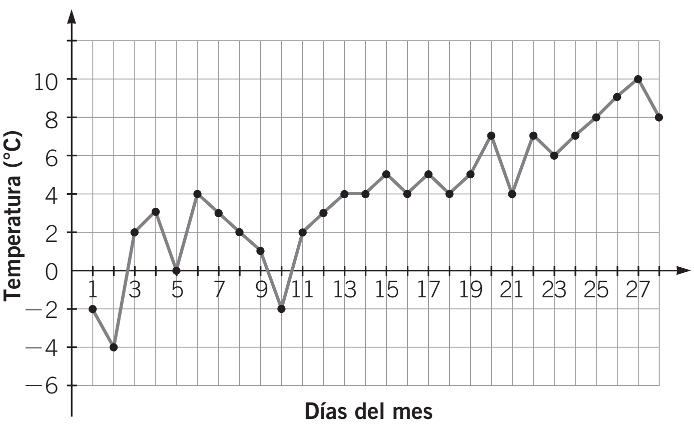
2 **Dados los conjuntos $M = \{12, 14, 15, 16, 18\}$ y $N = \{5, 6, 7, 9, 11\}$, y teniendo en cuenta que un elemento de *A* está relacionado con otro de *B*, si ambos tienen algún divisor común distinto de la unidad:**

a) Escribe los pares de valores que forman esta relación.

b) Represéntalos mediante un sistema de coordenadas.



3 **En una estación meteorológica se registran las diferentes temperaturas mínimas diarias a lo largo del mes de febrero.**



a) ¿Cuántos días se han registrado temperaturas por debajo de 0 °C?

b) ¿Qué día se registró la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

c) Escribe un tramo en el que la temperatura sea creciente.

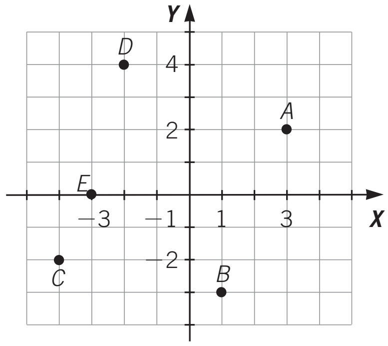
4 **En la tabla están relacionados el peso (en kg) de manzanas y su precio (en €). Determina los valores que faltan.**

Manzanas (kg)	1	2		4		…
Precio (€)	1,30		6		9	

Escribe la expresión algebraica que relaciona el precio y la cantidad de manzanas que se adquiere.

EVALUACIÓN INICIAL: SOLUCIONES

1 **Observa los puntos de la gráfica siguiente.**



a) Escribe sus coordenadas.
A*(3, 2)* **B*(1, −3)*** **C*(−4, −2)***
D*(−2, 4)* **E*(−3, 0)***

b) Calcula y dibuja el punto simétrico de *A* respecto del eje de ordenadas → **A'*(−3, 2)***

c) Calcula el simétrico del punto *B* respecto del eje de abscisas → **B'*(1, 3)***

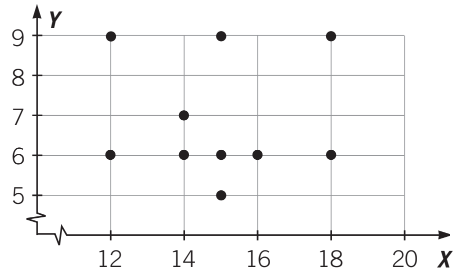
d) Calcula y dibuja el punto simétrico de *C* respecto del origen → **C'*(4, 2)***

2 **Dados los conjuntos *M* = {12, 14, 15, 16, 18} y *N* = {5, 6, 7, 9, 11}, y teniendo en cuenta que un elemento de *A* está relacionado con otro de *B*, si ambos tienen algún divisor común distinto de la unidad:**

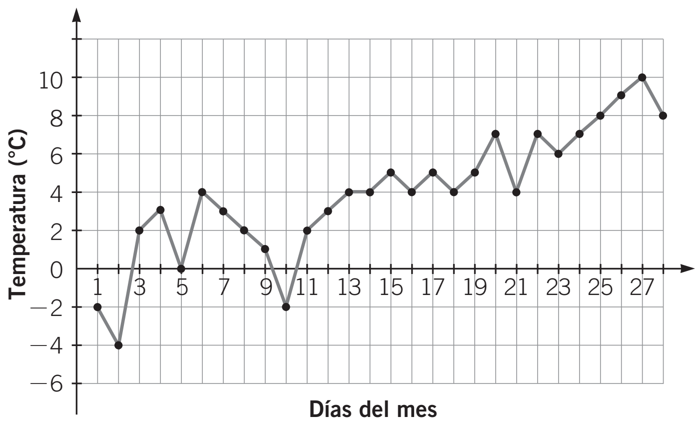
a) Escribe los pares de valores que forman esta relación.

(12, 6), (12, 9), (14, 6), (14, 7), (15, 5), (15, 6), (15, 9), (16, 6), (18, 6), (18, 9)

b) Represéntalos mediante un sistema de coordenadas.



3 **En una estación meteorológica se registran las diferentes temperaturas mínimas diarias a lo largo del mes de febrero.**



a) ¿Cuántos días se han registrado temperaturas por debajo de 0 °C? ***3 días.***

b) ¿Qué día se registró la temperatura máxima? ¿Y la mínima? ***Máxima: 10 °C en el día 27 y mínima: −4 °C en el día 2***

c) Escribe un tramo en el que la temperatura sea creciente. ***Por ejemplo, [10, 13].***

4 **En la tabla están relacionados el peso (en kg) de manzanas y su precio (en €). Determina los valores que faltan.**

Manzanas (kg)	1	2	***4,615***	4	***6,92***	…
Precio (€)	1,30	***2,60***	6	***5,20***	9	**…**

Escribe la expresión algebraica que relaciona el precio y la cantidad de manzanas que se adquiere.
y = 1,3 · x, donde* x *es el peso de las manzanas (en kg) e* y *es el precio (en €).

ERES CAPAZ DE… | EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

Distinguir una relación funcional, y reconocer sus variables independiente y dependiente.

1 **Determina si son o no funciones estas relaciones.**

a) El perímetro de un cuadrado y su área.
b) El número de obreros y el tiempo que tardan en terminar un trabajo.
c) La velocidad y el espacio que recorre un coche en dos horas.
d) La edad de las personas y su altura.

Representar gráficamente relaciones funcionales extraídas de la vida cotidiana.

2 **Se vacía una piscina de dimensiones 8 × 3,5 × 1,5 m, mediante un grifo que expulsa 50 litros de agua por minuto.**

a) Realiza una tabla donde se exprese la cantidad de agua que queda (en metros cúbicos) y el tiempo de expulsión de agua entre $t = 0$ y $t = 120$ (en minutos) de 10 en 10.
b) Determina la fórmula o expresión algebraica que relaciona ambas magnitudes en ese intervalo de tiempo.
c) Representa gráficamente la función.

Expresar una función mediante tablas, gráficas y enunciados.

3 **En la función que asocia a cada número su doble más 3 veces su inverso:**

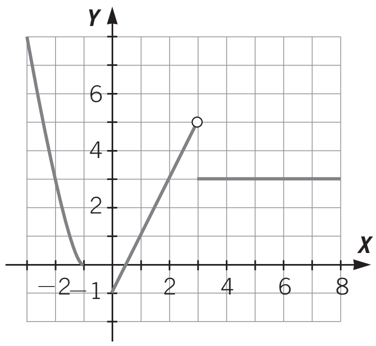
a) Halla su fórmula o expresión algebraica.
b) Calcula $f(4)$ y $f(-4)$.
c) Determina el dominio de la función.
d) ¿Es una función continua o discontinua?

RELACIÓN DE CAPACIDADES	ACTIVIDADES
• Enumerar e identificar elementos	1, 8
• Definir, completar y seleccionar propiedades, relaciones, etc.	
• Transformar, distinguir, asociar e interpretar datos y relaciones	2
• Extrapolar, deducir e inferir reglas o leyes	5
• Aplicar, demostrar, estimar, resolver, etc.	2, 3, 4, 6

Determinar el dominio y recorrido de una función, dada la gráfica de la función.

4 **Considera la relación que asocia a cada número real el doble de su cuadrado. ¿Es una función esta relación? ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido? Obtén su expresión algebraica.**

5 **Calcula el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica es la siguiente.**

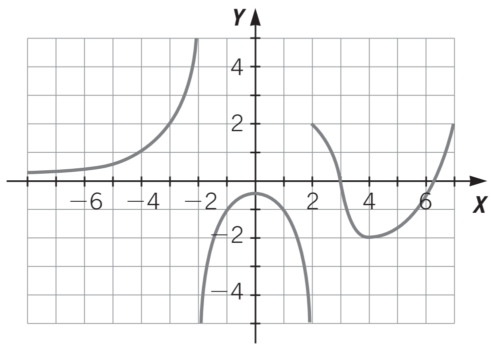


Calcular los puntos de corte de una función con los ejes.

6 **Dada la función $y = x^2 - x - 6$, halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas.**

Reconocer los intervalos de crecimiento de una función y sus máximos y mínimos a partir de su gráfica.

7 **Observa la gráfica e indica sus intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos.**



8 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones:**

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

RELACIÓN DE CAPACIDADES	***ACTIVIDADES***
• *Clasificar y discriminar según criterios*	*1, 3, 6, 8*
• *Contrastar operaciones, relaciones, etc.*	
• *Combinar, componer datos, resumir, etc.*	
• *Deducir, formular hipótesis, generalizar, etc.*	*3*

PROPUESTAS DE EVALUACIÓN

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD: SOLUCIONES

1 **Determina si son o no funciones estas relaciones.**

a) El perímetro de un cuadrado y su área.
b) El número de obreros y el tiempo que tardan en terminar un trabajo.
c) La velocidad y el espacio que recorre un coche en dos horas.
d) La edad de las personas y su altura.

Son funciones a), b) y c).

2 **Se vacía una piscina de dimensiones 8 × 3,5 × 1,5 m, mediante un grifo que expulsa 50 litros de agua por minuto.**

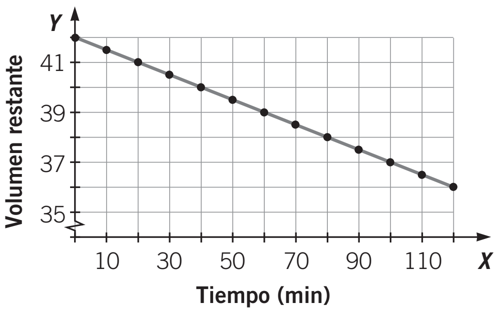
a) Realiza una tabla donde se exprese la cantidad de agua que queda (en metros cúbicos) y el tiempo de expulsión de agua entre $t = 0$ y $t = 120$ (en minutos) de 10 en 10.
b) Determina la fórmula o expresión algebraica que relaciona ambas magnitudes en ese intervalo de tiempo.
c) Representa gráficamente la función.

a) Litros de agua en la piscina → 8 · 3,5 · 1,5 = 42 m³

Tiempo (min)	*0*	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*100*	*110*	*120*
Volumen (m³)	*42*	*41,5*	*41*	*40,5*	*40*	*39,5*	*39*	*38,5*	*38*	*37,5*	*37*	*36,5*	*36*

b) Volumen $= 42 - 0{,}05 \cdot$ tiempo $\rightarrow y = 42 - \dfrac{1}{20}x$.

c)



3 **En la función que asocia a cada número su doble más 3 veces su inverso:**

a) Halla su fórmula o expresión algebraica.
b) Calcula $f(4)$ y $f(-4)$.
c) Determina el dominio de la función.
d) ¿Es una función continua o discontinua?

a) $y = f(x) = 2x + \dfrac{3}{x}$

b) $f(4) = 8 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{35}{4}$ $\qquad f(-4) = -8 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-35}{4}$

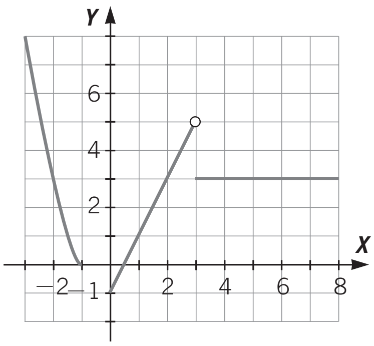
c) Dominio: Todos los números reales menos el cero.

d) No es continua en $x = 0$.

4 **Considera la relación que asocia a cada número real el doble de su cuadrado. ¿Es una función esta relación? ¿Cuál es su dominio? ¿Y su recorrido? Obtén su expresión algebraica.**

Es una función cuyo dominio son todos los números reales, y el recorrido, los números reales positivos. Su expresión algebraica es $y = 2x^2$.

5 **Calcula el dominio y el recorrido de la función cuya gráfica es la siguiente.**



Dom $(f) = (-\infty, -1] \cup [0, 3) \cup [3, +\infty)$

Im $(f) = [-1, +\infty)$

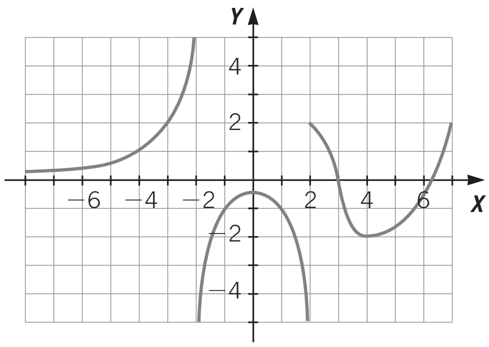
6 **Dada la función $y = x^2 - x - 6$, halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas.**

- *Con el eje* OX: $x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{Bmatrix} x = -2 \\ x = 3 \end{Bmatrix} \rightarrow$ Hay dos puntos: P$(-2, 0)$ y Q$(3, 0)$
- *Con el eje* OY: $f(0) = 0^2 - 0 - 6 = -6 \rightarrow$ *Hay un punto:* R$(0, -6)$

7 **Observa la gráfica e indica sus intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos.**

Es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$ *y decreciente en* $(0, 2) \cup (2, 4)$.

Tiene un máximo en el punto P$\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ *y un mínimo en* Q$(4, -1)$.



8 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones:**

a) $y = x^2 + 2$ b) $y = \dfrac{x}{x + 2}$

a) Es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ *y creciente en el intervalo* $(0, +\infty)$.

b) Es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$ *y también es creciente en el intervalo* $(-2, +\infty)$.

12 Funciones lineales y afines

PROGRAMACIÓN DE AULA

OBJETIVOS

- Reconocer las situaciones donde aparecen funciones lineales.
- Representar gráficamente funciones lineales.
- Reconocer la pendiente de una función lineal y asociarla con el crecimiento y decrecimiento de la misma.
- Diferenciar las situaciones donde aparecen funciones afines.
- Distinguir la pendiente y la ordenada en el origen de una función afín, y representar las funciones afines.
- Reconocer y representar gráficamente funciones constantes.
- Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- Determinar las posiciones relativas de dos rectas a partir de sus ecuaciones.
- Hallar el punto de corte de dos rectas secantes de manera gráfica y analítica.
- Estudiar funciones lineales y afines extraídas de contextos reales, y representarlas gráficamente.

CONTENIDOS

CONCEPTOS

- Función lineal, $y = mx$.
- Pendiente de una recta.
- Función afín, $y = mx + n$. Ordenada en el origen.
- Función constante, $y = n$.
- Ecuación de una recta.
- Posiciones relativas de dos rectas.

PROCEDIMIENTOS, DESTREZAS Y HABILIDADES

- Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$.
- Utilización de la relación entre la pendiente de una función y su crecimiento.
- Obtención de la pendiente y ordenada de funciones de la forma $y = mx + n$, y representación gráfica de las mismas.
- Representación de rectas paralelas al eje X y al eje Y.
- Cálculo de la ecuación de una recta conocidos dos puntos, su pendiente y la ordenada en el origen, o su pendiente y un punto por el que pasa.
- Identificación de las posiciones relativas de dos rectas estudiando sus ecuaciones.
- Obtención del punto de corte de dos rectas secantes.

ACTITUDES

- Gusto por la representación limpia y cuidadosa de funciones.
- Valoración de la importancia de las funciones en el estudio de fenómenos.
- Reconocimiento de la presencia de las funciones lineales y afines en distintas situaciones de la vida cotidiana.

COMPETENCIAS QUE SE TRABAJAN

- Representar y analizar relaciones funcionales sencillas (función lineal), utilizando tanto las técnicas con lápiz y papel como la calculadora u ordenador.
- Utilizar el lenguaje algebraico para expresar situaciones problemáticas y relacionar esta forma expresiva con otras: tabular, gráfica, descriptiva...
- Conocer, valorar y utilizar sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como el orden, contraste, precisión y revisión sistemática, y crítica de los resultados.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Reconocer y representar funciones lineales.
- Estudiar si una función lineal es creciente o decreciente, calculando la pendiente de la misma.
- Resolver problemas reales donde aparezcan funciones lineales y funciones afines.
- Reconocer funciones afines y representarlas, dadas su pendiente y su ordenada en el origen.
- Representar rectas paralelas a los ejes de coordenadas.
- Obtener la ecuación de una recta a partir de dos puntos por los que pasa, de su pendiente y la ordenada en el origen, o de su pendiente y un punto por el que pasa.
- Identificar la posición relativa de dos rectas estudiando sus ecuaciones.
- Hallar el punto de corte de dos rectas secantes.
- Analizar gráficas de varias rectas representadas en los mismos ejes.

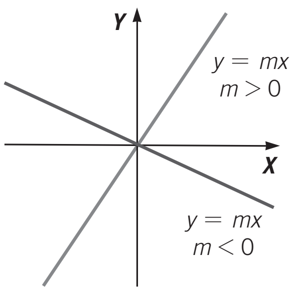
ESQUEMA DE LA UNIDAD

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD

Función de proporcionalidad directa

Llamamos así a las funciones de la forma $y = mx$.

Su representación es una recta, con pendiente m, que pasa por el origen de coordenadas.

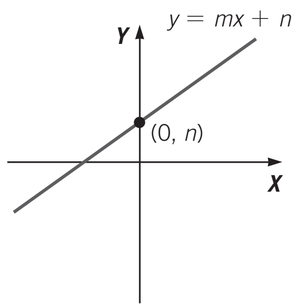


Función afín

Son funciones de la forma $y = mx + n$.

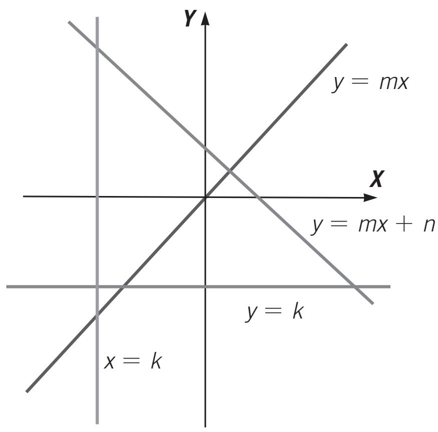
Su representación es una recta, con pendiente m, y cuya ordenada en el origen es $(0, n)$.

No pasan por el origen de coordenadas.



Ecuaciones de la recta

- **Rectas del tipo $y = mx$.**
  Son rectas de pendiente m que pasan por el origen de coordenadas.
- **Rectas del tipo $y = mx + n$.**
  Son rectas de pendiente m y ordenada en el origen $(0, n)$.
- **Rectas del tipo $y = k$.**
  Son rectas paralelas al eje X.
- **Rectas del tipo $x = k$.**
  Son rectas paralelas al eje Y. No representan una función.



LECTURA INICIAL

El cálculo tiene dos padres

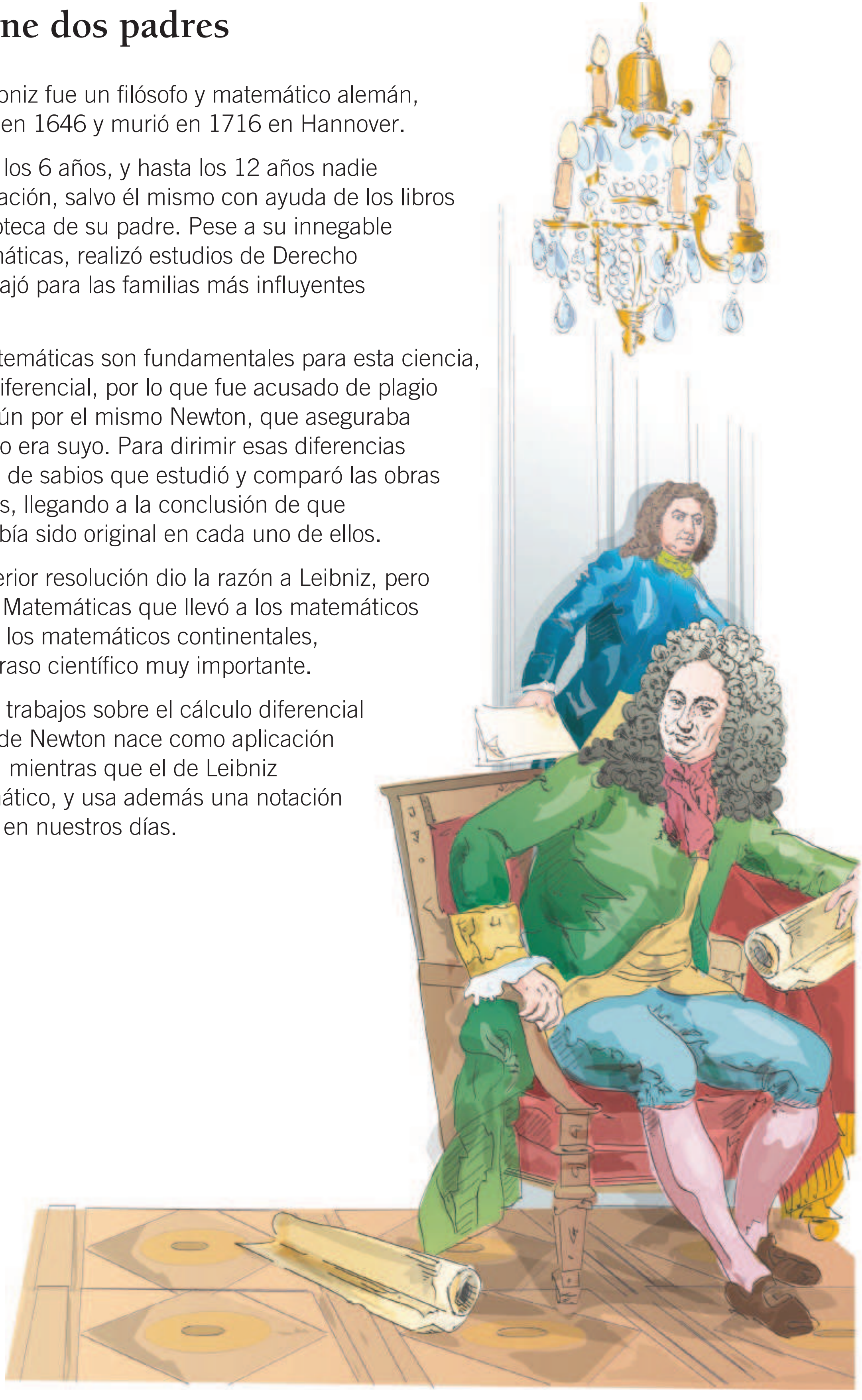
Gottfried Wilhelm Leibniz fue un filósofo y matemático alemán, que nació en Leipzig en 1646 y murió en 1716 en Hannover.

Se quedó huérfano a los 6 años, y hasta los 12 años nadie se ocupó de su educación, salvo él mismo con ayuda de los libros que había en la biblioteca de su padre. Pese a su innegable interés por las Matemáticas, realizó estudios de Derecho y tras doctorarse trabajó para las familias más influyentes de Alemania.

Sus aportaciones matemáticas son fundamentales para esta ciencia, e inventó el cálculo diferencial, por lo que fue acusado de plagio por los discípulos y aún por el mismo Newton, que aseguraba que el descubrimiento era suyo. Para dirimir esas diferencias se creó una comisión de sabios que estudió y comparó las obras publicadas por ambos, llegando a la conclusión de que el descubrimiento había sido original en cada uno de ellos.

Esa disputa y la posterior resolución dio la razón a Leibniz, pero creó un cisma en las Matemáticas que llevó a los matemáticos ingleses a aislarse de los matemáticos continentales, lo que produjo un retraso científico muy importante.

La publicación de los trabajos sobre el cálculo diferencial revela que el trabajo de Newton nace como aplicación al mundo de la física, mientras que el de Leibniz es puramente matemático, y usa además una notación que todavía se utiliza en nuestros días.



CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Los límites de la proporcionalidad

Tanto la proporcionalidad directa como la inversa tienen sus límites de aplicación en la realidad, como se observa en este ejemplo.

Diez obreros han realizado una obra en 32 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en realizarla 40 obreros? ¿Y 80 obreros? ¿Y 160 obreros? ¿Y 320 obreros?

Los 10 obreros realizan la obra en 32 días, y el producto de las dos cantidades correspondientes es: $10 \cdot 32 = 320$ (constante de proporcionalidad).

Sabemos que los valores correspondientes a 40, 80, 160 y 320, cumplen que:

$$40y_1 = 80y_2 = 160y_3 = 320y_4 = 320$$

$$y_1 = 8 \text{ días},\ y_2 = 4 \text{ días},\ y_3 = 2 \text{ días},\ y_4 = 1 \text{ día}$$

¿Podrán realizar la obra 160 obreros en 2 días, o 320 obreros en 1 día?

Indica algunas razones que apoyen tu respuesta.

El sonido y su velocidad

En el ambiente casi siempre hay sonidos: en la música, en la voz, en los ruidos…

El sonido se transmite por la vibración de las partículas del medio material en el que se propaga. Por eso, en el vacío, donde no existen partículas, el sonido no se transmite. Dos astronautas en la superficie lunar, aunque hablasen, no se podrían oír el uno al otro.

Dado que el sonido depende para su transmisión del medio en el que se propaga, la velocidad de esa transmisión también depende de dicho medio.

En el aire, la velocidad del sonido (su velocidad de propagación) es de 340 m/s. Así, por ejemplo, es fácil calcular la distancia a la que se encuentra una tormenta.

En primer lugar, observamos un relámpago. Desde ese instante comenzamos a contar los segundos. Cuando oímos el trueno, que es la onda sonora asociada a ese relámpago, paramos de contar. Multiplicando por 340 ese número de segundos, obtenemos la distancia en metros a la que se halla el punto donde se produjo el relámpago.

Los murciélagos y otros animales, así como los submarinos, utilizan un método similar al anterior para calcular la distancia a la que está un objeto. Lanzan una onda sonora, y en función del tiempo que tarda en llegar el sonido al objeto y volver, estiman la distancia a la que está dicho objeto (los primeros con una facultad natural y los segundos mediante cálculos matemáticos).

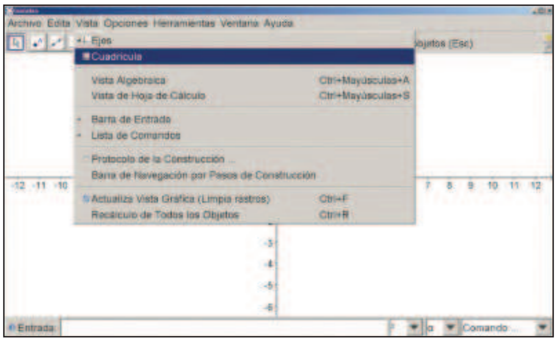
MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

GeoGebra
www.geogebra.org

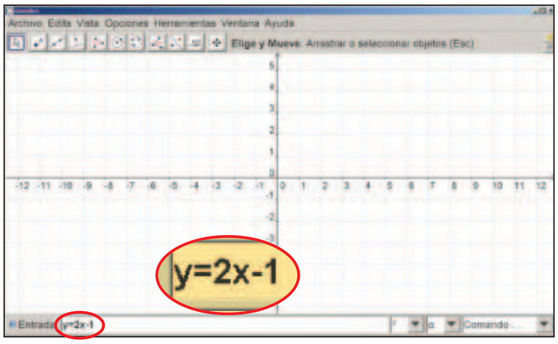
Representa las siguientes funciones lineales y afines.

a) $y = 2x - 1$ **b)** $y = 3x - 2$ **c)** $y = x$ **d)** $y = -x + 1$

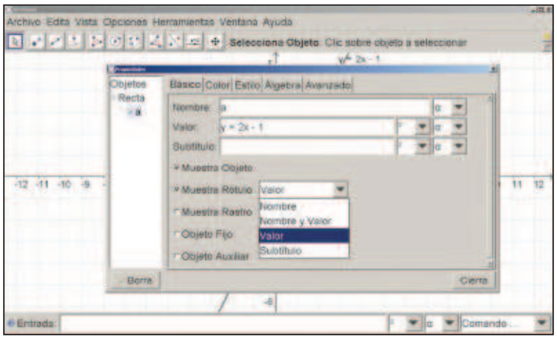
1. Tras abrir el lienzo de dibujo en el menú **Vista**, seleccionamos las dos primeras opciones, **Ejes** y **Cuadrícula**.



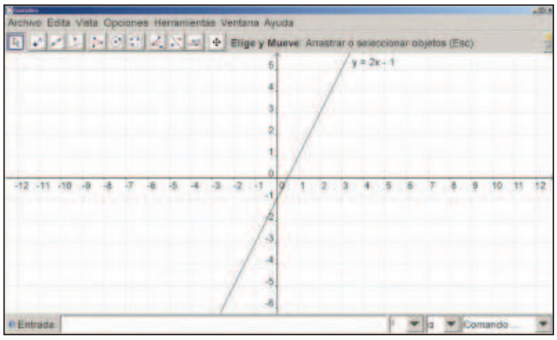
2. Anotamos la expresión algebraica de la función en la barra de **Entrada** de la parte inferior de la pantalla, y pulsamos en **Intro**.



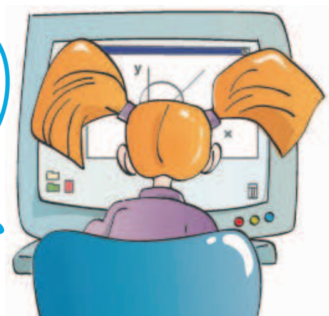
3. Seleccionamos la opción **Propiedades** en el menú **Edita**, después marcamos **Muestra Rótulo** y elegimos la opción **Valor**.

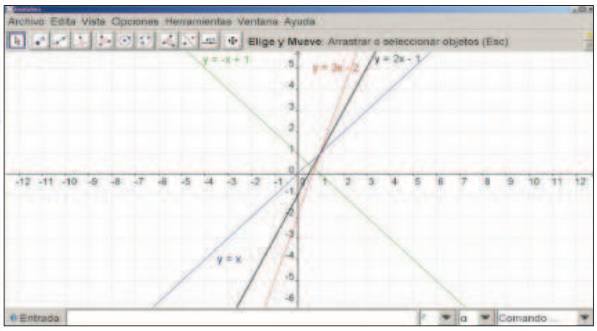


4. En la ventana anterior pulsamos en **Cierra** y aparece la gráfica de la función con su expresión algebraica.



5. Repetimos el proceso para el resto de expresiones algebraicas y obtenemos las demás gráficas.





SUGERENCIAS PARA RESOLVER LAS ACTIVIDADES

1 Como en el ejercicio resuelto, tras abrir el lienzo de dibujo seleccionamos, en el menú **Vista**, las opciones **Ejes** y **Cuadrícula**.

Escribimos las distintas funciones lineales y afines que nos propone la actividad y las representamos siguiendo el proceso mostrado en el ejercicio resuelto.

Podemos variar los colores y el aspecto en el menú que aparece tras seleccionar la opción **Propiedades**…

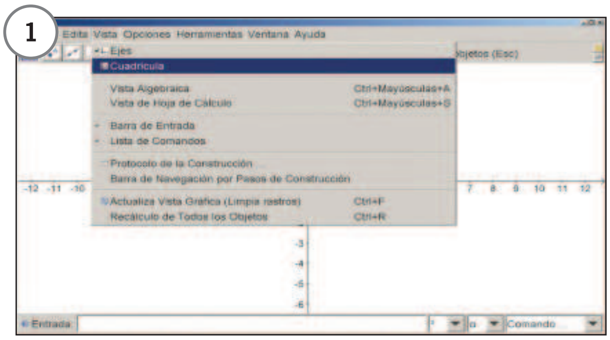
2 a) Escribimos en la barra de entrada varias funciones afines que tengan la misma pendiente, m, pulsando después de cada una la tecla **Intro** y comprobamos que sus gráficas son rectas paralelas.

b) Escribimos en la barra de entrada varias funciones afines que tengan la misma ordenada en el origen, n, pulsando después de cada una la tecla **Intro** y comprobamos que sus gráficas son rectas que pasan todas por un mismo punto $(0, n)$.

PASO A PASO

GeoGebra
www.geogebra.org

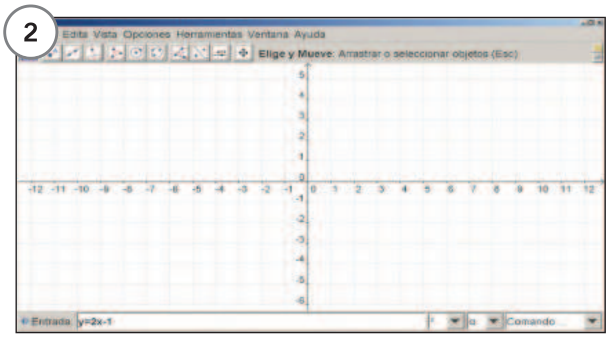
1



En el menú **Vista** marcamos las opciones **Ejes** y **Cuadrícula**. Aparecen los ejes de coordenadas y una cuadrícula con líneas discontinuas en cada unidad.

El centro de coordenadas aparece desplazado hacia la izquierda. Lo podemos mover pulsando la tecla **Intro** y arrastrándolo con el ratón, manteniendo pulsado el botón izquierdo.

2

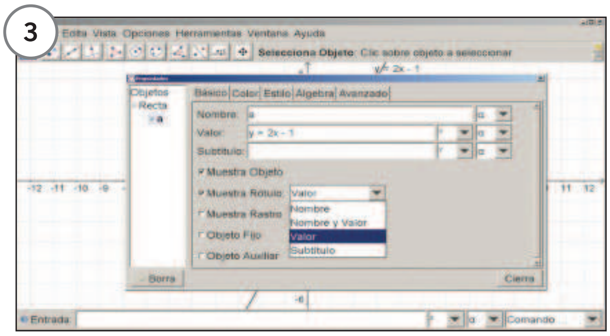


En la parte inferior de la pantalla aparece la barra de entrada.

Escribimos la ecuación de la recta $\boldsymbol{y = 2x - 1}$ y pulsamos la tecla **Intro**. Aparece en el lienzo de dibujo la gráfica de la recta.

El resultado es el mismo si escribimos solo $\boldsymbol{2x - 1}$.

3

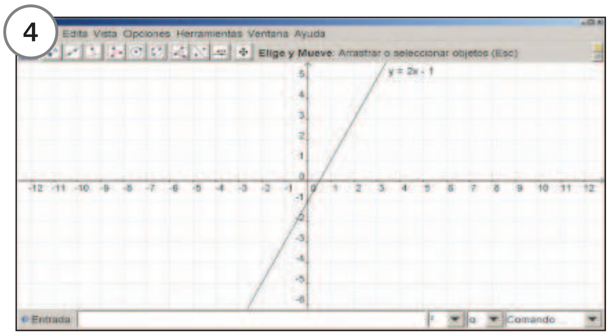


Pulsamos en el menú **Edita** y seleccionamos la opción **Propiedades**, abriéndose una ventana de diálogo con diversas opciones.

En esta ventana, en la pestaña **Básico** marcamos la opción **Muestra Rótulo** y elegimos la opción **Valor**.

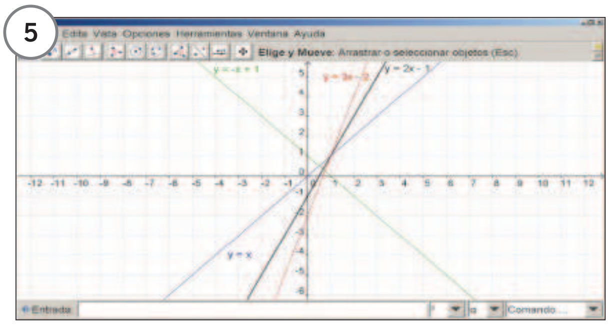
En el resto de pestañas se pueden elegir opciones como el color de la gráfica, el grosor del trazo, etc.

4



Tras seleccionar las opciones que queramos del paso anterior pulsamos el botón **Cierra**. Aparece de nuevo la gráfica con las especificaciones que hemos elegido.

5



Repetimos el proceso para el resto de funciones del ejercicio.

Conviene que en las opciones se marquen diferentes colores para las funciones, de esta manera será mucho más fácil reconocerlas.

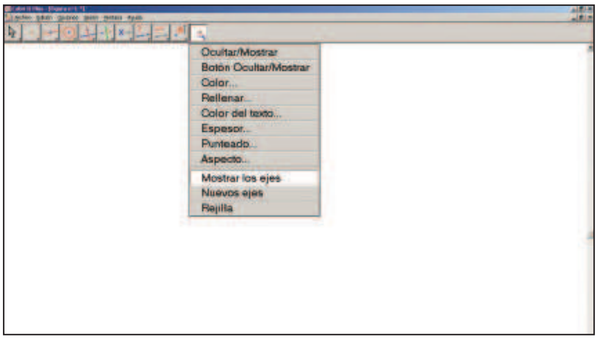
MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

CABRI

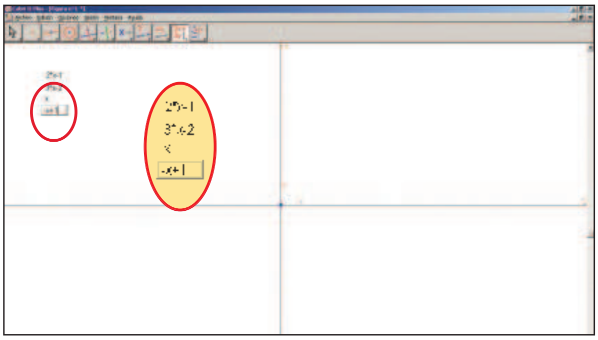
Representa las siguientes funciones lineales y afines.

a) $y = 2x - 1$ **b)** $y = 3x - 2$ **c)** $y = x$ **d)** $y = -x + 1$

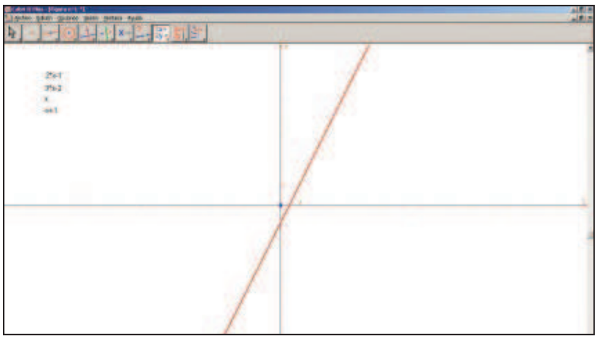
1. Tras abrir el lienzo de dibujo seleccionamos la opción **Mostrar los ejes**.



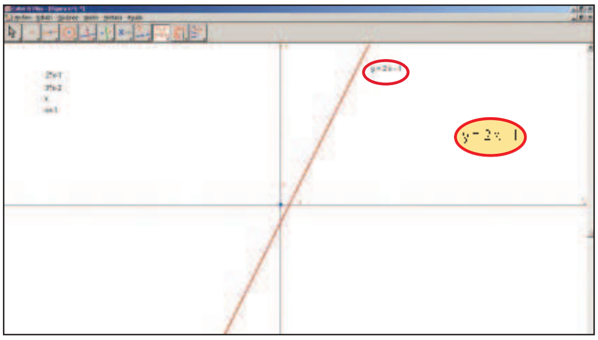
2. Elegimos la herramienta y anotamos la expresión algebraica de cada una de las funciones.



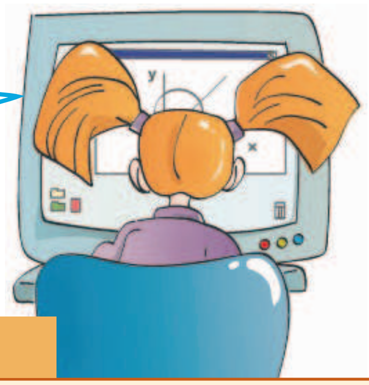
3. Con la herramienta señalando la primera expresión y después uno de los ejes, obtenemos la primera gráfica.

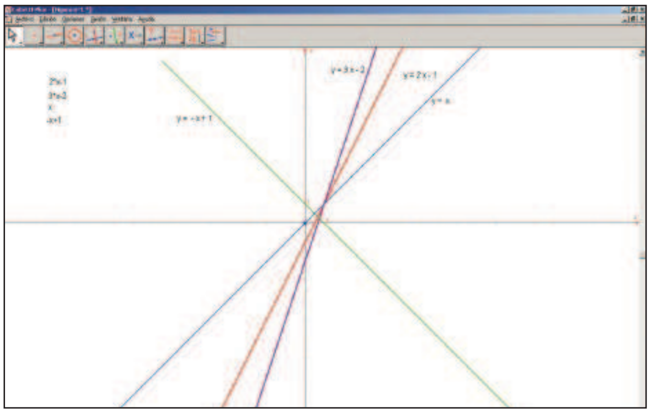


4. Seleccionando la herramienta, señalando la gráfica de la función aparece su ecuación de la forma $y = mx + n$.



5. Repetimos los pasos 3 y 4 para el resto de expresiones algebraicas y obtenemos las demás gráficas.





ACTIVIDADES

PRACTICA

1. Representa estas funciones lineales y afines.

a) $y = -2x$

b) $y = x - 1$

c) $y = -2x + 2$

d) $y = 3$

INVESTIGA

2. Comprueba que, para las funciones $y = mx + n$:

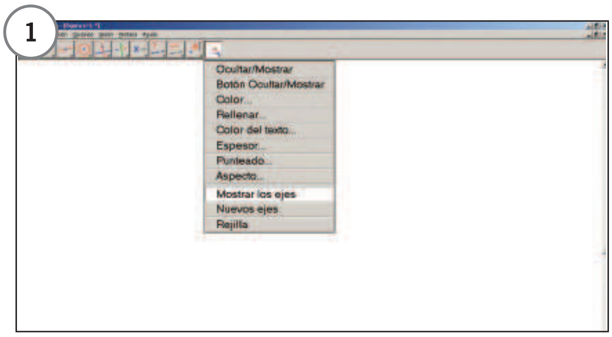
a) Si m es un valor fijo y variamos n, sus gráficas son rectas paralelas.

b) Si n es un valor fijo y variamos m, sus gráficas son rectas que pasan por el punto $(0, n)$.

PASO A PASO

CABRI

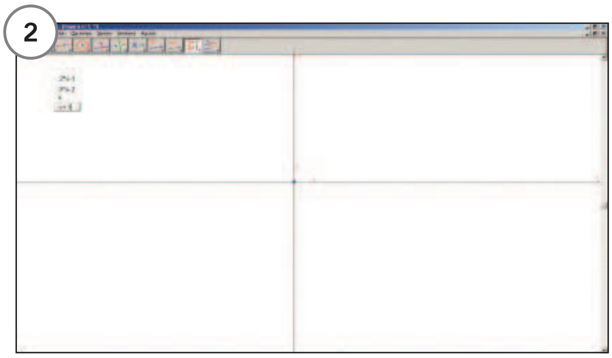
1



Para que aparezcan los ejes coordenados seleccionamos la opción **Mostrar ejes**, .

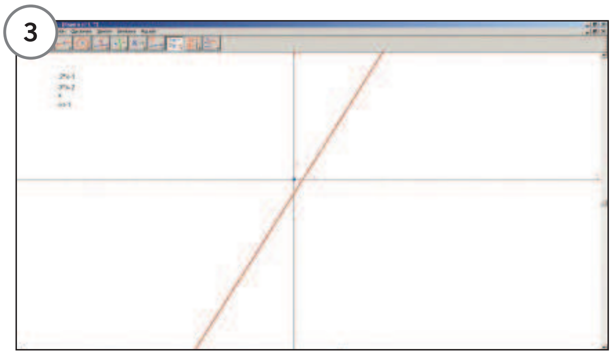
Tras efectuar esta operación aparecen en pantalla los ejes cartesianos.

2



Elegimos la herramienta y anotamos el segundo miembro de cada una de las funciones. Es decir, para la primera función, que es $y = 2x - 1$, escribimos $\mathbf{2x - 1}$.

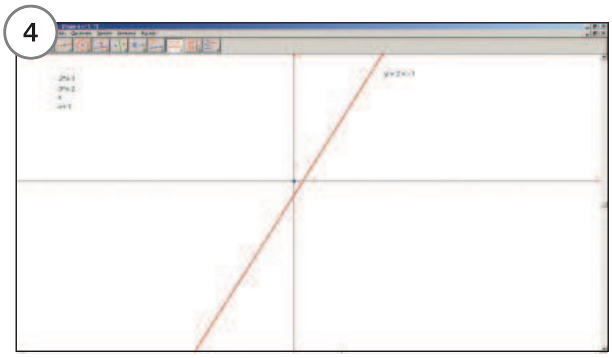
3



Seleccionamos la herramienta y señalamos la primera expresión, $2x - 1$. Después pinchamos sobre uno de los ejes coordenados y aparece la gráfica de la función $y = 2x - 1$.

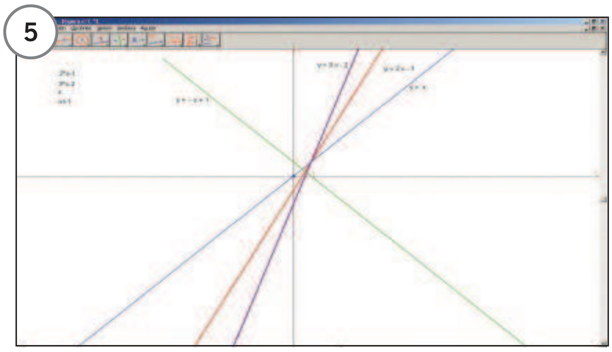
Con las herramientas , y , podemos modificar el color, el grosor del trazo y el tipo del trazo de la gráfica.

4



Para que aparezca la ecuación de la función al lado de su representación gráfica, seleccionamos la herramienta .
Pinchamos sobre la gráfica y aparece su ecuación de la forma $y = 2x - 1$.

5



Repetimos el proceso para el resto de las ecuaciones que hemos escrito y aparecen las gráficas de las funciones.

EN LA VIDA COTIDIANA...

Matemáticas en la prensa

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Realizar cálculos con magnitudes asociadas a un periódico: área de papel, grosor y tirada. • Conocer el fenómeno de la publicidad en la prensa escrita. • Relacionar y trabajar la proporcionalidad directa con los periódicos. • Relacionar y trabajar la proporcionalidad inversa con los periódicos.

1 Las dimensiones, el grosor y la tirada de un periódico

Los medios de comunicación tienen una enorme influencia en la sociedad actual. Vamos a estudiar en este proyecto uno de los más importantes: los periódicos o diarios, que son parte de la prensa escrita.

Para ello será conveniente que compres o pidas varios periódicos con los que puedas realizar las actividades que te proponemos.

La rotativa de un periódico, para hacer una estimación de los gastos, necesita calcular la cantidad de papel en metros cuadrados que tiene que comprar para la elaboración del periódico durante un mes.

Las dimensiones de este diario son 29×41 cm, tiene 72 páginas y su tirada, es decir, el número de periódicos que se imprimen al día, es de 180 000 ejemplares.

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *¿Qué área de papel se gasta en imprimir un ejemplar del periódico? ¿Y en imprimir mil? ¿Y diez mil?*

b) *¿Cuánto papel se utiliza en la tirada diaria? ¿Y en la tirada mensual?*

c) *¿Qué tipo de relación existe entre la tirada de un periódico y el área del papel que emplea?*

d) *Expresa algebraicamente la relación anterior y represéntala gráficamente.*

El dueño de un kiosco vende cada día 100 ejemplares de diarios deportivos y 80 de diarios de información general. Quiere poner a la venta 50 ejemplares de diarios económicos y necesita saber el espacio (volumen) adicional que necesita.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué grosor tiene una página de periódico? Para obtenerlo mide el grosor de un periódico y divide el resultado entre el número de páginas.*

b) *Calcula el espacio (volumen) que ocupa un periódico. Suponemos que tiene 70 páginas, de las dimensiones indicadas, y que su grosor de página es el que has hallado en el apartado anterior.*

c) *Expresa algebraicamente la función que relaciona el volumen de un periódico con su número de páginas. Represéntala.*

d) *Suponiendo que todos los periódicos del kiosco tienen el mismo grosor, ¿qué volumen ocupaban en el kiosco los periódicos deportivos y de información general?*

e) *¿Qué volumen ocuparán todos los periódicos que van a poner a la venta en el kiosco?*

f) *Expresa algebraicamente la función que relaciona el volumen con el número de periódicos puestos a la venta. Represéntala.*

2 Los anuncios en la prensa

Una de las principales fuentes de ingresos de las empresas que publican periódicos es el dinero obtenido por la inclusión en ellos de anuncios publicitarios.

Si observas un periódico verás que casi todas las páginas llevan anuncios de distinta índole. Además, suele existir una sección específica dedicada a los anuncios por palabras incluidos por particulares y empresas.


Anuncios por pa
COBRAMOS A DOMICILIO • 242 25 00* 20 LINEAS • PUEDE VD. PAGAR CON CUALQUIER TARJETA DE CREDITO • GRAN VIA, 62. DE 8.30 a 20.30 H

ANUNCIOS POR PALABRAS
Mateo Inurria, 15 - 28036 Madrid
SUSCRIPCIONES: Teléfonos 250 65 06 - 259 28 00 y en nuestra administración

APARTAMENTOS
OFERTAS

LOCALES
OFERTAS

La dirección de un periódico quiere revisar el dinero que gana en los anuncios por palabras. Las tarifas por palabra (en euros) son las que figuran en la siguiente tabla.

	Día laborable	Domingo
Anuncio normal	0,96	1,20
Anuncio destacado	1,33	1,51

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Si en un día laborable, el periódico registra 80 000 palabras en anuncios normales y 20 000 palabras en anuncios destacados, ¿qué ingresos obtiene en total?*

b) *Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona, en un día laborable, el número de palabras con los ingresos. Hazlo para los anuncios normales y destacados por separado.*

c) *Representa en una misma gráfica las funciones del apartado b). ¿Cuál tiene mayor pendiente? ¿Qué gráfica está por encima de la otra?*

d) *La dirección del periódico quiere crear una única categoría de anuncios. ¿Cuántos euros por palabra debería cobrar en un día laborable para que los ingresos totales fuesen los mismos que los obtenidos en el apartado a)?*

e) *Representa la función que relaciona los ingresos totales y el número de palabras en un día laborable con esa única categoría de anuncios. ¿Qué situación tiene la gráfica respecto de las representadas en el apartado b)?*

f) *Responde a los apartados a), b), c), d) y e), considerando que los anuncios se publican un domingo.*

La dirección del periódico anterior ha decidido, finalmente, crear una única categoría de anuncios por palabras sin distinguir entre días laborables y festivos. Desea obtener cada mes un total de 3 millones de euros de ingresos, pero aún no ha decidido a qué precio cobrar cada palabra.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Si se fija el precio por palabra a 1 €, ¿cuántas palabras deberán ponerse en la sección de anuncios por palabras para obtener los ingresos previstos?*

b) *Si en un mes se incluyen 80 000 palabras diarias, ¿a qué precio debería cobrarse cada palabra para conseguir los ingresos previstos?*

c) *Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el precio por palabra y el número de palabras que se deben insertar al día para obtener los ingresos deseados.*

d) *Representa la función anterior. ¿Qué forma tiene su gráfica?*

e) *La dirección del periódico sabe que, en el mes de diciembre, el número de palabras se incrementa en un 10 %. Si aumenta el precio por palabra un 15 %, ¿en qué porcentaje aumentarán los ingresos totales respecto de los 3 millones?*

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Utilizar tablas, gráficas y ecuaciones

Estrategia Hay problemas que se pueden resolver de distintas formas, siendo importante decidir cuál es la más adecuada. Utilizar tablas, gráficas y ecuaciones es útil en muchos casos.

PROBLEMA RESUELTO

Un albañil y su ayudante son contratados para hacer la cerca de un jardín. El ayudante comienza a trabajar a las 8 de la mañana y cobra 90 € por cada hora de trabajo, y el albañil empieza a trabajar a las 10 cobrando 120 € por hora.

a) Obtén la ecuación del dinero que cobra cada uno de ellos desde que empiezan a trabajar.

b) A partir de la ecuación, ¿cuánto han ganado ambos cuando el ayudante ha trabajado 4 horas?

c) Obtén las gráficas correspondientes.

d) A partir de las gráficas, di cuánto habían ganado a las 13 horas.

Planteamiento y resolución

a) Empiezan a trabajar a las 8 horas el ayudante y a las 10 el albañil, existiendo siempre una diferencia de 2 horas. Por tanto:

Albañil: $120x$ €

Ayudante: $90(x + 2)$ € $= 90x + 180$ €

b) Cuando el ayudante lleva 4 horas trabajando, el albañil ha trabajado 2 horas, luego $x = 2$.

Albañil: $120 \cdot 2 = 240$ €

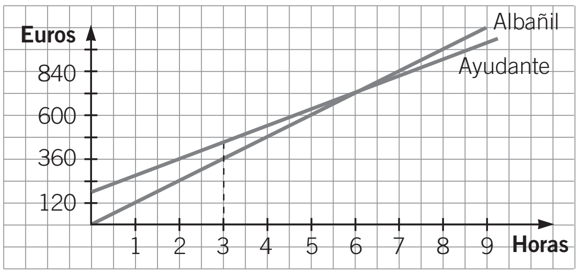
Ayudante: $90 \cdot 2 + 180 = 360$ €

c) Representación gráfica:

Albañil: $y = 120x$

Ayudante: $y = 90x + 180$

d) A las 13 horas, el albañil lleva 3 horas trabajando, luego obtiene 360 € y el ayudante 450 €.



PROBLEMA PROPUESTO

Considerando el problema anterior:

a) Cuando el ayudante ha trabajado 3 horas, ¿cuánto ha ganado cada uno?

b) Construye una tabla que relacione el número de horas trabajadas por el albañil y su ayudante y el dinero ganado por ambos.

c) Representa gráficamente los valores de la tabla. ¿A qué hora han ganado la misma cantidad? ¿Cuánto dinero es?

d) ¿Puedes deducir la fórmula que determina lo que gana el albañil según las horas trabajadas? ¿Y su ayudante?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

INTRODUCCIÓN

La representación gráfica de funciones de proporcionalidad es una de las formas más directas de entender y verificar la relación entre variables. Estas gráficas se utilizan en el ámbito científico para interpretar y modelizar las leyes que rigen algunos fenómenos.

Conviene mostrar a los alumnos que, conociendo estas funciones y gráficas, se pueden describir fenómenos naturales y, en algunos casos, hasta predecirlos.

Es importante que los alumnos tengan clara la relación entre la expresión algebraica de una función de proporcionalidad y su representación gráfica, y que sean capaces de obtener una cualquiera de ellas a partir de la otra.

El cálculo de la ecuación de una recta presenta también cierta dificultad dependiendo de los datos, por lo que hay que insistir en su obtención, así como aprender a distinguir si dos rectas dadas son paralelas o secantes.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Función de proporcionalidad directa o función lineal*: $y = mx$. Su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas.
- *Función afín*: $y = mx + n$. Su gráfica es una recta de pendiente m. La *ordenada en el origen* es n.
- Si la pendiente de una recta es positiva, $m > 0$, la recta es creciente. Si la pendiente de una recta es negativa, $m < 0$, la recta es decreciente.
- *Ecuación de una recta que pasa por dos puntos*: se calcula la pendiente de la recta; se sustituyen las coordenadas de uno de los puntos dados en la ecuación general de la recta, y se obtiene la ordenada en el origen; luego, con los valores de la pendiente y la ordenada, se escribe la ecuación de la recta.
- *Rectas paralelas*: tienen igual pendiente.
- *Rectas secantes*: tienen distinta pendiente. Se cortan en un punto que se obtiene gráfica o analíticamente.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Conocer la función de proporcionalidad directa.	• Función lineal o de proporcionalidad directa. • Pendiente de una recta. • Representación gráfica.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx$. • Resolución de problemas reales representados por funciones lineales.
2. Conocer la función afín.	• Función afín. • Pendiente de una recta. • Ordenada en el origen. • Representación gráfica.	• Reconocimiento y representación de funciones de la forma $y = mx + n$. • Comparación de rectas en función de su pendiente, dependiendo del crecimiento y decrecimiento.
3. Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.	• Cálculo de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, conocidos su pendiente y la ordenada en el origen, o su pendiente y un punto por donde pasa.
4. Determinar la posición relativa de dos rectas.	• Posición relativa de dos rectas respecto a sus pendientes. • Punto de corte de dos rectas secantes.	• Determinación de si dos rectas son paralelas o secantes, de manera gráfica y analítica. • Cálculo del punto de corte.

OBJETIVO 1

CONOCER LA FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

FUNCIÓN LINEAL

- Una **función de proporcionalidad directa o función lineal** se expresa de la forma:

  $\boldsymbol{y = m \cdot x}$, siendo m un número cualquiera.

- La **representación gráfica** de estas funciones es una **recta que pasa por el origen de coordenadas**.
- La inclinación de esta recta respecto al eje de abscisas (X) viene representada por el número $\boldsymbol{m}$, que recibe el nombre de **pendiente**. Cuanto mayor sea m, más inclinada estará la recta respecto del eje X, es decir, mayor será el ángulo que esta recta forma con la horizontal.
- Si entre dos magnitudes existe una **relación de proporcionalidad directa**, la función que representa dicha relación es una función lineal.

EJEMPLO

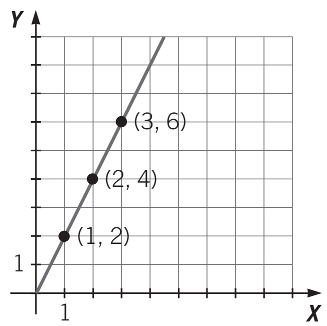
Observa la tabla y determina si la relación entre las magnitudes es de proporcionalidad directa.

BOLSAS DE PALOMITAS	1	2	3	4	5	6
IMPORTE (€)	2	4	6	8	10	12

- El número de bolsas de palomitas y el dinero que cuestan son magnitudes directamente proporcionales, ya que al comprar el doble de bolsas se duplicará el coste…
- La constante de proporcionalidad es: $m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots = 2$
- La expresión algebraica de la función se puede expresar de la forma:

  $$y = m \cdot x \rightarrow y = 2 \cdot x$$

  donde x es el número de bolsas de palomitas e y es el importe en euros.
- La representación gráfica de esta función es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene por pendiente $m = 2$.
  Para representarla hay que señalar en unos ejes de coordenadas los puntos (1, 2), (2, 4), (3, 6)… y unirlos mediante una recta.



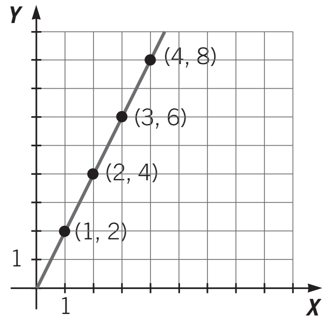
1 **Señala si estos pares de valores son magnitudes directa o inversamente proporcionales. ¿Cuáles se pueden representar mediante una función lineal?**

a) Un número y su opuesto.
b) Un número y su inverso.
c) Un número y su triple.
d) Un número y su mitad.
e) Un número y el doble de su inverso.
f) Un número y el triple del opuesto de su inverso.
g) Un número y el doble del inverso del opuesto.
h) Un número y el inverso de su triple.

2 **Compara las funciones que representan la relación entre el número de fotocopias realizadas en varios establecimientos y su importe. Obtén la tabla de valores, la función lineal y la gráfica correspondiente.**

Establecimiento 1: cada fotocopia cuesta 2 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 2 = 2$
2	$2 \cdot 2 = 4$
3	$3 \cdot 2 = 6$
4	$4 \cdot 2 = 8$
…	…

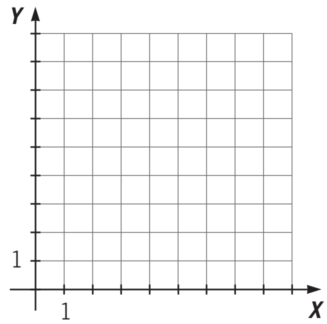


Constante de proporcionalidad $\rightarrow m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y = 2x$

Establecimiento 2: cada fotocopia cuesta 3 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 3 = 3$

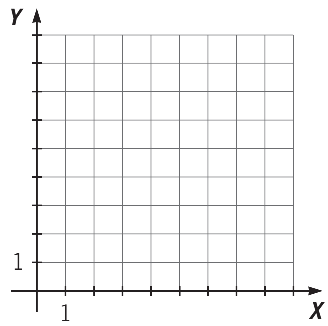


Constante de proporcionalidad $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y =$

Establecimiento 3: cada fotocopia cuesta 1,5 céntimos de euro.

N.º DE FOTOCOPIAS	IMPORTE (cént.)
1	$1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$
2	$2 \cdot 1{,}5 = 3$



Constante de proporcionalidad $\rightarrow m =$

Función de proporcionalidad o función lineal $\rightarrow y =$

CONOCER LA FUNCIÓN AFÍN

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FUNCIÓN AFÍN

- Una **función afín** se expresa de la forma:

  $\boldsymbol{y = m \cdot x + n}$, siendo m y n dos números cualesquiera.

  Al número $\boldsymbol{m}$ se le llama **pendiente de la recta.**

  Si $\boldsymbol{m > 0}$, la recta es **creciente**.

  Si $\boldsymbol{m < 0}$, la recta es **decreciente**.

  Al número $\boldsymbol{n}$ se le llama **ordenada en el origen.**
- La representación gráfica de estas funciones es una recta que no pasa por el origen de coordenadas, sino por el punto $(0, n)$.
- Las funciones de proporcionalidad directa o **funciones lineales** son un caso particular de las funciones afines cuando $\boldsymbol{n = 0}$.

EJEMPLO

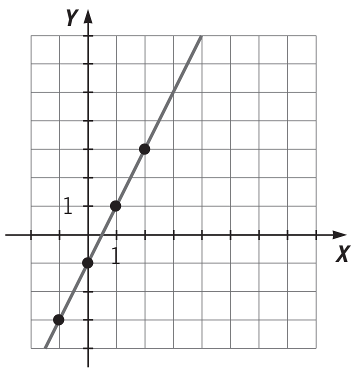
Dadas las funciones $\boldsymbol{y = 2x - 1}$ e $\boldsymbol{y = -3x + 4}$:

a) Determina su pendiente.
b) Halla la ordenada en el origen.
c) Represéntalas gráficamente.
d) ¿Cuál de ellas tiene mayor pendiente?
e) ¿Cómo son las rectas, crecientes o decrecientes?

Función 1

a) $m_1 = 2$
b) $n_1 = -1$
c)

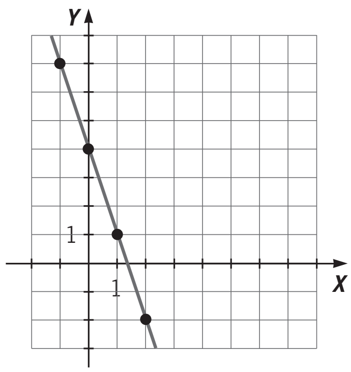
x	y
0	−1
1	1
2	3
−1	−3



Función 2

$m_2 = -3$
$n_2 = 4$

x	y
0	4
1	1
2	−2
−1	7



d) $m_1 > m_2$
e) $m_1 > 0 \rightarrow$ Creciente $\qquad m_2 < 0 \rightarrow$ Decreciente

1 **Clasifica las funciones en lineales y afines, y escribe el valor de la pendiente y la ordenada en el origen.**

a) $y = -0{,}7x \rightarrow$ Función lineal
$m = -0{,}7 \quad n = 0$

b) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) $y = -\frac{1}{3}x$

d) $y = -3{,}5x - 3$

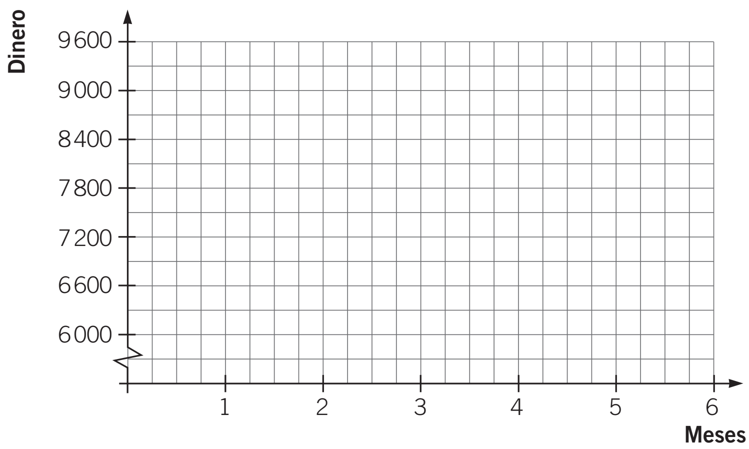
2 **Rosa ha pagado 6 000 € de entrada para comprar un piso y tiene que abonar 600 € mensuales.**

a) Haz una tabla que refleje lo que ha pagado al cabo de 1, 2, 3, …, 6 meses.

MESES	0	1	2	3	4	5	6
DINERO							

b) Escribe una función que exprese el dinero pagado en función del número de meses transcurridos.

c) Representa la gráfica de la función.



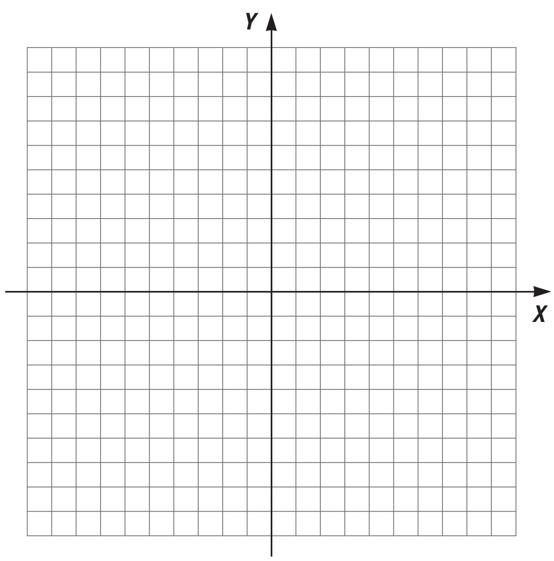
d) ¿Cuál es la pendiente?

e) ¿Y la ordenada en el origen?

3 **La pendiente de una función de la forma $y = mx + n$ es 3 y su ordenada en el origen es 2. Represéntala.**

a) Escribe la función.

b) Halla el valor de y para $x = -2{,}5$.



4 **Obtén la tabla de valores de estas funciones y represéntalas en los ejes de coordenadas.**

$y = 5x - 1$ $y = 3x - 1$ $y = -x - 1$ $y = -3x - 1$

Función 1

x	$y = 5x - 1$
-3	$5 \cdot (-3) - 1 = -16$
-2	$5 \cdot (-2) - 1 = -11$
-1	$5 \cdot (-1) - 1 = -6$
0	$5 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$5 \cdot 1 - 1 = 4$
2	$5 \cdot 2 - 1 = 9$
3	$5 \cdot 3 - 1 = 14$

Función 2

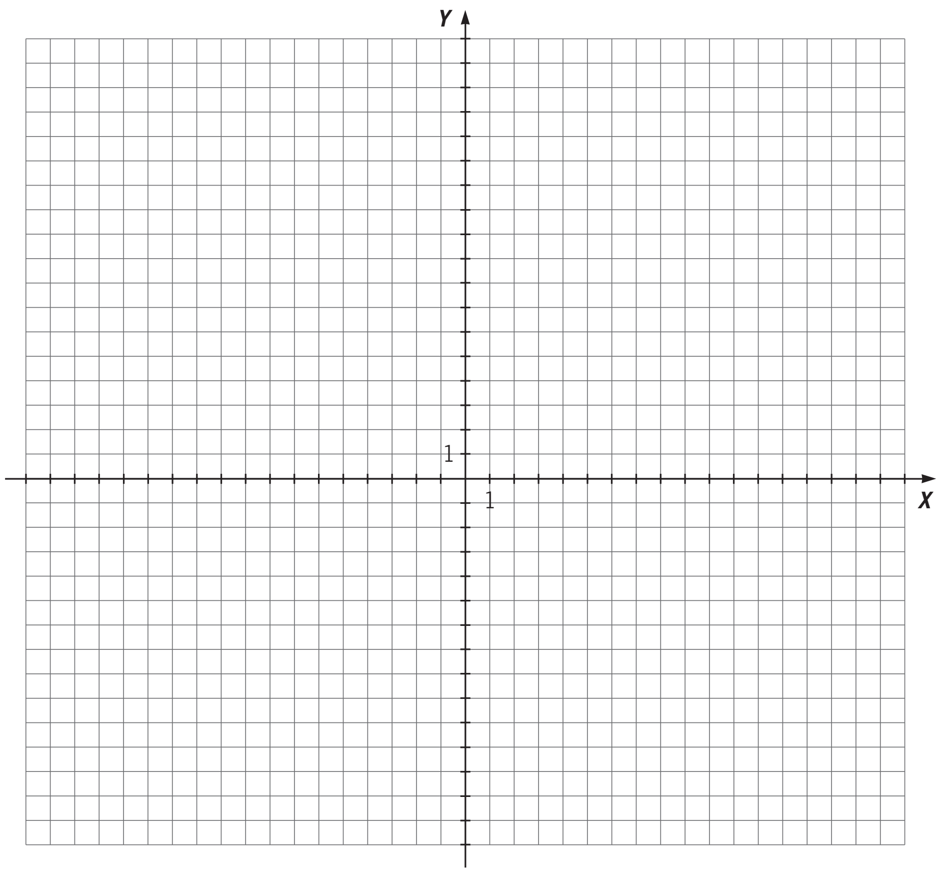
x	$y = 3x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 3

x	$y = -x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

Función 5

x	$y = -3x - 1$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



De las funciones anteriores:

- **¿Cuáles son crecientes?**
- **¿Y cuáles son decrecientes?**
- **¿Hay alguna característica en la expresión de las funciones: $y = 5x - 1$, $y = 3x - 1$, $y = -x - 1$, $y = -3x - 1$ que indique cuáles son crecientes y decrecientes?**

OBTENER LA ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

- Para representar una recta basta con conocer dos puntos por los que pasa.
- Para hallar la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por dos puntos, conocidas sus coordenadas, $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$, se procede así:

1.º **Calculamos el valor de la pendiente** $\rightarrow m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2.º Sustituimos las coordenadas de uno de los puntos en la ecuación general de la recta, y **obtenemos el valor de la ordenada en el origen**, ***n***.

$$y_1 = mx_1 + n \;\rightarrow\; n = y_1 - mx_1$$

o utilizándo las coordenadas del segundo punto:

$$y_2 = mx_2 + n \;\rightarrow\; n = y_2 - mx_2$$

3.º **Sustituimos los valores obtenidos** para la pendiente (m) y la ordenada en el origen (n), en la ecuación general de la recta.

EJEMPLO

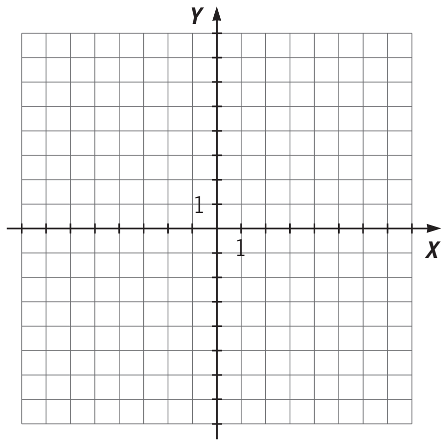
Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(3, 2) y *B*(4, 0).

1.º Calculamos el valor de la pendiente: $m = \dfrac{0 - 2}{4 - 3} = -2$

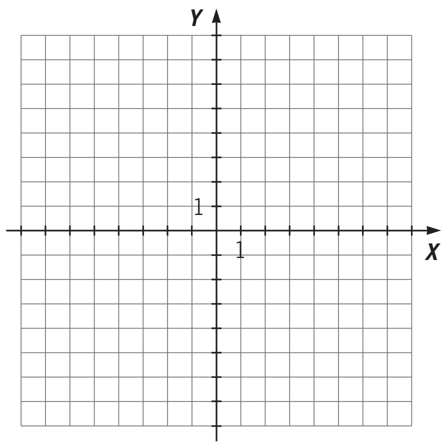
2.º Obtenemos el valor de la ordenada en el origen sustituyendo, por ejemplo, el punto A:
$y = mx + n \;\rightarrow\; 2 = -2 \cdot 3 + n \;\rightarrow\; n = 8$

3.º Sustituimos los valores obtenidos: $y = mx + n \xrightarrow{m = -2,\; n = 8} y = -2x + 8$

1 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(2, −1) y *B*(−3, −4) y represéntala.**



2 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*(2, −1) y tiene de pendiente $m = -2$. Haz una tabla de valores y represéntala.**



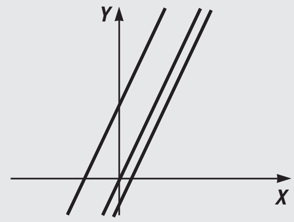
DETERMINAR LA POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

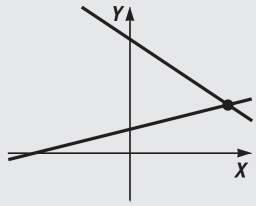
NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Dos rectas pueden ser:

- **Paralelas, si tienen la misma pendiente.**
- **Secantes, si no tienen la misma pendiente.**
- **Las rectas secantes se cortan en un punto.** Podemos calcular este punto de dos formas:
  - **Método gráfico:** dibujamos las rectas y observamos en qué punto se cortan.
  - **Método algebraico:** resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas.





EJEMPLO

Determina si las siguientes rectas son paralelas o secantes.

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x + 3 \longrightarrow m = 2 \\ y &= -x + 5 \longrightarrow m = -1 \end{aligned}\right\} \text{Sus pendientes son distintas} \rightarrow \text{Rectas secantes}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x + 5 \longrightarrow m = 3 \\ y &= 3x - 0{,}5 \rightarrow m = 3 \end{aligned}\right\} \text{Sus pendientes son iguales} \longrightarrow \text{Rectas paralelas}$$

1 **Une mediante flechas las rectas paralelas.**

$y = 5x - 2$
$y = 3x + 5$
$y = -3x + 5$
$y = -x + 2$

$y = -3x + 1$
$y = -x + 7$
$y = 3x - 2$
$y = 5x + 1$

EJEMPLO

Halla gráfica y algebraicamente el punto de corte de las rectas $y = x - 1$ e $y = -x + 3$.

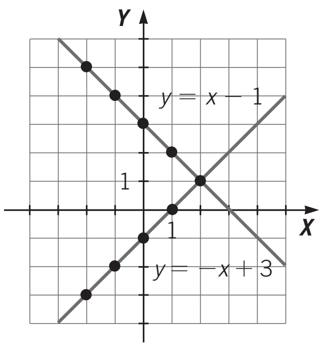
Método gráfico. Hallamos la tabla de valores de cada función y las representamos en los ejes de coordenadas.

$y = x - 1$

x	y
−2	−3
−1	−2
0	−1
1	0
2	1

$y = -x + 3$

x	y
−2	5
−1	4
0	3
1	2
2	1



Se cortan en el punto (2, 1).

Método algebraico. Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y &= -x + 3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &x - 1 = -x + 3 \\ &x + x = 3 + 1 \rightarrow x = 2 \\ &y = x - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Se cortan en el punto (2, 1).}$$

2 **Calcula de forma gráfica y algebraica el punto de corte de las rectas $y = 2x - 1$ e $y = 3x + 1$.**

3 **Calcula de forma gráfica y algebraica el punto de corte de las rectas $y = -7x + 2$ e $y = 3x - 1$.**

DETERMINAR LA POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

4 **Representa las siguientes funciones. Escribe su pendiente y señala cuáles son paralelas o secantes.**

$y = -x + 1$ $\quad$ $y = 3x + 2$ $\quad$ $y = -x + 5$ $\quad$ $y = x + 1$

5 **Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 5x - 3$ y que pasa por el origen de coordenadas.**

6 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(5, 0)$ y tiene la misma pendiente que la recta $y = -3x - 6$.**

PROPUESTAS DE EVALUACIÓN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Esta unidad es una continuidad de la unidad anterior, en la que se estudian los conceptos y las características globales de las funciones, y de la unidad de proporcionalidad, por lo que será conveniente repasar:

- Expresión de relaciones geométricas o aritméticas utilizando el lenguaje algebraico.
- Estudio analítico y gráfico de la proporcionalidad directa.

SUGERENCIAS SOBRE LAS EVALUACIONES Y SU CORRECCIÓN

EVALUACIÓN INICIAL

- Esta prueba contiene tres actividades sobre relaciones de proporcionalidad, la forma de expresarlas, la representación gráfica de esas relaciones, tablas de proporcionalidad, etc.

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

- Las tres primeras actividades son de repaso de las relaciones de proporcionalidad, las tablas y sus expresiones algebraicas, así como las representaciones gráficas de las funciones de proporcionalidad y afines. Las siguientes actividades hacen referencia a un inicio de la Geometría afín: ecuaciones de la recta, obtención de una recta que pasa por dos puntos, cálculo de la pendiente de una recta y su relación con el crecimiento y la representación de diferentes rectas en unos ejes de coordenadas, y la obtención de sus puntos de corte. Las dos últimas actividades son de aplicación de los contenidos estudiados en problemas geométricos o de otros tipos.

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Me han vendido de 3 m de moqueta por 12 €. Completa la tabla que representa analítica y gráficamente la relac ón.**

Longitud (m)	3	4			15	
Precio (€)	12		30	40		200

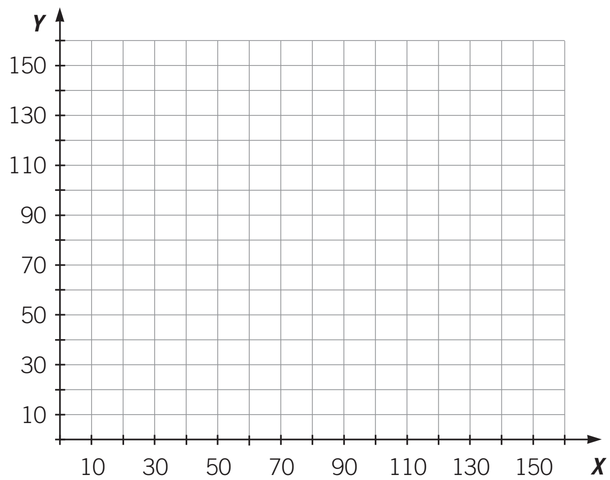
2 **Expresa algebraicamente las relaciones.**

a) El perímetro de un cuadrado en función de su lado.
b) La longitud de una circunferencia y su diámetro.
c) El perímetro de un rectángulo cuya base es doble que la altura.

3 **Un grupo de amigos alquila un autobús para realizar un viaje. El coste es de 75 € fijos y 50 céntimos por cada kilómetro recorrido. Completa la tabla para 10, 20, 30, …, hasta 150 km, de 10 en 10.**

Espacio (km)	0	10	20	30	40											
Precio (€)																

Expresa gráficamente la función.



Responde a las siguientes cuestiones.

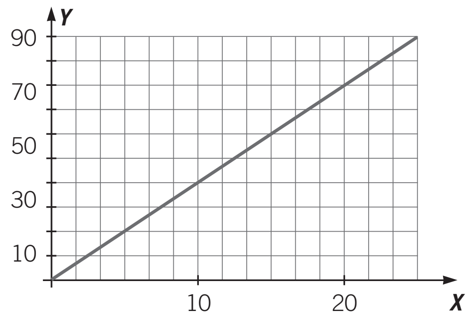
a) ¿Qué variables están representadas?
b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
c) ¿Es una función?
d) ¿Puedes unir los puntos del gráfico? ¿Por qué?
e) ¿Cómo es la función, creciente o decreciente?
f) Escribe la fórmula que relaciona los kilómetros recorridos con el importe pagado.

EVALUACIÓN INICIAL: SOLUCIONES

1 **Una tienda vende moqueta en rollos de 3 m de ancho a 12 €. Completa la tabla que representa analítica y gráficamente la relación.**

Longitud (m)	3	4	***7,5***	***10***	15	***50***
Precio (€)	12	***16***	30	40	***60***	200

Expresión algebraica: **y** = ***4*x**



2 **Expresa algebraicamente las relaciones.**

a) El perímetro de un cuadrado en función de su lado → ***Perímetro = 4 · lado*** → **y = *4*x**

b) La longitud de una circunferencia y su diámetro ⟶ ***Longitud = π · diámetro*** → **y = πx**

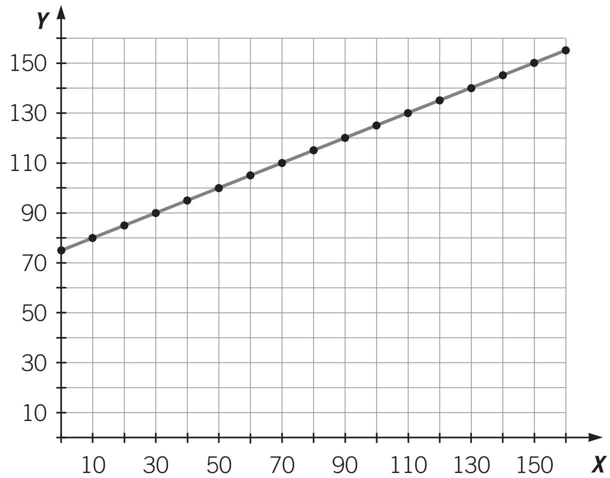
c) El perímetro de un rectángulo cuya base es doble que la altura.

Perímetro = 2 · altura + 2 · (2 · altura) → ***y = 6x***

3 **Un grupo de amigos alquila un autobús para realizar un viaje. El coste es de 75 € fijos y 50 céntimos por cada kilómetro recorrido. Completa la tabla para 10, 20, 30, …, hasta 150 km, de 10 en 10.**

Espacio (km)	0	10	20	30	40	***50***	***60***	***70***	***80***	***90***	***100***	***110***	***120***	***130***	***140***	***150***
Precio (€)	***75***	***80***	***85***	***90***	***95***	***100***	***105***	***110***	***115***	***120***	***125***	***130***	***135***	***140***	***145***	***150***

Expresa gráficamente la función.



Responde a las siguientes cuestiones.

a) ¿Qué variables están representadas? → ***Eje* X*: espacio (km) y eje* Y*: precio (€).***

b) ¿Cuál es la variable independiente? ⟶ ***El espacio.*** ¿Y la dependiente? → ***El precio.***

c) ¿Es una función? → ***Sí, a cada distancia le corresponde un único precio.***

d) ¿Puedes unir los puntos del gráfico? ¿Por qué? → ***Sí, porque las variables pueden tomar cualquier valor.***

e) ¿Cómo es la función, creciente o decreciente? → ***Es creciente, a mayor distancia, mayor coste.***

f) Escribe la fórmula que relaciona los kilómetros recorridos con el importe pagado → **y = *75 + 0,5*x**

PROPUESTAS DE EVALUACIÓN

ERES CAPAZ DE...

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

Reconocer funciones afines y lineales, determinando su expresión algebraica.

1 **El precio de 1 kg de melocotones es 2,50 €.**

a) Completa la tabla.

Peso (kg)	1		3,7		5,2	
Precio (€)		4,80		11		20

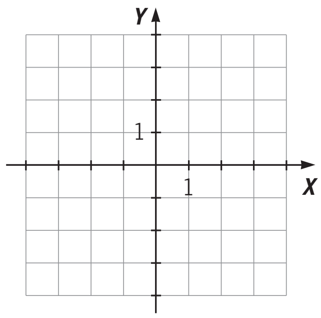
b) Escribe la función que relaciona el peso de la fruta y el precio.

Representar funciones lineales y afines, determinando la relación entre el signo de la pendiente y el crecimiento de una recta.

2 **Clasifica las siguientes funciones en crecientes y decrecientes sin representarlas. Explica cómo lo haces.**

a) $y = -2x - 3$
b) $y = -2x + 3$
c) $y = 2x - 3$
d) $y = 2x + 3$

3 **Representa las funciones anteriores en unos mismos ejes de coordenadas.**



Obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

4 **Determina la expresión algebraica de la función que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, -2)$. ¿Pasa la recta por el punto $C(2, 5)$?**

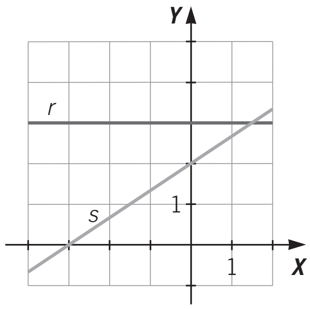
RELACIÓN DE CAPACIDADES	ACTIVIDADES
• Enumerar e identificar elementos	
• Definir, completar y seleccionar propiedades, relaciones, etc.	
• Transformar, distinguir, asociar e interpretar datos y relaciones	1, 3, 6, 8
• Extrapolar, deducir e inferir reglas o leyes	
• Aplicar, demostrar, estimar, resolver, etc.	1, 3

Determinar la posición relativa de dos rectas.

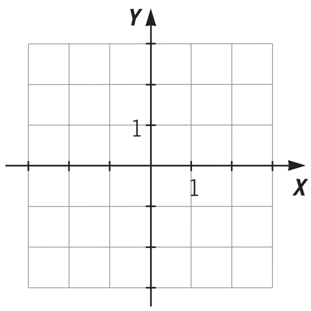
5 **Determina gráfica y analíticamente la posición relativa de la recta r: $y = -2x - 3$, y la recta s: $y = 3x + 4$**

Reconocer funciones y estudiarlas en situaciones geométricas o de la vida cotidiana.

6 **Obtén las expresiones algebraicas de estas rectas.**



7 **Dibuja el triángulo de vértices los puntos $A(2, 0)$, $B(-1, 2)$ y $C(1, -2)$, y halla las ecuaciones de las tres rectas que forman los lados y sus pendientes.**



8 **Dos amigos hacen una carrera. Juan le deja 100 m de ventaja a su amigo Luis. Además, Juan corre a una velocidad de 9 m/s y Luis lo hace a 7 m/s. Escribe la expresión algebraica de los espacios recorridos por los dos amigos. ¿Cuánto tiempo tardará Juan en alcanzar a Luis? ¿Qué espacio habrán recorrido ambos en ese instante? Representa gráficamente las funciones.**

RELACIÓN DE CAPACIDADES	ACTIVIDADES
• *Clasificar y discriminar según criterios*	*2, 5*
• *Contrastar operaciones, relaciones, etc.*	
• *Combinar, componer datos, resumir, etc.*	*3, 4, 5, 7*
• *Deducir, formular hipótesis, generalizar, etc.*	

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD: SOLUCIONES

1 **El precio de 1 kg de melocotones es 2,50 €.**

a)

Peso (kg)	1	***1,92***	3,7	***4,4***	5,2	***8***
Precio (€)	***2,50***	4,80	***9,25***	11	***13***	20

b) ***Función:*** $y = 2{,}5x$

2 **Clasifica las siguientes funciones en crecientes y decrecientes sin representarlas. Explica cómo lo haces.**

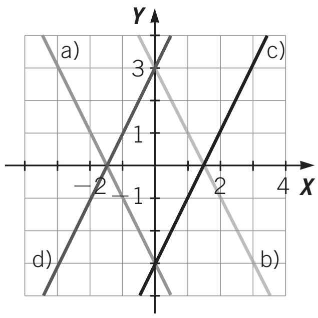
a) $y = -2x - 3 \rightarrow m = -2 \rightarrow$ ***Función decreciente***

b) $y = -2x + 3 \rightarrow m = -2 \rightarrow$ ***Función decreciente***

c) $y = 2x - 3 \longrightarrow m = 2 \longrightarrow$ ***Función creciente***

d) $y = 2x + 3 \longrightarrow m = 2 \longrightarrow$ ***Función creciente***

3 **Representa las funciones anteriores en unos mismos ejes de coordenadas.**



4 **Determina la expresión algebraica de la función que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, -2)$. ¿Pasa la recta por el punto $C(2, 5)$?**

$$m = \frac{-2 - 2}{5 - 3} = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow y = -2x + n$$

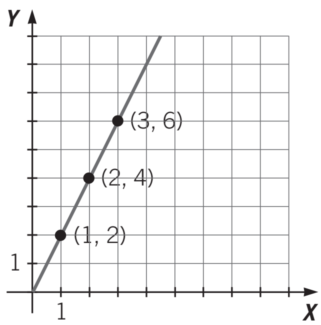
Como pasa por el punto A(3, 2):

$$r: y = -2x + n \xrightarrow{A(3,\,2) \in r} 2 = (-2) \cdot 3 + n \rightarrow n = 8$$

Por tanto, $r: = -2x + 8$

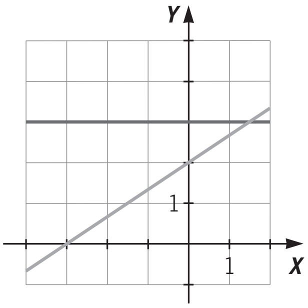
El punto C(2, 5) no pertenece a la recta porque: $5 \neq 2 \cdot 2 + 8.$

5 **Determina gráfica y analíticamente la posición relativa de la recta r: $y = -2x - 3$, y la recta s: $y = 3x + 4$**



$$\left.\begin{array}{l} y = -2x - 3 \\ y = 3x + 4 \end{array}\right\} \rightarrow -2x - 3 = 3x + 4 \rightarrow -5x = 7 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{7}{5} \\ y = 3\left(-\dfrac{7}{5}\right) + 4 = -\dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \rightarrow P\left(-\dfrac{7}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$$

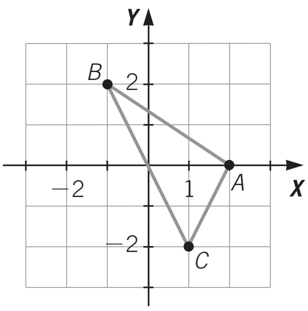
6 **Obtén las expresiones algebraicas de estas rectas.**



r $\rightarrow$ *La variable* y *siempre vale 3* $\rightarrow$ $y = 3$

s $\rightarrow$ *Pasa por (−3, 0) y (0, 2)* $\rightarrow$ $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

7 **Dibuja el triángulo de vértices los puntos $A(2, 0)$, $B(-1, 2)$ y $C(1, -2)$, y halla las ecuaciones de las tres rectas que forman los lados y sus pendientes.**



Las rectas son r_{AB}: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$

r_{AC}: $y = 2x - 4$ $\qquad$ r_{BC}: $y = -2x$

Las pendientes son $m_{AB} = -\dfrac{2}{3}$, $m_{AC} = 2$ *y* $m_{BC} = -2$.

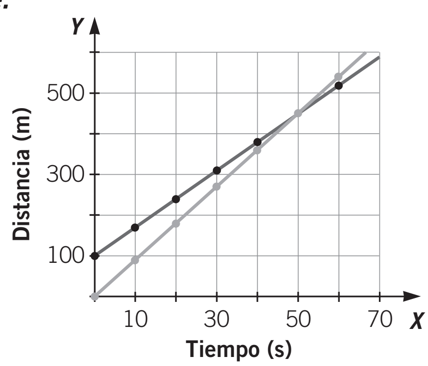
8 **Dos amigos hacen una carrera. Juan le deja 100 m de ventaja a su amigo Luis. Además, Juan corre a una velocidad de 9 m/s y Luis lo hace a 7 m/s.**
Escribe la expresión algebraica de los espacios recorridos por los dos amigos.
¿Cuánto tiempo tardará Juan en alcanzar a Luis? ¿Qué espacio habrán recorrido ambos en ese instante?
Representa gráficamente las funciones.

Juan $\rightarrow$ $y = 9x$

Luis $\rightarrow$ $y = 7x + 100$

Juan tarda en alcanzarlo 50 segundos.

Han recorrido 450 metros en ese instante.



13 Estadística

PROGRAMACIÓN DE AULA

OBJETIVOS

- Distinguir los conceptos de población y muestra.
- Clasificar las variables estadísticas.
- Hallar la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.
- Calcular las frecuencias absolutas y relativas y las frecuencias acumuladas de un conjunto de datos.
- Representar gráficamente un conjunto de datos estadísticos de la forma más adecuada.
- Calcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos.
- Obtener el primer, segundo y tercer cuartil de un conjunto de datos.
- Hallar el recorrido y la desviación media de un conjunto de datos.
- Calcular la varianza, desviación típica y coeficiente de variación de distintos conjuntos de datos.
- Interpretar las medidas de centralización, posición y dispersión de un conjunto de datos.

CONTENIDOS

CONCEPTOS

- Población, muestra, individuo y tamaño de la muestra.
- Variables estadísticas. Tipos.
- Marca de clase.
- Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
- Gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma y diagrama de sectores.
- Media, mediana y moda.
- Cuartiles.
- Recorrido, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación.

PROCEDIMIENTOS, DESTREZAS Y HABILIDADES

- Distinción del concepto de población y muestra.
- Diferenciación de las variables en cualitativas o cuantitativas y, dentro de estas, en variables discretas y continuas.
- Construcción de una tabla estadística adecuada al conjunto de datos, calculando frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
- Interpretación y representación de gráficos estadísticos, analizando de manera crítica su adecuación a los datos y al contexto.
- Obtención e interpretación de la media, mediana y moda de un conjunto de datos.
- Cálculo e interpretación del primer, segundo y tercer cuartil.
- Cálculo del recorrido y la desviación media de un conjunto de datos.
- Determinación e interpretación de la varianza, desviación típica y coeficiente de variación de un conjunto de datos.
- Utilización de la calculadora científica.

ACTITUDES

- Análisis crítico de los gráficos estadísticos.
- Valoración de la importancia de un uso correcto de la Estadística en la sociedad para el estudio de variables.

COMPETENCIAS QUE SE TRABAJAN

- Interpretar y presentar la información estadística mediante tablas, gráficas y parámetros estadísticos, así como calcular los parámetros estadísticos básicos, utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).
- Reconocer y calcular el resultado de las operaciones numéricas básicas, decidiendo si es necesario dar una respuesta exacta o aproximada, y aplicando el modo de cálculo pertinente (mental, algoritmos con lápiz y papel o calculadora).
- Conocer, valorar y utilizar sistemáticamente conductas asociadas a la actividad matemática, tales como el orden, contraste, precisión y revisión sistemática, y crítica de los resultados.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Distinguir los conceptos de población y muestra.
- Reconocer de qué tipo es una variable estadística.
- Elaborar tablas estadísticas.
- Hallar las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.
- Determinar y dibujar la representación gráfica más adecuada para un conjunto de datos.
- Hallar la media, mediana y moda de un conjunto de datos.
- Determinar el primer, segundo y tercer cuartil de un conjunto de datos.
- Calcular el recorrido y la desviación media de un conjunto de datos.
- Hallar la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación de distintos conjuntos de datos.
- Interpretar las medidas de centralización, posición y dispersión de un conjunto (ponía conjuntos) de datos.

ESQUEMA DE LA UNIDAD

ESTADÍSTICA

- **Frecuencias** →
  - Frecuencia absoluta: f_i
  - Frecuencia relativa: $h_i = \dfrac{f_i}{N}$
  - Frecuencia absoluta acumulada: $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_i$
  - Frecuencia relativa acumulada: $H_i = \sum_{j=1}^{i} h_i = \sum_{j=1}^{i} \dfrac{f_i}{N}$

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

- **Medidas de centralización** →
  - Media aritmética: $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i \cdot x_i}{N}$
  - Mediana: *Me*, valor central de los datos ordenados
  - Moda: *Mo*, valor más repetido
- **Medidas de dispersión** →
  - Rango: $R = Máx - Mín$
  - Desviación media: $DM = \dfrac{\Sigma f_i \cdot |x_i - \overline{x}|}{N}$
  - Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N}$
  - Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{N}}$
  - Coeficiente de variación: $CV = \dfrac{\sigma}{\overline{x}}$

LECTURA INICIAL

¡Dios salve a la Reina!

Florence Nightingale nació el 12 de mayo de 1820 en Florencia (Italia), ciudad a la que debe su nombre. Su educación, igual que la de su hermana, estuvo en sus primeros años a cargo de una institutriz, y más tarde fue su propio padre quien continuó con ella. Años después, tras vencer la oposición inicial de sus padres estudió Matemáticas con Sylvester, matemático que desarrolló la teoría de invariantes junto con Cayley. En su desarrollo también influyo Quetelet, matemático belga que aplicó métodos estadísticos al estudio de la Sociología.

En sus viajes tuvo oportunidad de estudiar distintos sistemas sanitarios y, en contra de la opinión familiar, se preparó para ser enfermera, profesión que no estaba bien considerada en la sociedad británica del siglo XIX. Su valía profesional la llevó ser superintendente en un hospital para mujeres de Londres en 1853.

En marzo de 1854 estalla la guerra de Crimea y, aunque los ejércitos británicos salen victoriosos de las primeras batallas, la prensa de Londres lanza feroces críticas a las deplorables condiciones sanitarias de los hospitales de campaña. La respuesta del gobierno, por medio de su secretario de Guerra, fue nombrar a Nightingale, que era amiga suya, Superintendente del Sistema de Enfermeras de los Hospitales Generales Ingleses en Turquía. Florence se hizo cargo de la situación y comenzó a aplicar medidas higiénicas y costumbres alimentarias saludables, de modo que la mortalidad en los hospitales decreció de forma asombrosa en poco tiempo. En el informe que entregó al gobierno inglés aparecen por primera vez datos estadísticos presentados en forma de gráfico.

Fue la primera mujer elegida para formar parte de la Royal Statistical Society y fue también miembro honorífico de la American Statistical Association. En 1860 fundó una escuela de enfermería basada en los principios aplicados por ella en los hospitales. Prestó servicios también al ejército en Canadá y al gobierno de Estados Unidos durante la guerra civil (1861-1865).

Asimismo, publicó numerosos escritos, pese a estar postrada en cama como consecuencia de una enfermedad, entre ellos un manual de enfermería que se tradujo a muchos idiomas y fue utilizado en numerosas escuelas de enfermería durante el siglo XX.

Florence Nightingale murió 13 de agosto de 1910 en East Wellow, Inglaterra.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Cuidado con los promedios

La media de dos números es igual a su suma dividida entre 2. Sin embargo, a veces no se puede aplicar directamente este cálculo, como se verá en el ejemplo siguiente.

Un ciclista quiere hacer una excursión que consiste en partir de la ciudad A, subir a la cumbre B situada a 30 km y volver a la ciudad A sin detenerse. Por sus condiciones atléticas, el ciclista puede hacer el recorrido de subida y bajada a una velocidad media de 20 km/h.

Así, inicia el ascenso y, al llegar a B, comprueba que en la subida solo ha hecho una media de 10 km/h, y calcula que para conseguir la media de 20 km/h en todo el recorrido, tiene que llevar en la bajada una velocidad media de 30 km/h, ya que:

$$\frac{10 + 30}{2} = 20 \text{ km/h}$$

¿Tiene razón el ciclista?

No la tiene, pues no se puede calcular de ese modo la velocidad media, sino que debería hallarse el cociente del espacio total recorrido y el tiempo empleado.

Como el espacio recorrido es: 30 km + 30 km = 60 km, el tiempo en ascender es 3 horas (ascendió a 10 km/h) y el tiempo en descender es 1 hora (descendió a 30 km/h), siendo el tiempo total 4 horas. Por tanto, su velocidad media será:

$$v_m = 60 : 4 = 15 \text{ km/h}$$

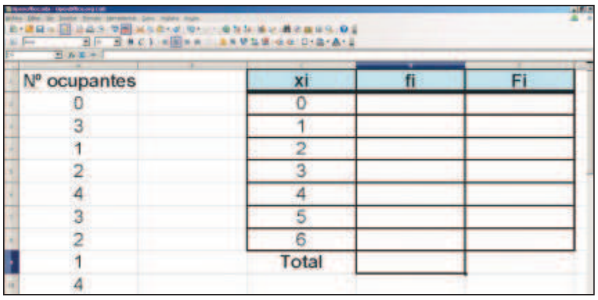
MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

OpenOffice. CALC
es.openoffice.org

Construye una tabla de frecuencias para los siguientes datos de un estudio relativo al número de ocupantes por vivienda en una población.

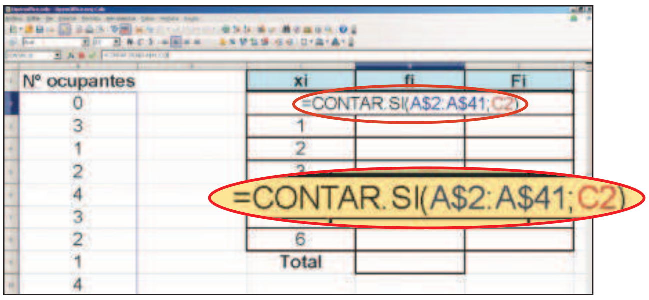
0 3 1 2 4	**3 2 1 4 5**	**1 1 3 3 3**	**2 2 2 1 3**
2 1 3 0 6	**5 5 3 2 1**	**0 3 4 2 4**	**1 1 3 6 0**

1. Anotamos en la columna **A** todos los datos obtenidos, y en las celdas **C2:C8** escribimos los posibles valores de la variable.



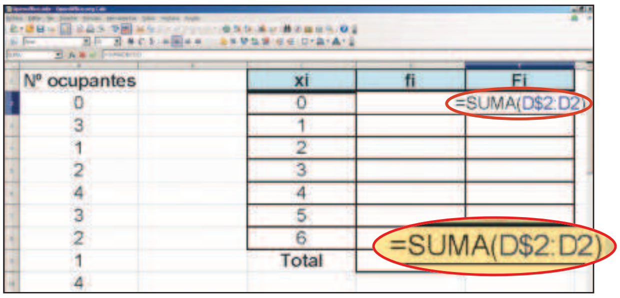
Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0		
3	1		
1	2		
2	3		
4	4		
3	5		
2	6		
1	Total		
4			

2. Escribimos =**CONTAR.SI(A$2:A$41;C2)** en la celda **D2**, para calcular el número de veces que se repite el valor de **C2** en la columna **A**.



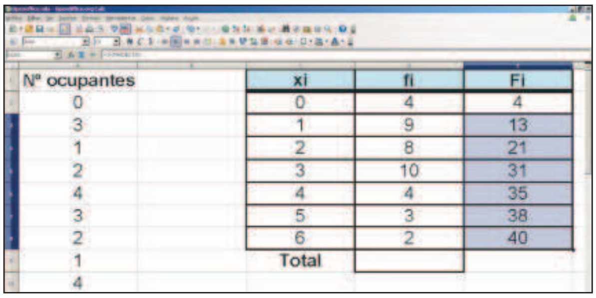
Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	=CONTAR.SI(A$2:A$41;C2)		
3	1		
1	2		
2	3		
4			
3			
2	6		
1	Total		
4			

3. Escribimos =**SUMA(D$2:D2)** en la celda **E2**, para calcular el valor de la frecuencia acumulada.



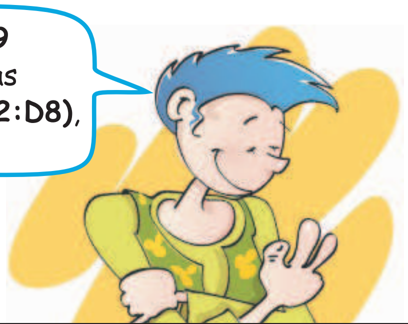
Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0		=SUMA(D$2:D2)
3	1		
1	2		
2	3		
4	4		
3	5		
2	6		
1	Total		
4			

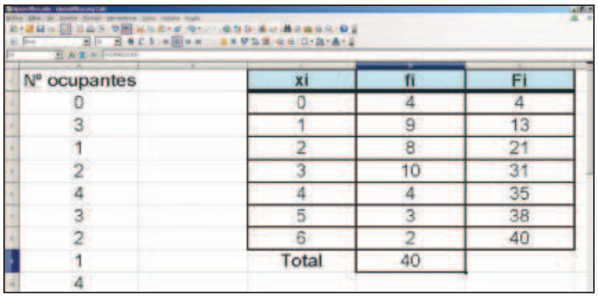
4. Copiamos el contenido de la celdas **D2** y **E2** y lo pegamos en las columnas **D** y **E**, respectivamente



Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0	4	4
3	1	9	13
1	2	8	21
2	3	10	31
4	4	4	35
3	5	3	38
2	6	2	40
1	Total		
4			

5. Calculamos en la celda **D9** la suma de las frecuencias absolutas con **=SUMA(D2:D8)**, y concluimos la tabla.





Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0	4	4
3	1	9	13
1	2	8	21
2	3	10	31
4	4	4	35
3	5	3	38
2	6	2	40
1	Total	40	
4			

SUGERENCIAS PARA RESOLVER LAS ACTIVIDADES

1 Como hemos hecho en el ejercicio resuelto, anotamos los datos del problema en la primera columna.

Construimos una tabla como la del ejercicio resuelto, anotando en la columna de x_i los posibles valores de la variable: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6

Completamos la tabla de idéntica forma a como se ha hecho en el ejercicio resuelto, obteniendo de este modo las frecuencias absolutas y las acumuladas.

2 Podemos utilizar la misma tabla del ejercicio. Escribimos en **F2** la fórmula =**D2*(C2-PROMEDIO(A2:A31))^2**, copiamos el contenido y lo pegamos en el resto de la columna.

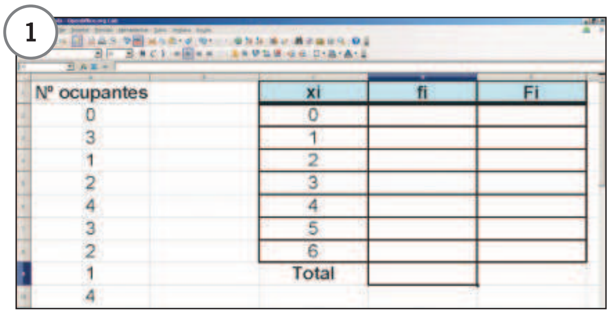
Escribimos en **G2** la fórmula =**D2*C2^2**, copiamos el contenido y lo pegamos en el resto de la columna.

Anotamos en **B2**, =**SUMA(F2:F8)/D9**, y comprobamos que da el mismo resultado que **B3**, =**SUMA(G2:G8)/D9-PROMEDIO(A2:A31)^2**.

PASO A PASO

OpenOffice. CALC
es.openoffice.org

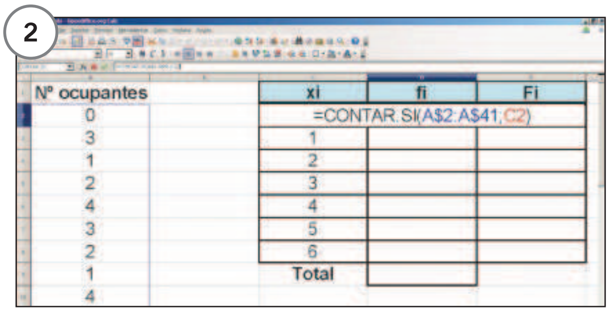
1



Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0		
3	1		
1	2		
2	3		
4	4		
3	5		
2	6		
1	Total		
4			

Anotamos en la columna **A** todos los datos, comenzamos en la celda **A2** y acabamos en **A41**.
Preparamos la tabla donde vamos a hallar las frecuencias, escribimos los rótulos en las celdas **C1**, **D1** y **E1** y en las celdas **C2:C8** escribimos, ordenados de menor a mayor, los posibles valores de la variable: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

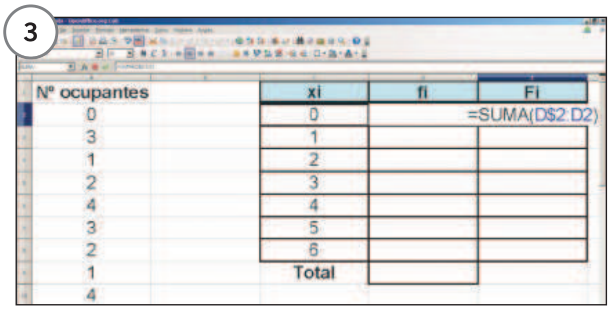
2



Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	=CONTAR.SI(A$2:A$41;C2)		
3	1		
1	2		
2	3		
4	4		
3	5		
2	6		
1	Total		
4			

Escribimos =**CONTAR.SI(A$2:A$41;C2)** en la celda **D2**, para calcular el número de veces que se repite el valor de **C2** entre los valores escritos en la columna **A**.
El resultado que aparece, tras pulsar la tecla **Intro**, es 4.

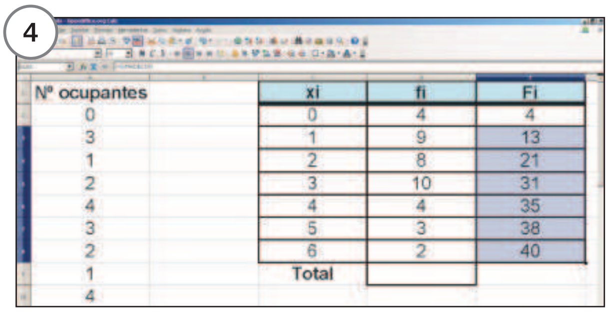
3



Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0		=SUMA(D$2:D2)
3	1		
1	2		
2	3		
4	4		
3	5		
2	6		
1	Total		
4			

Escribimos =**SUMA(D$2:D2)** en la celda **E2**, para calcular la suma de las frecuencias de los valores menores o iguales.
El resultado que aparece, tras pulsar la tecla **Intro**, es 4.

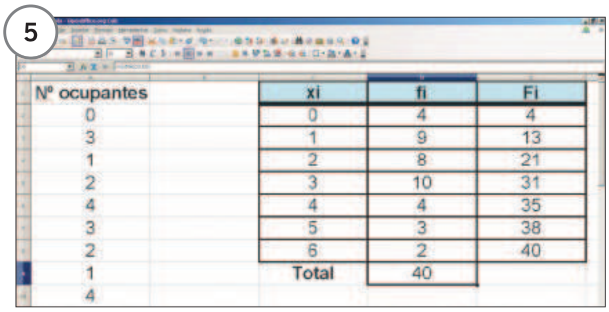
4



Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0	4	4
3	1	9	13
1	2	8	21
2	3	10	31
4	4	4	35
3	5	3	38
2	6	2	40
1	Total		
4			

Copiamos el contenido de la celda **D2** y lo pegamos en el resto de la columna **D**.
Copiamos el contenido de la celda **E2** y lo pegamos en el resto de la columna **E**.
De esta manera obtenemos las frecuencias absolutas en la columna **C** y las frecuencias absolutas acumuladas en la columna **E**.

5



Nº ocupantes	xi	fi	Fi
0	0	4	4
3	1	9	13
1	2	8	21
2	3	10	31
4	4	4	35
3	5	3	38
2	6	2	40
1	Total	40	
4			

Anotamos en la celda **D9** la fórmula =**SUMA(D2:D8)** que calcula la suma de todas las frecuencias absolutas y cuyo resultado, 40, coincide con el número total de datos del estudio estadístico.

RECURSOS PARA EL AULA

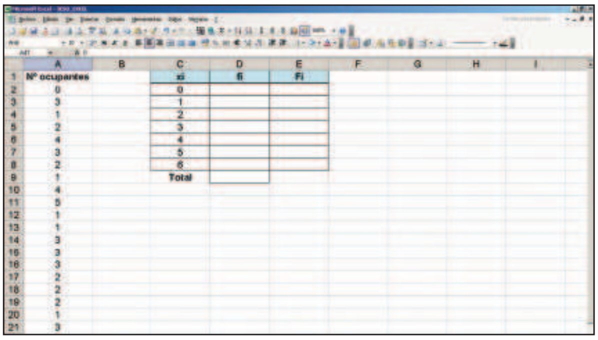
MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

Microsoft Office. EXCEL

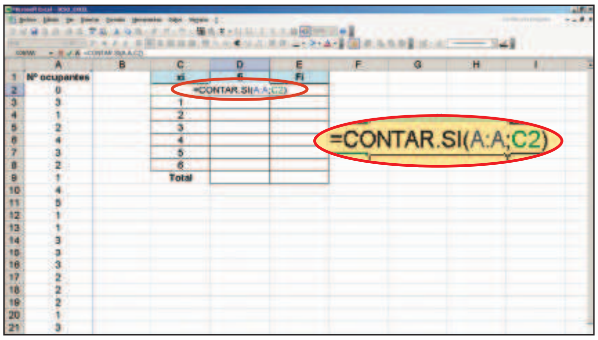
Construye una tabla de frecuencias para los siguientes datos de un estudio relativo al número de ocupantes por vivienda en una población.

0 3 1 2 4	**3 2 1 4 5**	**1 1 3 3 3**	**2 2 2 1 3**
2 1 3 0 6	**5 5 3 2 1**	**0 3 4 2 4**	**1 1 3 6 0**

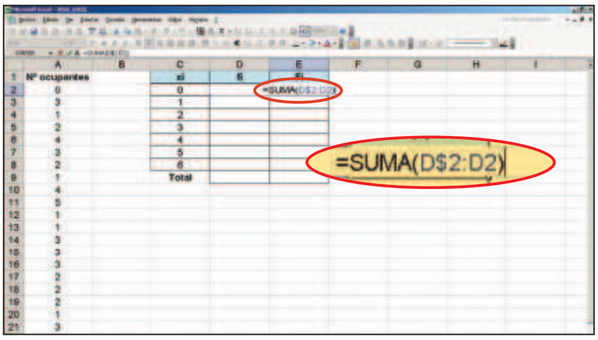
1. Anotamos en la columna A todos los datos obtenidos y en las celdas C2:C8 escribimos los posibles valores de la variable.



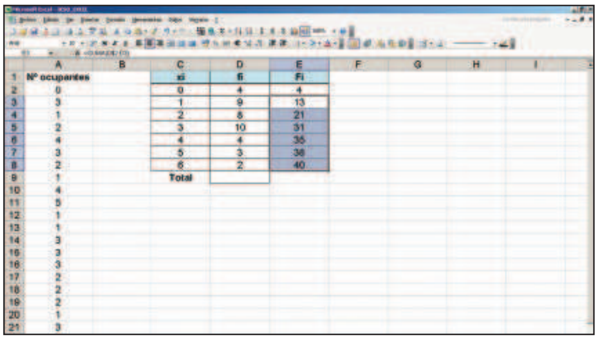
2. Escribimos =CONTAR.SI(A:A;C2) en la celda D2, para calcular el número de veces que se repite el valor de C2 en la columna A.

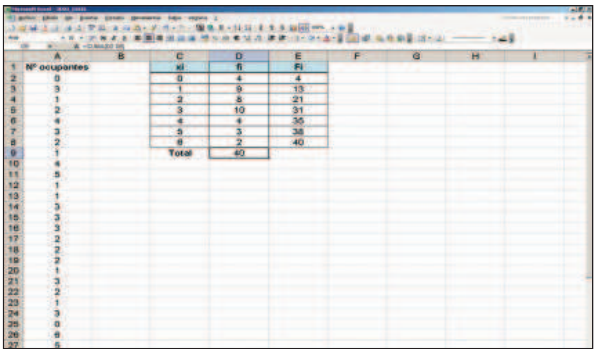


3. Escribimos =SUMA(D$2:D2) en la celda E2, para calcular el valor de la frecuencia acumulada.

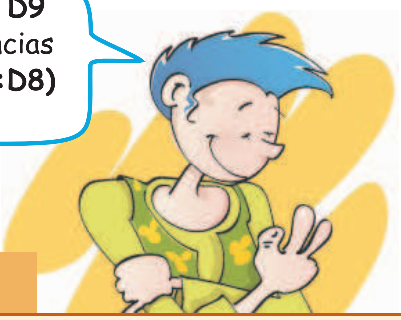


4. Copiamos el contenido de la celdas D2 y E2 y lo pegamos en las columnas D y E respectivamente





5. Calculamos en la celda D9 la suma de las frecuencias absolutas =SUMA(D2:D8) y concluimos la tabla.



ACTIVIDADES

PRACTICA

1. Construye una tabla de frecuencias para los siguientes datos de un estudio estadístico:

2 2 5 1 4   5 6 2 3 5   4 5 2 1 1

2 2 4 4 3   2 3 4 4 2   1 5 2 5 1

INVESTIGA

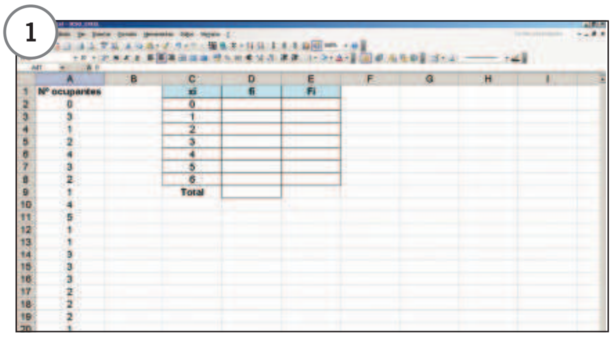
2. Con ayuda de una tabla comprueba que:

La media de los cuadrados de las desviaciones es igual a la media de los cuadrados de los datos menos el cuadrado de la media.

PASO A PASO

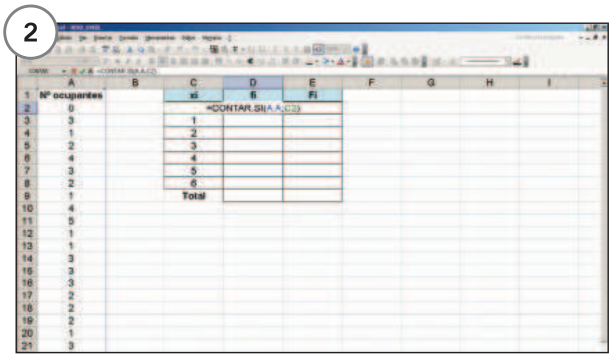
Microsoft Office. EXCEL

1



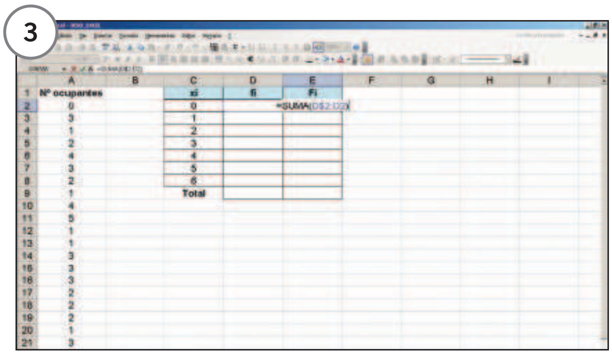
Anotamos en la columna **A** todos los datos, comenzamos en la celda **A2** y acabamos en **A41**.
Preparamos la tabla donde vamos a hallar las frecuencias, escribimos los rótulos en las celdas **C1**, **D1** y **E1** y en las celdas **C2:C8** escribimos los posibles valores de la variable: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

2



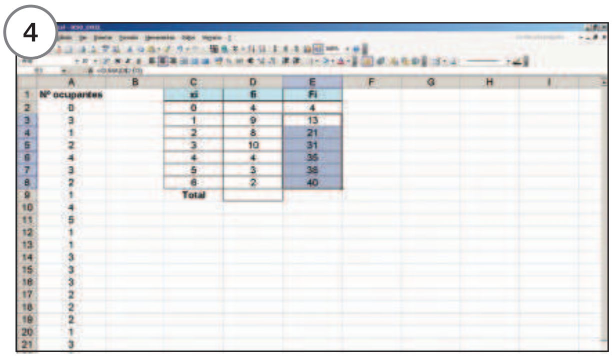
Escribimos =**CONTAR.SI(A:A;C2)** en la celda **D2** para calcular el número de veces que se repite el valor de **C2**, entre los valores escritos en la columna **A**.
El resultado que aparece, tras pulsar la tecla **Intro**, es 4.

3



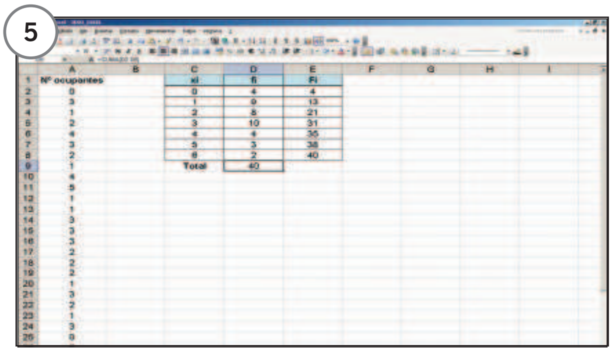
Escribimos =**SUMA(D$2:D2)** en la celda **E2** para calcular la suma de las frecuencias de los valores menores o iguales.
El resultado que aparece, tras pulsar la tecla **Intro**, es 4.

4



Copiamos el contenido de la celda **D2** y lo pegamos en el resto de la columna **D**.
Copiamos el contenido de la celda **E2** y lo pegamos en el resto de la columna **E**.
De esta manera obtenemos las frecuencias absolutas en la columna **C** y las frecuencias absolutas acumuladas en la columna **E**.

5



Anotamos en la celda **D9** la fórmula =**SUMA(D2:D8)** que calcula la suma de todas las frecuencias absolutas y cuyo resultado, 40, coincide con el número total de datos del estudio estadístico.

EN LA VIDA COTIDIANA...

La población española

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Conocer estadísticamente la población española y calcular densidades de población y tasas de natalidad y mortalidad. • Obtener información a partir del análisis de gráficos estadísticos. • Elegir los gráficos adecuados para representar tablas de datos.

1 Análisis estadístico de la población española

Estos son los datos de la población española a 1 de enero de 2002, por Comunidades Autónomas y su extensión en km^2.

Comunidad	Población	km^2
Andalucía	7 478 432	87 595
Aragón	1 217 514	47 720
Principado de Asturias	1 073 971	10 604
Baleares	916 968	4 992
Canarias	1 843 755	7 492
Cantabria	542 275	5 321
Castilla-La Mancha	1 782 038	79 461
Castilla y León	2 480 369	94 224
Cataluña	6 506 440	32 113
Comunidad Valenciana	4 326 708	23 255
Extremadura	1 073 050	41 634
Galicia	2 737 370	29 575
Comunidad de Madrid	5 527 152	8 028
Murcia	1 226 993	11 314
Comunidad Foral de Navarra	569 628	10 391
País Vasco	2 108 281	7 234
La Rioja	281 614	5 045
Ceuta	76 152	20
Melilla	69 184	12
	41 837 894	506 030

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué Comunidad tiene mayor población?*

b) *¿Cuál tiene mayor extensión? ¿Y menor?*

c) *Calcula la densidad de población de las distintas Comunidades. ¿Cuál tiene mayor densidad?*

d) *Representa gráficamente la densidad de las Comunidades. ¿Qué tipo de gráfico vas a utilizar? ¿Por qué lo has escogido?*

Para estudiar la evolución de la población se definen las tasas de nacimientos, defunciones y matrimonios. Estas tasas se expresan por cada mil habitantes; así, una tasa de nacimientos de 120 por mil significa que por cada mil habitantes nacieron 120 bebés.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Halla la tasa de nacimientos, defunciones y matrimonios en España en el año 2002, sabiendo que hubo 209 065 matrimonios, 416 518 nacimientos y 366 358 defunciones.*

b) *Calcula la tasa de crecimiento vegetativo (nacimientos menos defunciones) en dicho año.*

c) *Halla la tasa de nacimientos en las distintas Comunidades y represéntala, sabiendo que el número de nacimientos fue (en el mismo orden de la tabla): 81 980, 10 393, 6 783, 10 351, 19 020, 4 517, 16 551, 18 058, 68 314, 43 912, 9 724, 19 350, 63 212, 15 501, 5 809, 18 242, 2 537, 1 055, 1 209.*

2 Utilización e interpretación de gráficos para representar datos

Observa el número de nacimientos en España en el período 1994-2002:

Año	Nacimientos
1994	370 148
1995	365 469
1996	362 626
1997	369 035
1998	365 193
1999	380 130
2000	397 632
2001	406 380
2002	416 518

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

¿Cómo representarías los datos: mediante un diagrama de barras, un histograma o un gráfico de sectores? Represéntalos de la forma más adecuada.

Esta tabla muestra los cinco municipios más poblados en España a 1 de enero de 2002:

Municipio	Habitantes
Madrid	3 016 788
Barcelona	1 527 190
Valencia	761 871
Sevilla	704 114
Zaragoza	620 419

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *¿Qué porcentaje de la población total (41 837 894) representan los datos por separado? ¿Y juntos?*

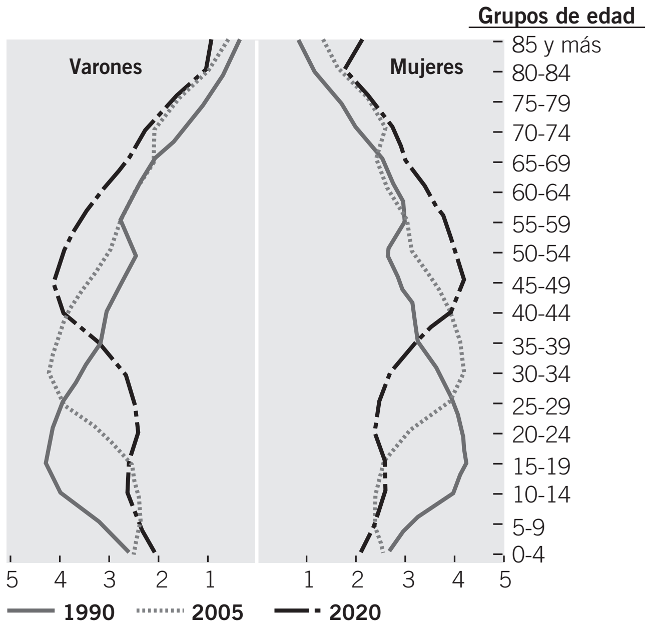
b) *Representa los datos mediante un gráfico de sectores. ¿Te parece un gráfico adecuado?*

A continuación tienes representadas las pirámides de población en España proyectadas de los años 1990, 2005 y 2020.

En ellas aparece, para cada sexo y segmento de edades, el tanto por ciento que representa sobre el total de la población. Así, puedes ver que en 2020 los varones entre 0 y 4 años serán el 2 % de la población total.

HAZ ESTA ACTIVIDAD.

Comenta cada una de las pirámides. ¿Cómo evolucionará la población española?



ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Hacer encuestas

Estrategia Para saber el partido político que puede ganar unas elecciones, el programa de televisión con mayor audiencia, etc., hay que hacer una encuesta. Cuando se realiza una encuesta a una población se formula una serie de preguntas a un conjunto de personas (muestra). Si la población es pequeña –por ejemplo, los alumnos de una clase–, la encuesta se aplica a toda la población.

El elemento principal de una encuesta es el cuestionario, que contiene todas las preguntas que se han de formular.

PROBLEMA RESUELTO

Responde al siguiente cuestionario. Luego, clasifica las respuestas, calcula los porcentajes y representa las respuestas de cada pregunta en un gráfico de barras o de sectores.

CUESTIONARIO

1. Edad ____________
2. Sexo ____________
3. Asignatura que más te gusta ____________
4. Asignatura que menos te gusta ____________
5. Asignatura que te resulta más sencilla ____________
6. Asignatura que te resulta más complicada ____________
7. Asignatura que quitarías ____________
8. Asignatura que añadirías ____________
9. Asignatura que más estudias y en la que más rendimiento obtienes ____________
10. Asignatura que menos estudias y en la que más rendimiento obtienes ____________
11. Eres partidario de clase en jornada de 9 a 3 de la tarde, ¿sí o no? ____________
12. Tiempo diario que dedicas a estudiar:
    ☐ 2 o más horas ☐ Entre 1 hora y 2 horas ☐ Menos de 1 hora
13. Tiempo diario que dedicas a ver la televisión:
    ☐ 2 o más horas ☐ Entre 1 hora y 2 horas ☐ Menos de 1 hora
14. El nivel de exigencia en tu clase es ¿alto, medio o bajo? ____________
15. En general, di cómo consideras tu relación con el profesor:
    ☐ Muy buena ☐ Buena ☐ Regular ☐ Mala ☐ Muy mala
16. Tu actitud hacia las Matemáticas es:
    ☐ Muy buena ☐ Buena ☐ Regular ☐ Mala ☐ Muy mala
17. Normalmente, el fracaso escolar en Matemáticas es alto. ¿Qué factores crees que influyen? Elige dos de ellos:
    ☐ Falta de conocimientos básicos en los alumnos.
    ☐ Dificultad intrínseca de la materia.
    ☐ Los alumnos no estudian lo suficiente.
    ☐ Hay pocas horas de clase a la semana.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

INTRODUCCIÓN

La presencia de la Estadística es habitual en multitud de contextos de la vida real: encuestas electorales, sondeos de opinión, etc. La importancia de la Estadística en la sociedad actual se refleja en muchos campos: estudios médicos sobre enfermedades o medicamentos; análisis para establecer primas de seguros; distribución de las líneas de autobuses en una ciudad… Por ello, es importante que los alumnos se familiaricen con los conceptos que emplea esta disciplina.

Las medidas estadísticas sirven para analizar la información contenida en un conjunto de datos. Estas medidas se pueden dividir en dos grupos: las que corresponden a medidas de centralización y las que corresponden a medidas de dispersión.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Variable estadística cualitativa*: no se puede medir.
- *Variable estadística cuantitativa*: se puede medir, y su medida se expresa mediante números.
- *Media*: $\overline{x} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$
- *Mediana*: es un valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son iguales o inferiores a él y la otra mitad son iguales o superiores.
- *Moda*: es el valor de la variable o el intervalo con mayor frecuencia absoluta.
- *Desviación media*: es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
- *Varianza*: es la media de los cuadrados de las desviaciones de los valores respecto de la media.
- *Desviación típica*: es la raíz cuadrada de la varianza.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Reconocer y diferenciar entre población y muestra.	• Estadística. • Población y muestra.	• Distinción de los conceptos de población y muestra.
2. Clasificar las variables estadísticas.	• Variables cuantitativas y cualitativas. • Variables cuantitativas discretas y continuas.	• Diferenciación entre variables cualitativas y cuantitativas, y dentro de estas, entre discretas y continuas.
3. Obtener la tabla estadística asociada a un conjunto de datos.	• Tablas estadísticas. • Marca de clase.	• Construcción de tablas estadísticas adecuadas al conjunto de datos.
4. Calcular la frecuencia absoluta y relativa de un conjunto de datos.	• Frecuencias absolutas. • Frecuencias relativas.	• Cálculo de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.
5. Calcular las frecuencias acumuladas de un conjunto de datos.	• Frecuencias acumuladas.	• Cálculo de frecuencias acumuladas.
6. Utilizar e interpretar los gráficos estadísticos.	• Gráficos estadísticos: diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias.	• Representación de las variables estadísticas mediante gráficos.
7. Calcular e interpretar las medidas de centralización de un conjunto de datos.	• Medidas de centralización: media, mediana y moda.	• Cálculo e interpretación de la media, la mediana y la moda de un conjunto de datos.
8. Calcular e interpretar las medidas de dispersión de un conjunto de datos.	• Medidas de dispersión: recorrido, desviación media, varianza y desviación típica.	• Cálculo e interpretación de las medidas de dispersión de un conjunto de datos.

OBJETIVO 1

RECONOCER Y DIFERENCIAR ENTRE POBLACIÓN Y MUESTRA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

POBLACIÓN Y MUESTRA

- **Estadística** es la ciencia encargada de recopilar y ordenar datos referidos a diversos fenómenos para su posterior análisis e interpretación.
- **Población** es el conjunto de elementos en los que se estudia un determinado aspecto o característica.
- **Muestra** es una parte de la población. Es importante escoger correctamente la muestra: debe ser representativa, es decir, dar una información similar a la obtenida si estudiásemos toda la población.

EJEMPLO

Considera tu clase como la población y completa el siguiente cuestionario.

Nombre: .... **Apellidos:** ....

Marca con una cruz la respuesta elegida y responde.

Sexo: ☐ Hombre ☐ Mujer

Deporte preferido:

☐ Fútbol ☐ Baloncesto ☐ Tenis ☐ Balonmano ☐ Otros

¿Cuántos hermanos tienes?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 o más hermanos

¿Cuántos años tienes?

☐ 13 años ☐ 14 años ☐ 15 años ☐ 16 años

¿Qué altura tienes?

¿Cuánto pesas?

Puede ocurrir que el día en que se reparta el cuestionario falte alguien en clase o que algún alumno no conteste y, aunque nuestro objetivo sea toda la **población**, es decir, el conjunto de los alumnos de clase, usaremos una parte de la población llamada **muestra**, que en nuestro caso estará formada por aquellos alumnos que hayan contestado al cuestionario.

1 **Señala en qué casos es más conveniente estudiar la población o una muestra.**

a) La longitud de los tornillos que fabrica una máquina de manera ininterrumpida.
b) La estatura de todos los visitantes extranjeros en un año en España.
c) El peso de un grupo de cinco amigos.
d) Los efectos de un nuevo medicamento en el ser humano.
e) El número de hijos de las familias de una comunidad de vecinos.
f) La talla de camisa de los varones de una comunidad autónoma.
g) Los gustos musicales de los jóvenes de una ciudad.
h) La altura media de veinte alumnos de una clase.

CLASIFICAR LAS VARIABLES ESTADÍSTICAS

NOMBRE: ____________ CURSO: ________ FECHA: ________

VARIABLE ESTADÍSTICA

- **Variable estadística** es toda característica o aspecto de los elementos de una población o muestra que se puede estudiar.
- Las variables estadísticas pueden ser **cuantitativas o cualitativas**.
- **Variables cuantitativas:** los valores que puede tomar son números. Pueden ser discretas o continuas.
  - **Variables cuantitativas discretas:** toman un número determinado de valores.
  - **Variables cuantitativas continuas:** pueden tomar cualquier valor comprendido entre dos dados.
- **Variables cualitativas:** no se pueden medir.

EJEMPLO

En el cuestionario del ejemplo anterior, diferencia las variables cuantitativas y cualitativas.

- Variables estadísticas cuantitativas: número de hermanos, edad, peso y altura.
  Estas variables las expresamos mediante números.
  - Variables estadísticas cuantitativas discretas: número de hermanos y edad.
  - Variables estadísticas cuantitativas continuas: peso y altura.
- Variables estadísticas cualitativas: sexo y deporte preferido.
  Estas variables no se expresan mediante números.

1 **Señala en cada caso lo que corresponda.**

VARIABLE	CUANTITATIVA		CUALITATIVA
	DISCRETA	CONTINUA	
Provincia de residencia			
Número de vecinos de un edificio			
Profesión de la madre			
Altura de un edificio			
Número de llamadas telefónicas diarias			
Número de primos			
Tipo de música preferida			
Barras de pan consumidas en una semana en un colegio			
Consumo de gasolina por cada 100 km			
Número de la puerta de tu casa			
Color de pelo			
Talla de pantalón			

OBTENER LA TABLA ESTADÍSTICA ASOCIADA A UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

TABLAS ESTADÍSTICAS

- Las **tablas estadísticas** sirven para organizar los datos de una variable estadística y estudiarlos con mayor facilidad.
- **Si la variable es discreta** y tenemos un conjunto de datos pequeño, se forma una tabla con dos columnas. En una de las columnas se colocan los distintos valores de la variable, y en la otra columna, el número de veces que aparece cada uno de ellos.
- **Si la variable es continua**, se agrupan los valores en intervalos de igual amplitud, se establece la marca de clase, que es el punto medio de cada intervalo, y se hace el recuento de los datos de cada intervalo.

EJEMPLO

Daniel ha comprado 5 bolsas de palomitas, 7 caramelos, 2 chicles de menta y 10 piruletas. Organiza este conjunto de datos en una tabla.

Si queremos recoger la información en una tabla, ponemos en una columna los distintos valores de la variable: bolsas de palomitas, caramelos, chicles de menta y piruletas, y en la otra, el número de veces que aparece cada uno de ellos.

ARTÍCULOS	RECUENTO
Bolsas de palomitas	5
Caramelos	7
Chicles de menta	2
Piruletas	10

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de 27 jóvenes son:

155, 178, 170, 165, 173, 168, 160, 166, 176, 169, 158, 170, 179, 161, 164, 156, 170, 171, 167, 151, 163, 158, 164, 174, 176, 164, 154

Forma una tabla, efectúa el recuento y obtén las marcas de clase.

En este caso, la variable es continua. Por tanto, debemos agrupar los datos en intervalos.

Para ello obtenemos la diferencia entre el valor mayor y el menor:

$$179 - 151 = 28$$

Para incluir todos los valores, tomamos 6 intervalos de amplitud 5 ($6 \cdot 5 = 30$, que es mayor que la diferencia entre el mayor y el menor).

Empezamos por el valor 150.

Marcas de clase:
$(150 + 155)/2 = 152{,}5$
$(155 + 160)/2 = 157{,}5$
$(160 + 165)/2 = 162{,}5$
$(165 + 170)/2 = 167{,}5$
$(170 + 175)/2 = 172{,}5$
$(175 + 180)/2 = 177{,}5$

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO
[150, 155)	152,5	2
[155, 160)	157,5	4
[160, 165)	162,5	6
[165, 170)	167,5	5
[170, 175)	172,5	6
[175, 180]	177,5	4

1 Las edades (en años) de 20 alumnos son:

13, 15, 14, 16, 13, 15, 14, 16, 15, 14, 13, 13, 13, 15, 14, 16, 14, 14, 15, 13

¿Qué tipo de variable es? Construye la correspondiente tabla.

EDADES	RECUENTO

2 El sexo de 20 alumnos es:

M, V, V, M, M, M, V, V, M, M, V, M, V, V, M, M, M, M, V, M

¿Qué tipo de variable es? Construye la tabla asociada a estos datos.

SEXO	RECUENTO

3 El peso (en kg) de 20 alumnos es:

66,5; 59,2; 60,1; 64,2; 70; 50; 41,6; 47,9; 42,8; 55;
52,2; 50,3; 42,2; 61,9; 52,4; 49,2; 41,6; 38,8; 36,5; 45

¿Qué tipo de variable es? Construye la tabla asociada a estos datos.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	RECUENTO

4 El número de horas diarias de estudio de 30 alumnos es:

3, 4, 3, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 2, 0, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 3, 2, 0, 1, 2, 1, 4, 2

Obtén una tabla del recuento de datos.

CALCULAR LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA

- **Frecuencia absoluta**, f_i, de un conjunto de datos es el número de veces que se repite cada valor de la variable, x_i, en el total de los datos.

  La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos, N.

- **Frecuencia relativa**, h_i, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos: $h_i = \dfrac{f_i}{N}$

  La frecuencia relativa es siempre un número comprendido entre 0 y 1.

  La suma de las frecuencias relativas es 1.

- **Porcentaje (%)** es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias y porcentajes.

Comenzamos a construir la tabla.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable.

– En la segunda columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.

– En la tercera columna colocamos el *cociente* entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina *frecuencia relativa.*

x_i	f_i	h_i	%
13	6	0,30	30
14	7	0,35	35
15	4	0,20	20
16	3	0,15	15
Suma	20	1	100

$$h_1 = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30 \qquad h_2 = \frac{f_2}{N} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$h_3 = \frac{f_3}{N} = \frac{4}{20} = 0{,}20 \qquad h_4 = \frac{f_4}{N} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

– En la cuarta columna colocamos el porcentaje, resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

1 **Las notas de inglés de 20 alumnos fueron:**

6, 5, 3, 1, 2, 5, 6, 5, 9, 8,
7, 4, 9, 10, 7, 7, 8, 6, 5, 5

Construye la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.

x_i	f_i	h_i	%
1	1	$\frac{1}{20} = 0{,}05$	$0{,}05 \cdot 100 = 5$
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Suma	20		

EJEMPLO

Los resultados de un test de inteligencia hecho a 25 personas fueron:

100, 80, 92, 101, 65, 72, 121, 68, 75, 93, 101, 100, 102,
97, 89, 73, 121, 114, 113, 113, 106, 84, 94, 83, 74

Obtén la tabla de frecuencias y de porcentajes tomando intervalos de amplitud 10.

– En la primera columna colocamos los valores de la variable, tomando 6 intervalos de amplitud 10, ya que la diferencia entre los valores extremos es 121 − 65 = 56.
– En la segunda columna colocamos la marca de clase de cada intervalo.
– En la tercera columna colocamos el número de veces que aparece cada dato. A este número se le llama frecuencia absoluta.
– En la cuarta columna colocamos el cociente entre la frecuencia absoluta de cada dato y el número total de datos (20). A este número se le denomina frecuencia relativa.
– En la quinta columna colocamos el porcentaje, que es el resultado de multiplicar la frecuencia relativa por 100.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[65, 75)	70	5	0,20	20
[75, 85)	80	4	0,16	16
[85, 95)	90	4	0,16	16
[95, 105)	100	6	0,24	24
[105, 115)	110	4	0,16	16
[115, 125]	120	2	0,08	8

2 **El peso (en kg) de 24 personas es:**

68,5; 34,2; 47,5; 39,2; 47,3; 79,2; 46,5; 58,3; 62,5; 58,7; 80; 63,4;
58,6; 50,2; 60,5; 70,8; 30,5; 42,7; 59,4; 39,3; 48,6; 56,8; 72; 60

Agrúpalo en intervalos de amplitud 10 y obtén la tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas y porcentajes.

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%

3 **Completa la siguiente tabla.**

x_i	f_i	h_i	%
10		4	
20	5		10
30		61	
40	10		
50		41	
60			18

ADAPTACIÓN CURRICULAR

OBJETIVO 5

CALCULAR LAS FRECUENCIAS ACUMULADAS DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FRECUENCIAS ACUMULADAS

- **Frecuencia absoluta acumulada, F_i,** de un valor x_i es la suma de las frecuencias f_j de todos los valores menores o iguales que él.
- **Frecuencia relativa acumulada, H_i,** de un valor x_i es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos: $H_i = \dfrac{F_i}{N}$

EJEMPLO

Las edades (en años) de 20 alumnos de un instituto son:

13, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16

Obtén la tabla de frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas.

– Para obtener la frecuencia absoluta acumulada de cada valor hay que sumar las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que él:

$F_1 = f_1 = 6$

$F_2 = f_1 + f_2 = 6 + 7 = 13$

$F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = 6 + 7 + 4 = 17$

$F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 6 + 7 + 4 + 3 = 20$

– Para obtener la frecuencia relativa acumulada de un valor hay que dividir la frecuencia absoluta acumulada de cada valor entre el número total de datos:

$$H_1 = \frac{F_1}{N} = \frac{f_1}{N} = \frac{6}{20} = 0{,}30$$

$$H_2 = \frac{F_2}{N} = \frac{f_1 + f_2}{N} = \frac{6+7}{20} = \frac{13}{20} = 0{,}65$$

$$H_3 = \frac{F_3}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{N} = \frac{6+7+4}{20} = \frac{17}{20} = 0{,}20$$

$$H_4 = \frac{F_4}{N} = \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{N} = \frac{6+7+4+3}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

DATOS x_i	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA (F_i)	FRECUENCIA RELATIVA (h_i)	FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA (H_i)
13	6	6	0,30	0,30
14	7	13	0,35	0,65
15	4	17	0,20	0,85
16	3	20	0,15	1

1 **Dados los datos de una variable estadística y las frecuencias absolutas, completa la tabla de frecuencias relativas y frecuencias absolutas y relativas acumuladas.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
1	4			
2	4			
3	3			
4	7			
5	5			
Suma				

2 **Los datos de la tabla se refieren a la estatura (en cm) de 40 alumnos. Obtén la tabla de frecuencias asociada a estos datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	h_i	%
[150, 155)		3		
[155, 160)		6		
[160, 165)		9		
[165, 170)		10		
[170, 175)		7		
[175, 180]		5		

3 **Dados los siguientes datos de una variable estadística, calcula su tabla de frecuencias.**

INTERVALO	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8]
FRECUENCIA	10	8	4	2

4 **Completa la siguiente tabla.**

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	%
10	5				
11		13			
12	10				
13		35			
14	7				
15	8				16

UTILIZAR E INTERPRETAR LOS GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

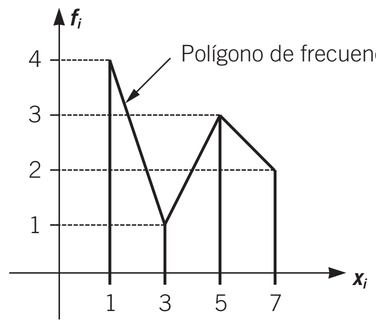
Los **gráficos** ayudan a representar fácilmente la información que contienen las tablas estadísticas. Según sea la variable, se usa un tipo u otro de gráfico.

- **Diagrama de barras:** se usa para representar datos cualitativos o cuantitativos discretos.
  Sobre el eje *X* se señalan los valores de la variable y se levantan barras de altura igual a la frecuencia representada (absoluta, absoluta acumulada, relativa o relativa acumulada).
- **Polígono de frecuencias:** es una línea poligonal que se obtiene a partir del diagrama de barras, uniendo cada extremo de una barra con el extremo de la barra siguiente.
- **Histograma:** se usa para representar variables cuantitativas continuas.
  Se señalan sobre el eje horizontal los extremos de los intervalos y se levantan rectángulos de altura igual a la frecuencia representada.
- **Polígono de frecuencias:** se obtiene al unir los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos del histograma.

EJEMPLO

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias del conjunto de datos.

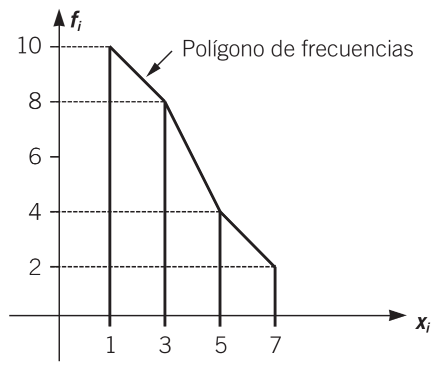
x_i	1	3	5	7
f_i	4	1	3	2



EJEMPLO

Representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias del siguiente conjunto de datos.

x_i	1	3	5	7
f_i	10	8	4	2



1 **La talla de calzado que utilizan 20 alumnos en una clase de Educación Física es:**

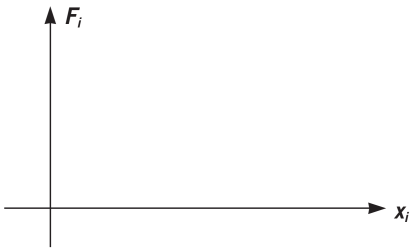
37, 40, 39, 37, 38, 38, 38, 41, 42, 37, 43, 40, 38, 38, 38, 40, 37, 37, 38, 38

Construye la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias absolutas y para las frecuencias absolutas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
37	5			
38	8			
39	1			
40	3			
41	1			
42	1			
43	1			
Suma				

FRECUENCIAS ABSOLUTAS

FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS



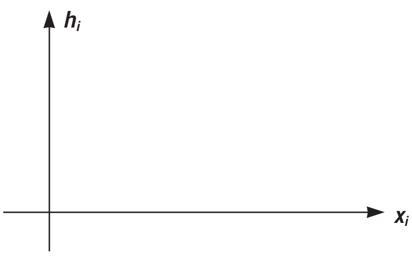
2 **En un edificio hay 25 viviendas y el número de vehículos por vivienda es:**

0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1

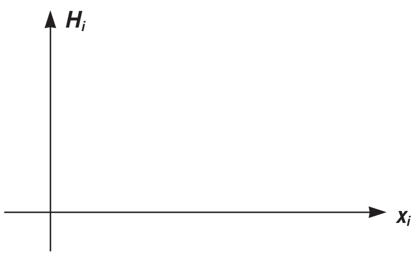
Construye la tabla de frecuencias y representa el diagrama de barras y el polígono de frecuencias para las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
0				
1				
2				
3				
4				
Suma				

FRECUENCIAS RELATIVAS



FRECUENCIAS RELATIVAS ACUMULADAS



3 **Al efectuar una encuesta a 50 clientes de un supermercado sobre los kilos de carne comprados a la semana, el 10 % afirmó que compraba de 1 a 2,5 kg; 20 de ellos compraban de 2,5 a 4 kg; el 30 % compraba de 4 a 5,5 kg y el resto de 5,5 a 7 kg.**

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) Representa el histograma de frecuencias relativas.

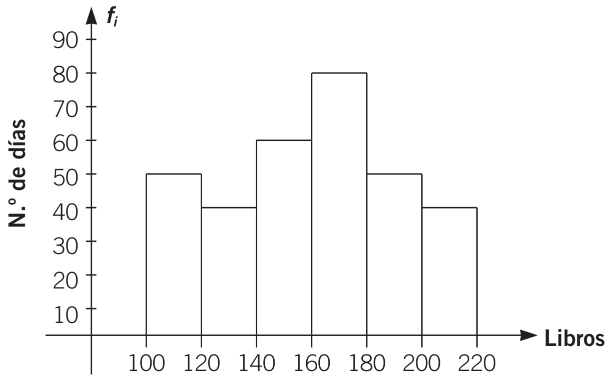
INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

4 **Observa el histograma de frecuencias absolutas referido a los libros vendidos diariamente en una librería.**

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) Representa el histograma de frecuencias absolutas acumuladas.

c) ¿Qué porcentaje de días se vendieron más de 200 libros? ¿Y menos de 100?



HISTOGRAMA DE FRECUENCIAS ABSOLUTAS ACUMULADAS

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	h_i	F_i	H_i	%

CALCULAR E INTERPRETAR LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ____________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

La media, la mediana y la moda se llaman **medidas de centralización** y son valores que resumen la información de la muestra.

MEDIA

Dado un conjunto de datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \ldots, f_n$, la **media**, $\overline{x}$, es igual a:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

Si los datos están agrupados en intervalos, el valor x_i es la marca de clase de cada intervalo.

EJEMPLO

Halla la media del siguiente conjunto de datos.

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
26	6	156
28	7	196
30	4	120
32	3	96
Suma	20	568

$$\overline{x} = \frac{568}{20} = 28{,}4$$

En la tabla de frecuencias hemos añadido una tercera columna donde se calcula el producto de cada valor por su frecuencia relativa.

1 **Dados los datos: 2, 5, 7, 8 y 7, calcula su media.**

2 **Halla la media del siguiente conjunto de datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
[0, 20)	10	50	
[20, 40)	30	67	
[40, 60)	50	30	
[60, 80]	70	42	
	Suma		

3 **Una alumna ha realizado 8 exámenes de una asignatura obteniendo estas notas: 7, 5, 6, 10, 9, 7, 6 y 6. ¿Qué nota media obtendrá en esa asignatura? Ten en cuenta que para hallar la media hay que sumar los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.**

CALCULAR E INTERPRETAR LAS MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

MEDIANA Y MODA

- La **mediana** de un conjunto de datos es el valor tal que, ordenados los datos de forma creciente, la mitad son menores que él y la otra mitad son mayores. Se representa por ***Me***.
  – Si el conjunto de datos es un número impar, la mediana es el valor central.
  – Si el conjunto de datos es un número par, la mediana es la media de los dos valores centrales.
- La **moda** de un conjunto de datos es el valor o valores de la variable que más se repite. Se representa por ***Mo***.

  El valor de la moda puede no ser único, es decir, puede haber varias modas.

EJEMPLO

Obtén la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos: 2, 2, 1, 6, 4, 3 y 9.

- Mediana:
  Ordenamos de forma creciente los datos: 1, 2, 2, **3**, 4, 6, 9.
  Como el número de datos es impar, la mediana es el valor central: $Me = 3$.
- Moda: el valor que más se repite es 2; por tanto, $Mo = 2$.

4 **Se estudia el número de usuarios de 20 autobuses, obteniendo los siguientes datos.**

3, 12, 7, 16, 22, 13, 18, 4, 6, 19, 24, 25, 4, 8, 12, 22, 17, 19, 23, 4

a) Realiza la tabla, agrupando los valores de 5 en 5 y empezando desde cero.
b) Calcula la moda, la mediana y la media.
c) Realiza un histograma con las frecuencias acumuladas.

INTERVALO	MARCA DE CLASE	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$

Media: $\bar{x} =$

Mediana: $Me =$

Moda: $Mo =$

5 **Calcula la media, la mediana y la moda del siguiente conjunto de datos.**

4, 7, 10, 8, 3, 2, 1, 2, 2, 8

6 **Las tallas de calzado que usan los 20 alumnos de una clase de 3.º ESO son:**

34, 34, 35, 35, 35, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40

Halla la media, la mediana y la moda.

7 **Un deportista quiere comprarse una bicicleta de montaña y analiza el precio y el peso de estas bicicletas.**

BICICLETA	PRECIO (€)	PESO (kg)
Marin Rift Zone	1 474	13,12
Kastle Degree 12.0	2 879	12,2
Sistesi Bazooka	3 540	15,7
Bianchi NTH	4 350	11,52
Arrow Spyce HPR	1 799	13,1
Pro-Flex Beast	1 788	13,46
DBR V-Link Pro	4 494	11,66
Specialized M-2 S-Works	2 934	10,35
Sunn Revolt 2	2 172	11,21
BH Top Line Expert 001	2 550	9,95

a) Halla el precio medio.

b) Calcula el peso medio.

CALCULAR E INTERPRETAR LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN DE UN CONJUNTO DE DATOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Las **medidas de dispersión** son medidas estadísticas que indican el mayor o menor grado de agrupamiento, alrededor de las medidas centrales, de los valores que forman un conjunto de datos.

El recorrido, la desviación, la desviación media, la varianza y la desviación típica son medidas de dispersión.

RANGO Y DESVIACIÓN RESPECTO DE LA MEDIA

- El **rango o recorrido** se calcula como la diferencia entre el mayor valor y el menor de la variable estadística.
- La **desviación respecto a la media** es la diferencia entre cada valor de la variable y la media. La suma de las desviaciones siempre es cero.

EJEMPLO

Las estaturas (en cm) de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

EQUIPO A	180	165	170	173	162
EQUIPO B	168	173	171	169	169

Calcula el rango o recorrido y la desviación para cada uno de los equipos.

- Recorrido = mayor valor de la variable − menor valor de la variable
  Equipo A: Recorrido = 180 − 162 = 18 cm
  Equipo B: Recorrido = 173 − 168 = 5 cm
  Se observa que las estaturas de los jugadores del equipo A están más dispersas que las del equipo B, ya que la diferencia entre el valor mayor y el menor es mayor en el equipo A.
- Desviación respecto a la media = valor de la variable − media
  Equipo A: Media = (180 + 165 + 170 + 173 + 162)/5 = 170 cm
  180 − 170 = 10 cm   165 − 170 = −5 cm
  170 − 170 = 0 cm   173 − 170 = 3 cm   162 − 170 = −8 cm
  Equipo B: Media = (168 + 173 +171 + 169 + 169)/5 = 170 cm
  168 − 170 = −2 cm   173 − 170 = 3 cm
  171 − 170 = 1 cm   169 − 170 = −1 cm   169 − 170 = −1 cm

  Observamos que la suma de las desviaciones es siempre cero:
  Equipo A: 10 + (−5) + 0 + 3 + (−8) = 0
  Equipo B: (−2) + 3 + 1 + (−1) + (−1) = 0

1 **En un examen de Matemáticas se han obtenido las siguientes notas.**

3, 5, 7, 2, 9, 5, 3

Obtén el recorrido y la desviación.

2 **Las edades de los alumnos de una clase vienen dadas por la siguiente tabla. Obtén el rango y la desviación.**

EDAD (x_i)	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \overline{x}$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})$
13	6			
14	7			
15	4			
16	3			
Suma				

3 **Calcula el recorrido y la desviación de los datos.**

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \overline{x}$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})$
[0, 4)		3			
[4, 8)		10			
[8, 12)		5			
[12, 16]		2			
Suma					

4 **Comprueba, para los pesos de 20 alumnos, que la suma de las desviaciones es cero.**

PESO	x_i	f_i	$x_i - \overline{x}$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})$
[35, 41)		2		
[41, 47)		5		
[47, 53)		6		
[53, 59)		1		
[59, 65)		4		
[65, 71]		2		

DESVIACIÓN MEDIA, VARIANZA Y DESVIACIÓN TÍPICA

- **Desviación media (*DM*):** es la media de los valores absolutos de las desviaciones.
- **Varianza:** es la media de los valores absolutos de las desviaciones al cuadrado.
- **Desviación típica:** es la raíz cuadrada de la varianza. Se designa con la letra σ.

EJEMPLO

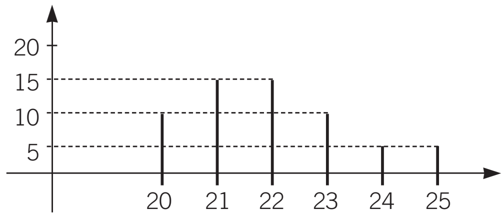
La tabla muestra los resultados obtenidos en un test de 120 preguntas. Halla la desviación media, la varianza y la desviación típica.

INTERVALO	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
[0, 30)	15	12	180	$\|15 - 52{,}35\| = 36{,}73$	1 349,02	$12 \cdot 1\,349{,}02 = 16\,726\,228{,}28$
[30, 60)	45	20	900	$\|45 - 52{,}35\| = 7{,}35$	54,02	$20 \cdot 54{,}02 = 1\,080{,}4$
[60, 90)	75	10	750	$\|75 - 52{,}35\| = 22{,}65$	513,02	$10 \cdot 513{,}02 = 5\,130{,}2$
[90, 120]	105	7	735	$\|105 - 52{,}35\| = 52{,}65$	2 772,02	$7 \cdot 2\,772{,}02 = 19\,404{,}14$
	Suma	**49**	**2 565**			**42.343,02**

$$\text{Desviación media} = \frac{36{,}73 \cdot 12 + 7{,}35 \cdot 20 + 22{,}65 \cdot 10 + 52{,}65 \cdot 7}{49} = 24{,}14$$

$$\text{Varianza} = \frac{42\,343{,}20}{49} = 864{,}14 \qquad \text{Desviación típica} = \sqrt{\text{varianza}} = \sqrt{864{,}14} = 29{,}4$$

5 **Calcula las medidas de centralización y las medidas de dispersión.**



x_i	f_i	F_i	$f_i \cdot x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot \|x_i - \bar{x}\|^2$
20							
21							
22							
23							
24							
25							
Suma							

Media $= \bar{x} =$

Mediana $= Me =$

Moda $= Mo =$

Rango $=$

Desviación media $=$

Varianza $=$

Desviación típica $= \sigma =$

6 **La basura (en kg) producida por cada habitante al año en 10 países europeos es la que muestra la siguiente tabla.**

PAÍS	BASURA (kg)
Alemania	337
Bélgica	313
España	214
Francia	288
Gran Bretaña	282
Italia	246
Noruega	415
Países Bajos	381
Suecia	300
Suiza	336

a) Calcula la media de basura producida por cada habitante en estos países.

b) ¿Cuánto vale la mediana de los datos?

c) ¿Cuál es el recorrido de la distribución?

d) Completa la tabla.

PAÍS	BASURA (kg)	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
Alemania	337		
Bélgica	313		
España	214		
Francia	288		
Gran Bretaña	282		
Italia	246		
Noruega	415		
Países Bajos	381		
Suecia	300		
Suiza	336		
Total			

e) ¿Cuánto suman las desviaciones respecto de la media?

f) ¿Cuánto vale la varianza?

g) ¿Y cuánto vale la desviación típica?

7 **En el Mundial de Fútbol del año 2006 los jugadores españoles seleccionados tenían las siguientes edades.**

Reina, 23 años	Capdevila, 28 años	Albelda, 28 años
Íker Casillas, 25 años	Michel Salgado, 30 años	Senna, 29 años
Cañizares, 36 años	Sergio Ramos, 20 años	Joaquín, 24 años
Antonio López, 24 años	Marchena, 26 años	Reyes, 22 años
Pablo Ibáñez, 24 años	Cesc, 19 años	Fernando Torres, 22 años
Pernía, 29 años	Iniesta, 22 años	Luis García, 27 años
Puyol, 28 años	Xavi, 26 años	Raúl, 28 años
Juanito, 29 años	Xabi Alonso, 24 años	Villa, 24 años

Completa la tabla y calcula.

EDADES (x_i)	FRECUENCIA ABSOLUTA (f_i)	$f_i \cdot x_i$	FRECUENCIA ACUMULADA (F_i)	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
Total						

a) La media de edades en 2006.

b) La mediana en 2006.

c) La moda en 2006.

d) El recorrido en 2006.

e) La desviación típica en 2006.

f) La media de edades actuales.

g) La mediana actual.

h) La moda actual.

i) El recorrido actual.

PROPUESTAS DE EVALUACIÓN

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Los aspectos que se tendrían que trabajar de forma previa al estudio de la unidad son los relativos a la Estadística de cursos anteriores, sobre todo los que hacen referencia a conceptos básicos:

- Distinción entre variables cualitativas y cuantitativas.
- Elaboración de un recuento de datos y realización de una tabla de frecuencias.
- Lectura e interpretación de un gráfico estadístico.

SUGERENCIAS SOBRE LAS EVALUACIONES Y SU CORRECCIÓN

EVALUACIÓN INICIAL

La prueba consta de tres actividades referidas a la distinción de una variable cualitativa y cuantitativa; elaboración de una tabla a partir de una serie de datos e interpretación de una gráfica estadística. Estas actividades tendrían que resultar fáciles para los alumnos, ya que son una revisión de conceptos estudiados en cursos anteriores.

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

La primera actividad se refiere a la distinción entre variables discretas y continuas. En las actividades 2 y 3 se trabaja con las tablas de frecuencias y las representaciones gráficas de un conjunto de datos agrupados en intervalos. Las dos últimas actividades trabajan el cálculo de los diferentes parámetros de centralización y dispersión, y en la actividad 4 se manejan también intervalos para el cálculo del intervalo mediano.

EVALUACIÓN INICIAL

1 **Consideramos la población de los alumnos de 3.º ESO de una ciudad. Determina qué variables son cualitativas y cuantitativas.**

a) La talla de camisa.
b) El lugar de nacimiento.
c) La fecha de nacimiento.
d) El número de hermanos.
e) El color del pelo.
f) La profesión de la madre.
g) La nacionalidad.
h) El deporte que practican.
i) La capacidad pulmonar.

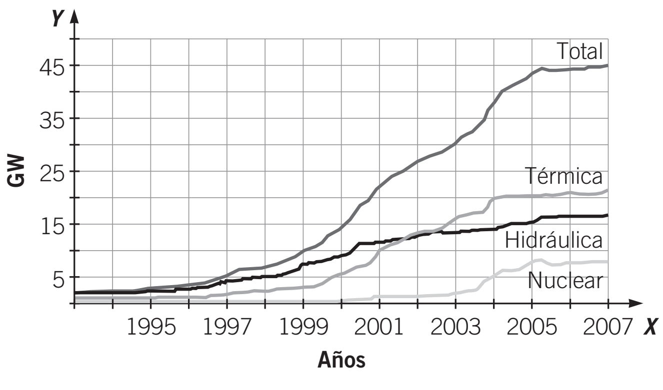
2 **Al preguntar a 30 personas de una localidad sobre el número de periódicos que habían comprado en la última semana, se obtuvieron estos resultados.**

3 5 0 4 2   1 1 4 2 0   3 0 3 1 7   2 2 0 6 1   7 2 0 3 0   3 6 5 2 3

A partir de estos datos, completa la tabla.

N.º de periódicos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	//////	6	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

3 **La gráfica muestra la potencia eléctrica instalada en España (en GW) desde el año 1940 hasta finales del siglo XX. Teniendo en cuenta la gráfica, contesta a las siguientes cuestiones.**



a) ¿Podemos considerar a España como un gran productor de energía nuclear de Europa?

b) ¿En España ha habido más potencia hidráulica o térmica?

c) ¿En qué año se superó el nivel de una potencia total de 30 GW?

d) ¿Qué proporción de energía nuclear hubo a finales de 2007 respecto de la total?

EVALUACIÓN INICIAL: SOLUCIONES

1 **Consideramos la población de los alumnos de 3.º ESO de una ciudad. Determina qué variables son cualitativas y cuantitativas.**

a) La talla de camisa ⟶ ***Variable cuantitativa.***
b) El lugar de nacimiento ⟶ ***Variable cualitativa.***
c) La fecha de nacimiento ⟶ ***Variable cuantitativa.***
d) El número de hermanos ⟶ ***Variable cuantitativa.***
e) El color del pelo ⟶ ***Variable cualitativa.***
f) La profesión de la madre → ***Variable cualitativa.***
g) La nacionalidad ⟶ ***Variable cualitativa.***
h) El deporte que practican ⟶ ***Variable cualitativa.***
i) La capacidad pulmonar ⟶ ***Variable cuantitativa.***

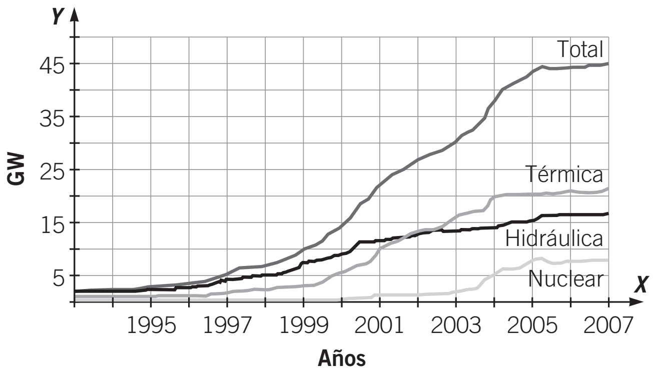
2 **Al preguntar a 30 personas de una localidad sobre el número de periódicos que habían comprado en la última semana, se obtuvieron estos resultados.**

3 5 0 4 2   1 1 4 2 0   3 0 3 1 7   2 2 0 6 1   7 2 0 3 0   3 6 5 2 3

A partir de estos datos, completa la tabla.

N.º de periódicos	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	//////	6	***6/30 = 0,2***
1	////	***4***	***4/30 = 0,133***
2	//////	***6***	***6/30 = 0,2***
3	//////	***6***	***6/30 = 0,2***
4	//	***2***	***2/30 = 0,067***
5	//	***2***	***2/30 = 0,067***
6	//	***2***	***2/30 = 0,067***
7	//	***2***	***2/30 = 0,067***

3 **La gráfica muestra la potencia eléctrica instalada en España (en GW) desde el año 1940 hasta finales del siglo XX. Teniendo en cuenta la gráfica, contesta a las siguientes cuestiones.**



a) ¿Podemos considerar a España como un gran productor de energía nuclear de Europa?
No, ya que no tenemos datos del resto de países.

b) ¿En España ha habido más potencia hidráulica o térmica?
A partir de 2002 la potencia térmica es mayor.

c) ¿En qué año se superó el nivel de una potencia total de 30 GW? ***En 2003.***

d) ¿Qué proporción de energía nuclear hubo a finales de 2007 respecto de la total?

La energía nuclear es aproximadamente $\frac{8}{45}$ ***partes del total, por lo que es el*** $\frac{8}{45} \cdot 100 = 17{,}78\ \%$.

ERES CAPAZ DE...

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

Clasificar las variables de una población o muestra en cualitativas o cuantitativas, y estas últimas en discretas o continuas.

1 **Clasifica las variables estadísticas referidas a un municipio en variables cuantitativas discretas o continuas.**

a) Número de hijos de las familias.
b) Peso de los alumnos de ESO.
c) Velocidad media de los coches que pasan por una calle.
d) Número de ordenadores que hay en cada vivienda.

Cálcular las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de un conjunto de datos estadísticos.

2 **Consideramos la siguiente tabla relativa a las alturas de los alumnos de ESO de un centro escolar.**

Estatura (en cm)	Marca de clase	Número de alumnos	f_i	F_i
[140, 150)		12		
[150, 160)		36		
[160, 170)		47		
[170, 180)		65		
[180, 190)		25		
[190, 200)		4		

Representar gráficamente un conjunto de datos estadísticos.

a) Completa la tabla y calcula las marcas de clase de cada intervalo.
b) Dibuja el histograma de frecuencias acumuladas y su polígono de frecuencias.

RELACIÓN DE CAPACIDADES	*ACTIVIDADES*
• *Enumerar e identificar elementos*	*2*
• *Definir, completar y seleccionar propiedades, relaciones, etc.*	
• *Transformar, distinguir, asociar e interpretar datos y relaciones*	*2, 3*
• *Extrapolar, deducir e inferir reglas o leyes*	
• *Aplicar, demostrar, estimar, resolver, etc.*	*2, 3, 4, 5*

3 **Anotamos las marcas de coches que pasan por el semáforo de una calle. Dibuja un diagrama de sectores correspondiente a estos datos.**

Marcas	N.º de coches
Seat	11
Renault	10
Peugeot	14
Audi	7
Opel	5
Ford	9
Mercedes	4

Cálcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos.

4 **Calcula la media, el intervalo mediano y la moda de los datos de la actividad 2.**

Cálcular las medidas de centralización y dispersión de un conjunto de datos.

5 **Dados estos datos, calcula las medidas de centralización y dispersión.**

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
1	4					
2	3					
3	6					
4	3					
5	8					
6	4					
7	7					
Total						

RELACIÓN DE CAPACIDADES	ACTIVIDADES
• Clasificar y discriminar según criterios	1
• Contrastar operaciones, relaciones, etc.	
• Combinar, componer datos, resumir, etc.	
• Deducir, formular hipótesis, generalizar, etc.	

EVALUACIÓN DE LA UNIDAD: SOLUCIONES

1 **Clasifica las variables estadísticas referidas a un municipio en variables cuantitativas discretas o continuas.**

a) Número de hijos de las familias. ***Cuantitativa discreta.***

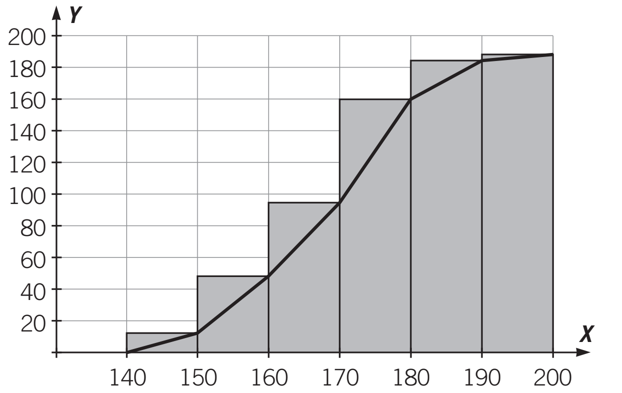
b) Peso de los alumnos de ESO. ***Cuantitativa continua.***

c) Velocidad media de los coches que pasan por una calle. ***Cuantitativa continua.***

d) Número de ordenadores que hay en cada vivienda. ***Cuantitativa discreta.***

2 **Consideramos la siguiente tabla relativa a las alturas de los alumnos de ESO de un centro escolar.**

Estatura (en cm)	Marca de clase	Número de alumnos	f_i	F_i
(140, 150]	***145***	12	***12/189***	***12***
(150, 160]	***155***	36	***36/189***	***48***
(160, 170]	***165***	47	***47/189***	***95***
(170, 180]	***175***	65	***65/189***	***160***
(180, 190]	***185***	25	***25/189***	***185***
(190, 200]	***195***	4	***4/189***	***189***



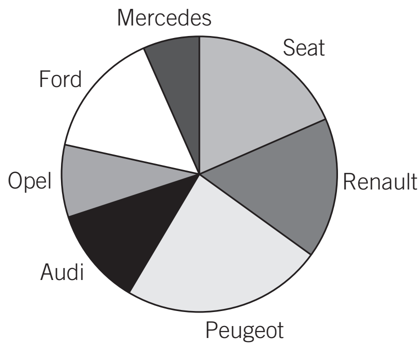
3 **Anotamos las marcas de coches que pasan por el semáforo de una calle.**
Dibuja un diagrama de sectores correspondiente a estos datos.

Como hay 60 coches, a cada coche le corresponderá:

$$\left.\begin{array}{l} 60 \rightarrow 360° \\ 1 \rightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow x = 6$$

Por tanto:

Seat $\longrightarrow$ ***11 · 6 = 66°***
Renault $\longrightarrow$ ***10 · 6 = 60°***
Peugeot $\longrightarrow$ ***14 · 6 = 84°***
Audi $\longrightarrow$ ***9· 6 = 42°***
Opel $\longrightarrow$ ***5 · 6 = 30°***
Ford $\longrightarrow$ ***9 · 6 = 54°***
Mercedes $\rightarrow$ ***4 · 6 = 24°***



4 **Calcula la media, el intervalo mediano y la moda de los datos de la actividad 2.**

Media aritmética: $\bar{x} = \dfrac{31\,855}{189} = 168{,}54$

Moda: Mo $=$ ***175***

Intervalo mediano: Como son 189 datos, la posición central será: $\dfrac{(189 + 1)}{2} = 95$***, dato que está en el intervalo (160, 170].***

5 **Dados estos datos, calcula las medidas de centralización y dispersión.**

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2$
1	4	***4***	***3,37***	***13,48***	***11,36***	***45,44***
2	3	***6***	***2,37***	***7,11***	***5,62***	***16,86***
3	6	***18***	***1,37***	***8,22***	***1,88***	***11,28***
4	3	***12***	***0,37***	***1,11***	***0,14***	***0,42***
5	8	***40***	***0,63***	***5,04***	***0,4***	***3,2***
6	4	***24***	***1,63***	***6,52***	***2,66***	***10,64***
7	7	***49***	***2,63***	***18,41***	***6,92***	***48,44***
Total	***35***	***153***		***59,89***		***136,28***

Medidas de centralización:

$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{153}{35} = 4{,}37$$

Me $= 4$ **Mo** $= 7$

Rango $= 7 - 1 = 6$

$$DM = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \overline{x}\rvert}{\Sigma f_i} = \frac{59{,}89}{35} = 1{,}71$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i (x_i - \overline{x})^2}{\Sigma f_i} = \frac{136{,}28}{23} = 3{,}89$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 1{,}97$$

14 Probabilidad

PROGRAMACIÓN DE AULA

OBJETIVOS

- Distinguir entre experimento aleatorio y determinista.
- Obtener el espacio muestral de un experimento aleatorio.
- Reconocer sucesos elementales, suceso seguro y suceso imposible en un experimento aleatorio.
- Realizar uniones e intersecciones de sucesos.
- Distinguir entre sucesos compatibles e incompatibles.
- Definir el concepto de probabilidad a partir de las frecuencias relativas.
- Calcular la probabilidad de distintos sucesos aplicando la regla de Laplace.
- Determinar la probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles o incompatibles.
- Obtener la probabilidad del suceso contrario a uno dado.

CONTENIDOS

CONCEPTOS

- Espacio muestral.
- Suceso elemental y suceso compuesto.
- Suceso seguro y suceso imposible.
- Unión e intersección de sucesos.
- Suceso contrario.
- Sucesos compatibles y sucesos incompatibles.
- Frecuencias absolutas y relativas.
- Probabilidad de un suceso.
- Regla de Laplace.

PROCEDIMIENTOS, DESTREZAS Y HABILIDADES

- Obtención del espacio muestral, los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.
- Obtención de la unión e intersección de dos sucesos dados.
- Distinción de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.
- Cálculo de las frecuencias absolutas y relativas de distintos sucesos.
- Utilización de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades de distintos sucesos en contextos de equiprobabilidad.
- Obtención de la probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles o incompatibles, y del suceso contrario a uno dado.

ACTITUDES

- Análisis crítico de las informaciones sobre fenómenos aleatorios.
- Valoración de la importancia del cálculo de probabilidades en distintos contextos de la vida diaria.

COMPETENCIAS QUE SE TRABAJAN

- Reconocer situaciones y fenómenos asociados a la probabilidad y el azar, resolviendo problemas asociados a estos conceptos.
- Reconocer y calcular el resultado de las operaciones básicas, decidiendo si es necesaria una respuesta exacta o aproximada, y aplicando el modo de cálculo más adecuado (mental, algoritmos con lápiz y papel o calculadora).
- Valorar e integrarse en el trabajo en grupo para la realización de actividades de diversos tipos, como base del aprendizaje matemático, de la formación de la autoestima y de valores sociales asumidos por nuestra sociedad.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

- Reconocer si un experimento es aleatorio o determinista.
- Hallar el espacio muestral de un experimento aleatorio.
- Obtener los sucesos elementales, el suceso seguro y el suceso imposible de un experimento aleatorio.
- Determinar el suceso unión y el suceso intersección de dos sucesos.
- Determinar si dos sucesos son compatibles o incompatibles.
- Obtener la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de un suceso.
- Aplicar la ley de Laplace para hallar la propiedad de distintos sucesos.
- Calcular la probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles o incompatibles.
- Obtener la probabilidad del suceso contrario a un suceso dado.

ESQUEMA DE LA UNIDAD

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Un **experimento aleatorio** es aquel del que no podemos predecir su resultado, es decir, que depende del azar.

- **Suceso elemental:** cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.
- **Espacio muestral:** conjunto de todos los sucesos elementales.
- **Suceso compuesto:** formado por dos o más sucesos elementales.
- **Sucesos compatibles:** cuando pueden ocurrir simultáneamente; en caso contrario, se denominan **incompatibles** o **mutuamente excluyentes**.
- **Suceso contrario** o **complementario, $\bar{A}$:** formado por todos los sucesos elementales que no están en A.

PROBABILIDAD

Regla de Laplace: «La probabilidad de un suceso es igual al número de sucesos elementales que contiene el suceso, dividido entre el número total de sucesos elementales».

$$P(A) = \frac{\text{n.º de casos favorables a } A}{\text{n.º de casos posibles}}$$

La **probabilidad** es el número hacia el que tienden las frecuencias relativas de un suceso cuando repetimos el experimento aleatorio un número muy elevado de veces.

LECTURA INICIAL

¡Jaque mate!

Abraham de Moivre nació en Vitry-le-François (Francia) el 26 de mayo de 1667 y falleció en Londres el 27 de noviembre de 1754.

No se le conoce ningún título académico, aunque estudió con alguno de los más famosos sabios de su época.

De Moivre era hugonote, por lo que a raíz de la revocación del Edicto de Nantes en 1685, fue perseguido, e incluso se cree que pasó un tiempo en prisión.

A su llegada a Londres se ganó el sustento dando clases de Matemáticas y Filosofía natural a algunos alumnos de clases pudientes, hasta que años después fue propuesto para ingresar en la Academia de las Ciencias, puesto que aceptó con agrado. Estudió las teorías de Newton, asimilándolas de tal manera que fue considerado un experto en las mismas, y se supone que este fue el motivo por el que se le designó para mediar en el conflicto surgido entre Newton y Leibniz por la autoría del cálculo diferencial, si bien otros dicen que se le nombró por ser amigo personal de Newton, y de hecho dictaminó en contra de Leibniz.

Uno de los lugares que frecuentaba en Londres era un café, Slaughter's Coffee House, donde solían reunirse intelectuales de la época, políticos, investigadores… El lugar, además de ser un centro de pensamiento libre, era aprovechado para jugar al ajedrez, habiendo personas que se ganaban la vida con esto, mediante apuestas o jugando para otros. De Moivre era un practicante asiduo del ajedrez, aunque esta es una faceta en la que no destacó.

Sus principales aportaciones al campo de las Matemáticas fueron en Geometría analítica y Teoría de la Probabilidad, y en su obra *The Doctrine of Chance*, describe la curva más importante que se maneja en Probabilidad y Estadística: la curva normal o campana de Gauss.

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Estudio del azar

El estudio del azar es algo complejo. Así, existen numerosos problemas relacionados con él, por ejemplo:

– Determinación de la aleatoriedad o no de un proceso.

Hay contextos en los que es necesario saber si un determinado fenómeno o proceso es aleatorio, es decir, si se rige por el azar o sigue una cierta ley o regularidad en su desarrollo.

En los juegos de azar, en el estudio de la distribución espacial de organismos biológicos, en fenómenos sociales… interesa saber si estos fenómenos ocurren de manera aleatoria o siguiendo una regla.

Existen estudios estadísticos que nos permiten analizar una serie de datos y determinar si son aleatorios o no.

– Obtención de números aleatorios.

En ocasiones se precisa obtener números de manera aleatoria, es decir, que se generen al azar, sin seguir ninguna regla concreta. Esto, que es fácil en apariencia, no lo es tanto como parece y existen numerosos estudios sobre este tema y formas de generar números aleatorios.

A la hora de realizar encuestas, de escoger individuos al azar para realizar estudios biológicos o sociales, en la criptografía, en transmisión de datos, en telefonía móvil, en localización de errores en chips… necesitamos disponer y generar estos números.

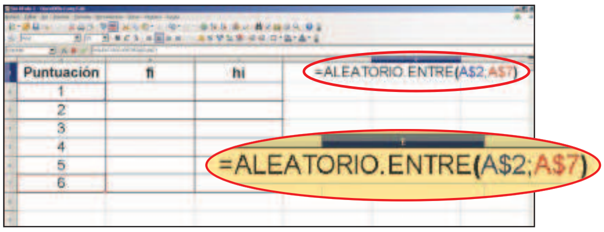
Un concepto asociado con el azar son las rachas. Llamamos racha a la repetición consecutiva de un resultado un elevado número de veces. Cuando ocurre así (imagina que al lanzar una moneda obtenemos cuatro caras seguidas), tendemos a pensar que el fenómeno en cuestión no es aleatorio. Pero esto es una idea errónea, ya que precisamente si un fenómeno es aleatorio tienden a producirse ese tipo de *coincidencias*.

MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

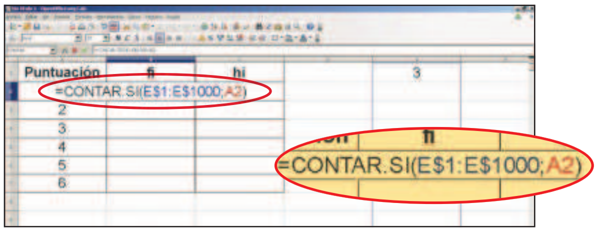
OpenOffice. CALC
es.openoffice.org

Halla de manera experimental, con las frecuencias relativas, la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales al lanzar un dado.

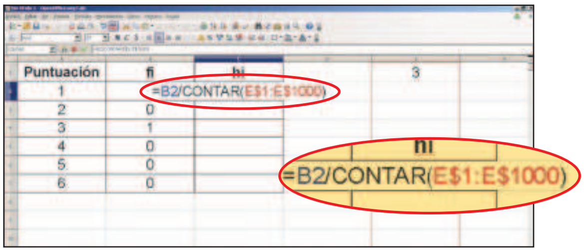
1. Elaboramos una tabla donde anotamos los resultados y escribimos, en la celda **E1**, =**ALEATORIO.ENTRE(A$2;A$7)**, que genera un número al azar entre 1 y 6.



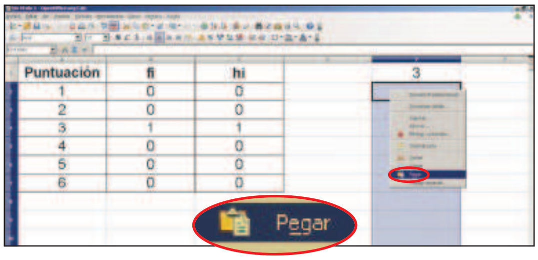
2. Escribimos =**CONTAR.SI(E$1:E$1000;A2)** en la celda **B2**, y lo pegamos en la columna, para contar el número de veces que sale la puntuación.



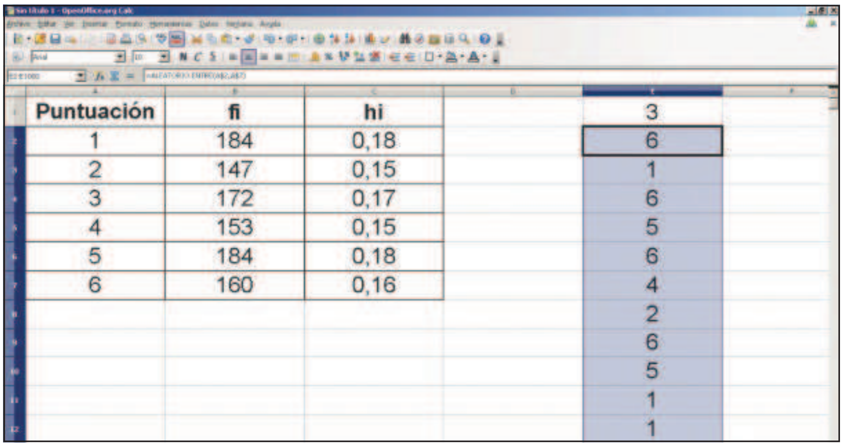
3. Escribimos =**B2/CONTAR(E$1:E$1000)** en la celda **C2**, y lo pegamos en la columna, para calcular la frecuencia relativa.



4. Copiamos el contenido de la celda **E1** y lo pegamos en las celdas desde **E2** hasta **E1000**, como si lanzáramos 1 000 veces el dado.



5. Las frecuencias relativas serían las probabilidades experimentales.



Puntuación	fi	hi		3
1	184	0,18		6
2	147	0,15		1
3	172	0,17		6
4	153	0,15		5
5	184	0,18		6
6	160	0,16		4
				2
				6
				5
				1
				1

SUGERENCIAS PARA RESOLVER LAS ACTIVIDADES

1 En la columna **Puntuación**, anotamos los posibles resultados del experimento aleatorio: 1 y 2.

Como se ha modificado el número de posibilidades debemos modificar también las fórmulas.

=**ALEATORIO.ENTRE(A$2;A$3)**
=**CONTAR.SI(E$1:E$1000;A2)**
=**B2/CONTAR(E$1:E$1000)**

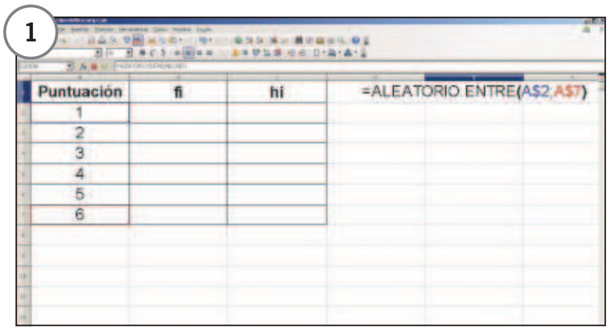
2 El principio de la actividad es igual al ejercicio resuelto y la conclusión es comprobar que la suma de frecuencias relativas, probabilidades experimentales, es uno.

Si utilizamos la tabla del ejercicio resuelto, bastaría definir =**SUMA(C2:C7)** en la celda **C8** y comprobar que el resultado es 1.

PASO A PASO

WIRIS
www.wiris.net

1

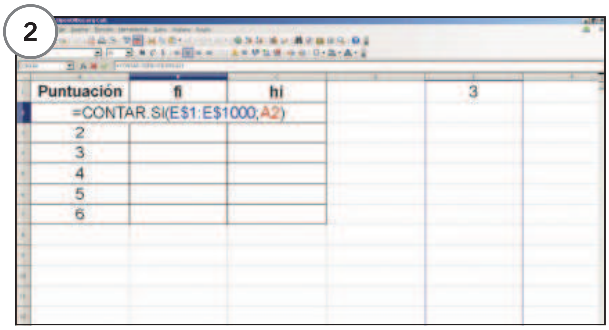


Utilizamos la función **ALEATORIO.ENTRE(número;número)**, que devuelve un número aleatorio comprendido entre los dos que hayamos escrito.

Elaboramos una tabla donde anotar los resultados y escribimos, en la celda **F1**, =**ALEATORIO.ENTRE(A$2;A$7)**, que genera un número al azar entre 1 y 6, en este caso ha aparecido el número 3.

Cada vez que se aprieta la tecla **Intro**, se vuelve a generar el número.

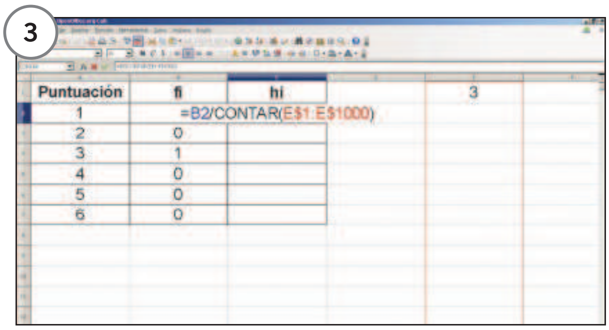
2



Para calcular la probabilidad debemos contar el número de veces que ocurre cada suceso, para ello utilizamos la función **CONTAR.SI(rango celdas;valor)** que cuenta el número de celdas cuyo contenido es igual al valor fijado.

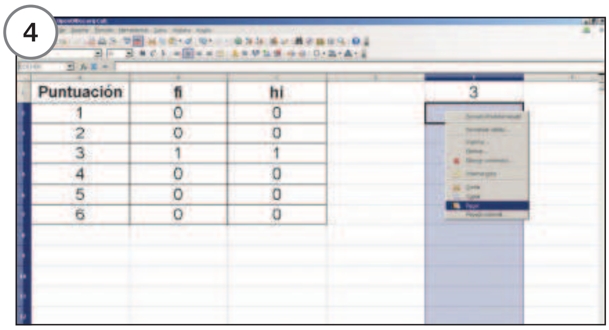
Escribimos =**CONTAR.SI(E$1:E$1000;A2)** en la celda **B2**, y la pegamos en la columna, para contar el número de veces que sale la puntuación, apareciendo un único 1 en la celda correspondiente al 3.

3



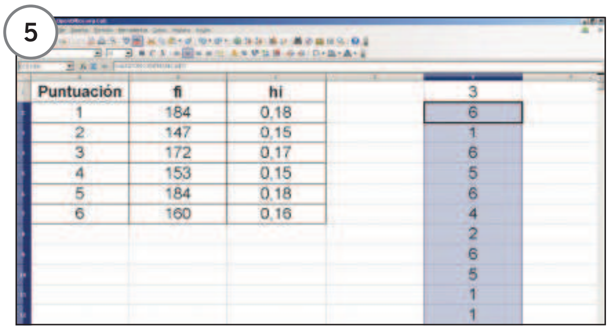
Calculamos las frecuencias relativas en la columna **C**, para ello escribimos =**B2/CONTAR(E$1:E$1000)** en la celda **C2**, y la pegamos en la columna, para calcular la frecuencia relativa.

4



Para simular el lanzamiento del dado 1 000 veces, copiamos el contenido de la celda **E1** y lo pegamos en las celdas desde **E2** hasta **E1000**, como si lanzáramos 1 000 veces el dado.

5



Pulsando la tecla **Intro**, aparecen la simulación de las tiradas y las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas de cada suceso elemental.

Las frecuencias relativas de los sucesos elementales se pueden considerar como probabilidades obtenidas de forma experimental.

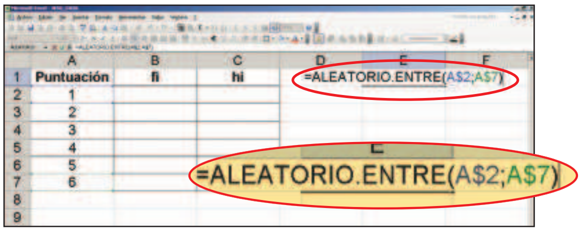
Haciendo doble clic en la celda **E1** y pulsando **Intro** genera una nueva tirada de 1 000 dados y calcula sus frecuencias.

MATEMÁTICAS CON ORDENADOR

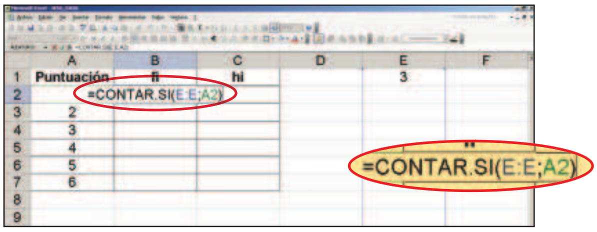
Microsoft Office. EXCEL

Halla de manera experimental, con las frecuencias relativas, la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales al lanzar un dado.

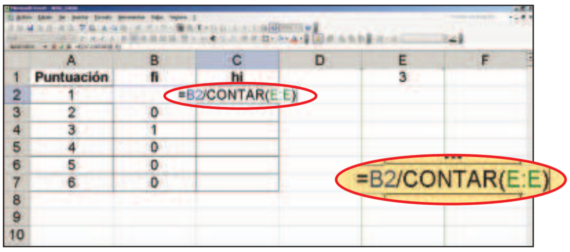
1. Elaboramos una tabla donde anotamos los resultados y escribimos, en la celda **F1**, =ALEATORIO.ENTRE(A$2;A$7), que genera un número al azar entre 1 y 6.



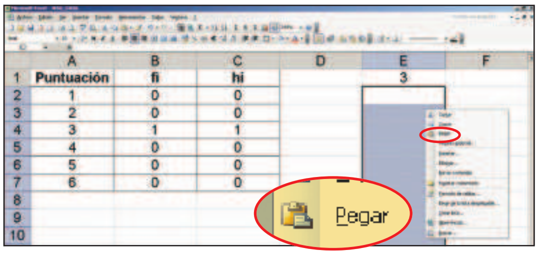
2. Escribimos =CONTAR.SI(E:E;A2) en la celda **B2**, y la pegamos en la columna, para contar el número de veces que sale la puntuación.



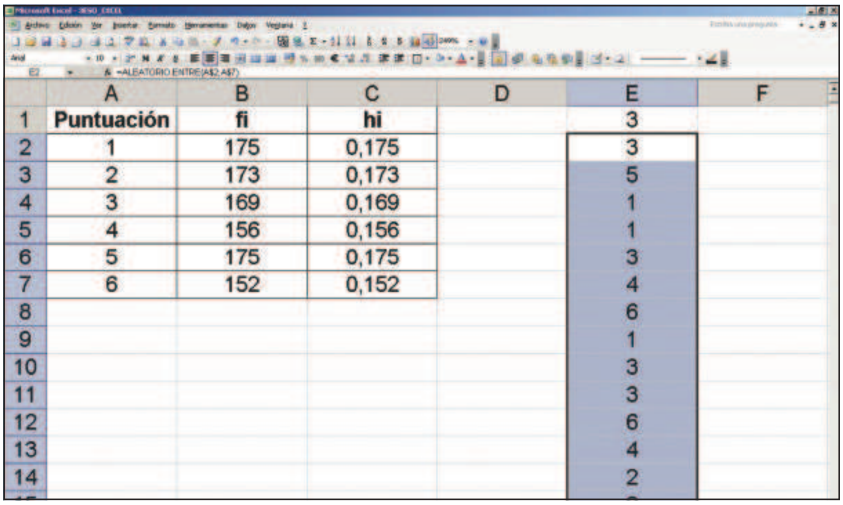
3. Escribimos =B2/CONTAR(E:E) en la celda **C2**, y la pegamos en la columna, para calcular la frecuencia relativa.



4. Copiamos el contenido de la celda **F1** y lo pegamos en las celdas desde **F2** hasta **F1000**, como si lanzáramos 1 000 veces el dado.



5. Las frecuencias relativas serían las probabilidades experimentales.



	A	B	C	D	E	F
1	Puntuación	fi	hi		3	
2	1	175	0,175		3	
3	2	173	0,173		5	
4	3	169	0,169		1	
5	4	156	0,156		1	
6	5	175	0,175		3	
7	6	152	0,152		4	
8					6	
9					1	
10					3	
11					3	
12					6	
13					4	
14					2	

ACTIVIDADES

PRACTICA

1. Halla de manera experimental, con las frecuencias relativas, la probabilidad de los sucesos elementales al lanzar una moneda equilibrada que tiene un 1 en una cara y un 2 en la otra.

INVESTIGA

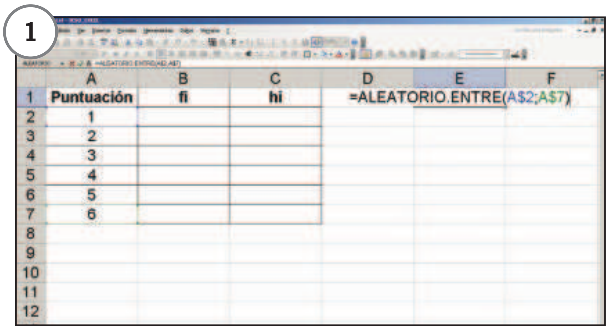
2. Comprueba, de manera experimental, la siguiente propiedad de la probabilidad:

La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es 1.

PASO A PASO

Microsoft Office. EXCEL

1

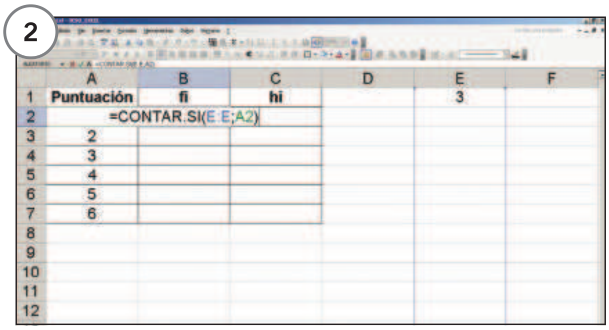


Utilizamos la función **ALEATORIO.ENTRE(número;número)**, que devuelve un número aleatorio comprendido entre los dos que hayamos escrito.

Elaboramos una tabla donde anotar los resultados y escribimos, en la celda **F1**, =**ALEATORIO.ENTRE(A$2;A$7)**, que genera un número al azar entre 1 y 6, en este caso ha aparecido el número 3.

Cada vez que se aprieta la tecla **Intro**, se vuelve a generar el número.

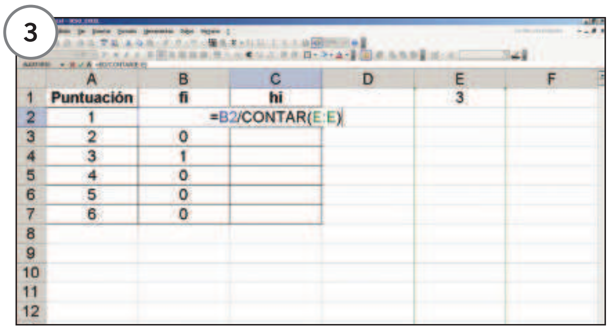
2



Para calcular la probabilidad debemos contar el número de veces que ocurre cada suceso, para ello utilizamos la función **CONTAR.SI(rango celdas;valor)** que cuenta el número de celdas cuyo contenido es igual al valor fijado.

Escribimos =**CONTAR.SI(E:E;A2)** en la celda **B2**, y la pegamos en la columna, para contar el número de veces que sale la puntuación, apareciendo un único 1 en la celda correspondiente al 3.

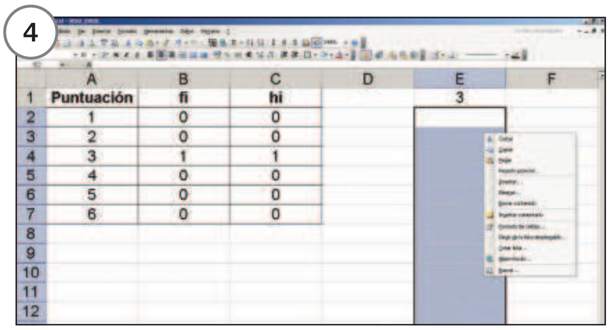
3



Calculamos las frecuencias relativas en la columna **C**, para ello escribimos =**B2/CONTAR(E:E)** en la celda **C2**, y la pegamos en la columna, para calcular la frecuencia relativa.

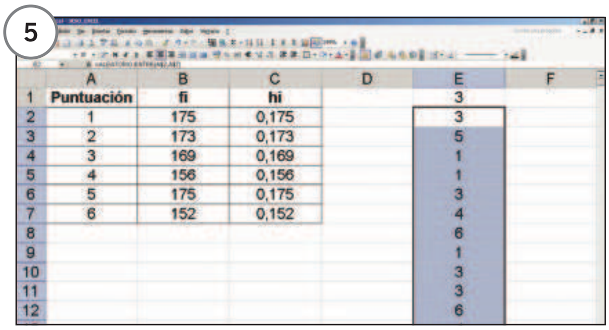
La función **CONTAR(rango)** cuenta el número de celdas no vacías en un rango prefijado.

4



Para simular el lanzamiento del dado 1000 veces, copiamos el contenido de la celda **E1** y lo pegamos en las celdas desde **E2** hasta **E1000**, sería como si lanzáramos 1 000 veces el dado.

5



Pulsando la tecla **Intro**, aparecen la simulación de las tiradas y las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas de cada suceso elemental.

Las frecuencias relativas de los sucesos elementales se pueden considerar como probabilidades obtenidas de forma experimental.

Haciendo doble clic en la celda **E1** y pulsando **Intro** genera una nueva tirada de 1 000 dados y calcula sus frecuencias.

EN LA VIDA COTIDIANA...

Sondeos de opinión

En este proyecto pretendemos que aprendas a:

• Conocer la ley que regula el proceso electoral español en el Congreso de los Diputados. • Relacionar el número de votos obtenidos con el de escaños conseguidos aplicando la ley D'Hont. • Aplicar una ley proporcional para transformar el número de votos en escaños. • Investigar las situaciones más desfavorecidas al aplicar la ley D'Hont.

1 Características de la ley D'Hon't

La Ley Orgánica de Régimen Electoral General 5/1985, de 19 de junio, en su artículo 162 dice:

1.º El Congreso está formado por 350 diputados.

2.º A cada provincia le corresponde un mínimo de 2 diputados y a las poblaciones de Ceuta y Melilla un diputado para cada una.

3.º Los 248 diputados restantes se distribuyen entre las provincias en proporción a su población. Para ello:

a) Se obtiene una cuota de reparto resultante de dividir entre 248 el total de la población de derecho de las provincias peninsulares e insulares.

b) Se adjudican a cada provincia tantos diputados como resulten (en números enteros) de dividir la población de derecho provincial entre la cuota de reparto.

c) Los diputados restantes se distribuyen asignando uno a cada una de las provincias cuyo cociente obtenido conforme b) tenga una fracción decimal mayor.

4.º El decreto de convocatoria debe especificar el número de diputados que se elegirán en cada circunscripción.

El número de diputados que correspondió a cada provincia después de obtener la cuota de reparto fue:

A Coruña	8	Huelva	5
Álava	4	Huesca	3
Albacete	4	Jaén	6
Alicante	12	La Rioja	4
Almería	6	Las Palmas	8
Asturias	8	León	5
Ávila	3	Lleida	4
Badajoz	6	Lugo	4
Baleares	8	Madrid	35
Barcelona	31	Málaga	10
Burgos	4	Murcia	10
Cáceres	4	Navarra	5
Cádiz	9	Ourense	4
Cantabria	5	Palencia	3
Castellón	5	Pontevedra	7
Ciudad Real	5	Salamanca	4
Córdoba	6	Sta. Cruz de Tenerife	7
Cuenca	3	Segovia	3
Girona	6	Sevilla	12
Granada	7	Soria	2
Guadalajara	3	Tarragona	6
Guipúzcoa	6	Teruel	3
Toledo	6	Vizcaya	8
Valencia	16	Zamora	3
Valladolid	5	Zaragoza	7
Ceuta	1	Melilla	1

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Escribe las diez provincias españolas con mayor población de derecho, ordenadas de mayor a menor.*

b) *¿Qué provincias tienen un solo diputado?*

c) *¿Por qué la Ley Orgánica establece un mínimo de dos diputados por provincia?*

2 Aplicación de la ley D'Hont

Según el artículo 163 de la Ley Orgánica, la atribución de los escaños en función de los resultados del escrutinio, se realiza de esta manera.

a) No se tienen en cuenta aquellas candidaturas que no hubieran obtenido al menos el 3 % de los votos válidos por la circunscripción.

b) Se ordenan, de mayor a menor, en una columna las cifras de votos obtenidos por las distintas candidaturas. Se divide el número de votos obtenido entre 1, 2, 3... hasta un número igual al de los escaños de la circunscripción. Los escaños se atribuyen a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores.

Así, por ejemplo, en una circunscripción que elige a 4 candidatos, si los votos válidos han sido 240 000 repartidos en seis candidaturas *A*(84 000), *B*(52 000), *C*(36 000), *D*(32 000), *E*(20 000) y *F*(16 000), el reparto se hace así:

División	: 1	: 2	: 3	: 4
A	**84 000**	**42 000**	28 000	21 000
B	**52 000**	26 000	17 333	13 000
C	**36 000**	18 000	12 000	9 000
D	32 000	16 000	10 667	8 000
E	20 000	10 000	6 667	5 000
F	16 000	8 000	5 333	4 000

La candidatura *A* obtiene dos escaños y las candidaturas *B* y *C* un escaño cada una.

HAZ ESTAS ACTIVIDADES.

a) *En las últimas elecciones los resultados en Valladolid fueron los siguientes (porcentajes respecto a los votos válidos).*

Candidaturas	PP	PSOE	IU	Otros
Votos	172 085	148 878	11 065	13 403
%	49,82	43,10	3,20	3,88

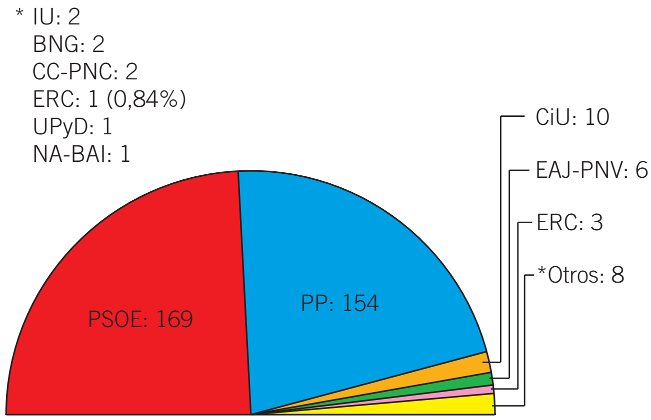
Sabiendo que eran 5 los escaños por repartir, aplica la ley D'Hont y obtén el número de diputados correspondientes a los partidos en Valladolid.

b) *En Tarragona, los resultados fueron:*

Candidaturas	PSC	CIU	PP	ERC	Otros
Votos	169 246	79 601	66 945	35 433	20 420
%	45,54	21,42	18,01	9,53	5,49

Sabiendo que son 6 los escaños por repartir, ¿cuántos diputados alcanzó cada formación política?

Aquí tienes la distribución de los escaños correspondiente al año 2000:



Los resultados totales del año 2000 fueron:

Candidaturas	Votos	%	Escaños
PSOE	11 289 335	44,36	169
PP	10 278 010	40,39	154
CIU	779 425	3,06	10
EAJ-PNV	306 128	1,20	6
ERC	298 139	1,17	3
IU	969 946	3,81	2
BNG	212 543	0,84	2
CC-PNC	174 629	0,69	2
UPyD	306 079	1,20	1
NA-BAI	62 398	0,25	1
Otros	772 052	3,03	0

REALIZA LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *¿Qué ángulo le corresponde a cada sector de los partidos en el hemiciclo de los diputados?*

b) *Convierte el gráfico del hemiciclo en un gráfico de sectores. ¿Qué ángulo le corresponde a cada sector?*

c) *Si el reparto de los 350 escaños se hiciera de forma directamente proporcional al porcentaje de votos obtenido, halla el número de escaños que le correspondería a cada partido.*

d) *¿Qué diferencias observas entre el resultado de la pregunta anterior y el que nos proporciona la ley D'Hont (cuarta columna de la tabla)?*

UNIDAD **14**

ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Método de ensayo y error

Estrategia Esta estrategia consiste en elegir un resultado u operación y aplicar los datos del enunciado hasta lograr el objetivo. Si la respuesta es negativa, es decir, si de ese ensayo se obtiene un error, se repite el procedimiento con otros números hasta alcanzar el objetivo o demostrar que el problema es imposible de resolver. En todo el proceso se deben tener en cuenta los ensayos ya realizados.

PROBLEMA RESUELTO

Obtén un número natural tal que, elevado al cuadrado y sumado con él mismo, dé como resultado 156.

Planteamiento y resolución

Suponiendo que el número es 5, entonces:

$$5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$$

Como resulta un número inferior a 156, repetimos el procedimiento con otro número mayor; por ejemplo, 10:

$$10^2 + 10 = 100 + 10 = 110$$

Como es inferior, repetimos con otro número mayor; por ejemplo, 15:

$$15^2 + 15 = 225 + 15 = 240$$

Nos hemos pasado, así que el número buscado está entre 10 y 15. Probamos con 13:

$$13^2 + 13 = 169 + 13 = 182$$

Como se pasa, probamos con un número inferior, 12:

$$12^2 + 12 = 144 + 12 = 156$$

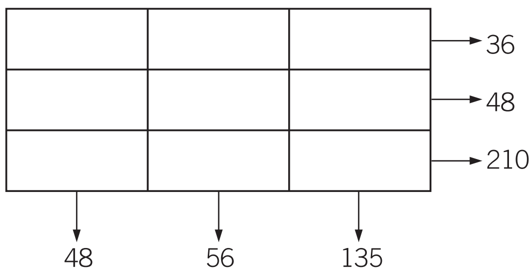
El número 12, es el número que elevado al cuadrado y sumado con él mismo, da como resultado 156.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. **Obtén un número natural tal que, elevado al cuadrado y sumado con él mismo, dé como resultado 210.**

2. **Obtén un número natural tal que, elevado al cuadrado menos él mismo, dé como resultado un número de tres cifras que tenga dos ceros.**

3. **Coloca en cada casilla del siguiente cuadro un número del 1 al 9, una sola vez, de tal forma que los productos horizontales y verticales sean los que aparecen en el cuadro.**



¿Es única la solución que has obtenido?

ADAPTACIÓN CURRICULAR

INTRODUCCIÓN

El estudio matemático de la probabilidad surge históricamente vinculado a los juegos de azar. Actualmente la probabilidad se utiliza en muchas disciplinas unidas a la Estadística: predicción de riesgos en seguros, estudios sobre la calidad de procesos industriales, etc.

Las posibles dificultades de la unidad son más de tipo conceptual que de procedimientos, ya que los cálculos numéricos son muy sencillos.

Se debe incidir en la correcta comprensión y aplicación de los conceptos de la unidad: experimento aleatorio o determinista, espacio muestral, suceso, operaciones con sucesos, tipos de frecuencias, probabilidad y regla de Laplace.

La resolución de los ejercicios de la unidad permitirá a los alumnos asimilar los diferentes conceptos. Se hace hincapié en el cálculo de la probabilidad de un suceso, y la aplicación de la regla de Laplace en contextos de equiprobabilidad.

Conviene explicar la relación entre la frecuencia relativa y la probabilidad como otra forma de alcanzar probabilidades.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Experimento aleatorio*: repetido en igualdad de condiciones no se conoce el resultado.
- *Suceso elemental*: cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- *Suceso seguro*: se verifica siempre.
  Suceso imposible: nunca se verifica.
- *Sucesos compatibles*: se verifican simultáneamente.
  Sucesos incompatibles: no pueden ocurrir a la vez.
- La *unión de dos sucesos* está formada por todos los sucesos elementales de los sucesos.
- La *intersección de dos sucesos* está formada por los sucesos elementales comunes.
- *Frecuencia absoluta* (f_i): número de veces que ocurre un suceso al repetir el experimento aleatorio N veces. *Frecuencia relativa* (h_i): $h_i = \frac{f_i}{N}$.
- *Probabilidad de un suceso*: es un número entre 0 y 1 que mide la facilidad de ocurrencia de un suceso.
- Regla de Laplace:
$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Distinguir entre experimento aleatorio y determinista.	• Experimento determinista. • Experimento aleatorio.	• Clasificación de experimentos.
2. Obtener el espacio muestral de un experimento aleatorio.	• Espacio muestral. • Suceso elemental.	• Obtención del espacio muestral de un experimento aleatorio.
3. Obtener los sucesos elementales, el suceso seguro e imposible de un experimento aleatorio.	• Suceso elemental. • Suceso seguro. • Suceso imposible.	• Obtención de sucesos elementales, suceso seguro e imposible de un experimento aleatorio.
4. Determinar el suceso unión e intersección de dos sucesos aleatorios.	• Unión e intersección de sucesos. • Sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.	• Cálculo de la unión e intersección de dos sucesos dados. • Cálculo de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios.
5. Obtener la frecuencia absoluta y relativa de un suceso.	• Frecuencia absoluta. • Frecuencia relativa.	• Obtención de las frecuencias absolutas y relativas.
6. Calcular la probabilidad de un suceso.	• Probabilidad de un suceso. • Regla de Laplace.	• Utilización de la regla de Laplace para calcular probabilidades.
7. Aplicar las propiedades de la probabilidad.	• Suma de probabilidades. • Probabilidad del suceso seguro, imposible y contrario.	• Aplicación de las propiedades de la probabilidad para resolver problemas en contextos reales.

DISTINGUIR ENTRE EXPERIMENTO ALEATORIO Y DETERMINISTA

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS

- **Experimento determinista** es aquel que, una vez estudiado, podemos predecir, es decir, que sabemos lo que sucederá antes de que ocurra.

  Por ejemplo:
  – Si ponemos un recipiente con agua a calentar, sabemos que el agua hierve a 100 °C.
  – Si un coche que va a 100 km/h tarda en hacer un trayecto 2 horas, tenemos la certeza de que ha recorrido 200 km.

  Estos experimentos son deterministas.

- **Experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, que por muchas veces que repitamos el experimento en igualdad de condiciones, no se conoce el resultado que se va a obtener.

  El lenguaje utilizado para expresar experimentos aleatorios está relacionado con situaciones de incertidumbre, ya que se trata de situaciones de azar: «es más probable, es igual de probable, es imposible, es poco probable, es más seguro, es improbable, es casi seguro…».

  Por ejemplo:
  – Si lanzamos un dado, no podemos predecir el número que saldrá.
  – Cuando sacamos una bola de una caja que contiene bolas de diferentes colores, no podemos predecir el color que obtendremos.

1 **Clasifica los siguientes experimentos. En el caso de que el experimento sea aleatorio, escribe un posible resultado.**

EXPERIMENTO	DETERMINISTA	ALEATORIO	
Lanzar un dado		×	Sacar un 3
El resultado de dividir 10 entre 2	×		
En una caída libre de 5 metros, saber la velocidad que se alcanza			
Lanzar una moneda al aire			
Sacar una carta de una baraja española			
Saber la fecha de nacimiento de una persona			
Sacar una ficha roja de una caja donde hay 20 fichas rojas y 5 fichas azules			
Lanzar un dado y obtener una puntuación mayor que 5			
Saber el resultado de elevar un número al cuadrado			
Conocer el tiempo que va a hacer mañana			

OBTENER EL ESPACIO MUESTRAL DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

ESPACIO MUESTRAL

- El **espacio muestral** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por *E*.
- Cada uno de los resultados posibles se denomina **suceso elemental**.

EJEMPLO

Determina el espacio muestral y sus sucesos elementales en estos experimentos.

EXPERIMENTO	ESPACIO MUESTRAL	SUCESOS ELEMENTALES
Lanzar una moneda	$E = \{\text{cara, cruz}\}$	cara (*c*) y cruz (*x*)
Lanzar un dado	$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	1, 2, 3, 4, 5 y 6

1 **Considera un dado en forma de tetraedro.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b) ¿Cuáles son los sucesos elementales del experimento aleatorio que consiste en tirar el dado?

2 **¿Cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar dos bolas, sin introducir la que se saca, de una urna que contiene dos bolas numeradas como 1 y 2?**

3 **¿Cuál es el espacio muestral de un experimento que consiste en sacar tres bolas, sin introducir la que se saca, de una urna que contiene tres bolas numeradas del 1 al 3?**

4 **Se lanzan dos dados y se suman los puntos. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? Forma el espacio muestral.**

OBJETIVO 3

OBTENER LOS SUCESOS ELEMENTALES, SEGURO E IMPOSIBLE

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SUCESOS

- Cada **suceso** está formado por uno o varios sucesos elementales.
- El **suceso seguro** está formado por todos los resultados posibles (sucesos elementales). Se verifica siempre.
- El **suceso imposible** no contiene ningún suceso elemental. Nunca se verifica.

EJEMPLO

En el experimento de lanzar un dado al aire determina un suceso seguro y uno imposible.

Un **suceso seguro** es obtener un número menor que 6.
Un **suceso imposible** es obtener el número 30.

1 **Con una baraja de cartas española, se realiza el experimento de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen estos sucesos.**

a) Sacar oros.
b) Sacar un 5.
c) Sacar figura.
d) Sacar bastos.

2 **Dadas ocho cartas numeradas del 1 al 8, se realiza el experimento aleatorio de sacar una carta. Escribe los sucesos elementales que componen los siguientes sucesos.**

a) Obtener número par.
b) Obtener múltiplo de 3.
c) Obtener número mayor que 4.

3 **De estos experimentos, indica qué sucesos son seguros e imposibles.**

EXPERIMENTO	SUCESO SEGURO	SUCESO IMPOSIBLE
De una baraja española de 40 cartas, sacar picas		
En una bolsa con 2 bolas rojas y 3 verdes, obtener una bola azul		
En una caja con fichas numeradas del 1 al 4, obtener una ficha con un número menor que 5		
Al lanzar un dado al aire, salir un número mayor que 6		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, obtener 0		
Al tirar dos dados al aire y sumar la puntuación de sus caras, salir 3		
Al tirar dos dados al aire y multiplicar la puntuación de sus caras, obtener 40		

DETERMINAR LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE DOS SUCESOS

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

OPERACIÓN CON SUCESOS

- Una **operación entre sucesos** nos permite obtener otro suceso del mismo espacio muestral. Las dos operaciones de sucesos más importantes son la unión y la intersección.
- **Unión de sucesos:** la unión de dos sucesos *A* y *B* está formada por los elementos (sucesos elementales) del suceso *A* y del suceso *B*:

$$\boldsymbol{A \cup B = A} \textbf{ unión } \boldsymbol{B}$$

- **Intersección de sucesos:** la intersección de dos sucesos *A* y *B* está formada por los elementos (sucesos elementales) comunes de los sucesos *A* y *B*:

$$\boldsymbol{A \cap B = A} \textbf{ intersección } \boldsymbol{B}$$

- Si dos **sucesos** no tienen ningún suceso elemental en común, se dice que son **incompatibles**:

$$\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$$

- Si dos **sucesos** tienen algún suceso elemental en común, se dice que son **compatibles**:

$$\boldsymbol{A \cap B \neq \emptyset}$$

- Dado un suceso *A*, el **suceso contrario o complementario**, $\boldsymbol{\overline{A}}$, está formado por los sucesos elementales del espacio muestral que no están en *A*.

EJEMPLO

En el experimento consistente en lanzar un dado, consideramos los sucesos:

A = Obtener número menor que 4 = {1, 2, 3}

B = Obtener número impar = {1, 3, 5}

- Escribimos el suceso unión, formado por todos los sucesos elementales de *A* y *B*:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

- Escribimos el suceso intersección, formado por todos los sucesos elementales comunes de *A* y *B*:

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

- Escribimos el suceso contrario de *A*, formado por todos los sucesos elementales del espacio muestral del experimento que no están en *A*:

$$\overline{A} = \{4, 5, 6\}$$

De la misma manera, el suceso contrario de *B* será:

$$\overline{B} = \{2, 4, 6\}$$

Vemos que la unión de un suceso y su contrario es siempre el espacio muestral.

1 **Considera el experimento de lanzar un dado con ocho caras numeradas del 1 al 8 y los sucesos $\boldsymbol{A}$ = Salir puntuación par y $\boldsymbol{B}$ = Salir puntuación impar. Escribe el espacio muestral y obtén los siguientes sucesos.**

Espacio muestral: $E =$

a) $A \cup B =$

b) $A \cap B =$

c) $\overline{A} =$

d) $\overline{B} =$

e) $\overline{A} \cap B =$

f) $\overline{A} \cup B =$

ADAPTACIÓN CURRICULAR

DETERMINAR LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE DOS SUCESOS

2 **De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta y se consideran los siguientes sucesos.**

***A* = Salir oros** ***B* = Salir un rey** ***C* = Salir un as** ***D* = No salir oros**

Señala si los sucesos son compatibles, incompatibles o contrarios.

SUCESO	COMPATIBILIDAD		CONTRARIOS
	COMPATIBLES	INCOMPATIBLES	
A y *B*			
A y *C*			
A y *D*			
B y *C*			

4 **De una baraja española de 40 cartas hemos separado los ases y los reyes. Con este grupo de cartas realizamos el experimento de sacar dos cartas.**

a) Escribe el espacio muestral.

b) Indica un suceso imposible de este experimento.

c) ¿Cómo son los sucesos de sacar oros y sacar rey?

d) ¿Qué sucesos componen la unión de los sucesos de sacar oros y sacar rey?

e) ¿Qué sucesos elementales forman el suceso de sacar dos reyes?

f) ¿Y el suceso de sacar oros?

3 **En una caja hay ocho bolas, numeradas del 1 al 8. Escribe un suceso compatible, otro incompatible y otro contrario de estos sucesos.**

SUCESO	COMPATIBLE	INCOMPATIBLE	CONTRARIO
A = Sacar un número menor que 4			
B = Sacar un número impar			
C = Sacar múltiplo de 2			
D = Sacar múltiplo de 7			

OBTENER LA FRECUENCIA ABSOLUTA Y RELATIVA DE UN SUCESO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

FRECUENCIAS ABSOLUTAS Y RELATIVAS

- **Frecuencia absoluta (f_i)** de un suceso es el número de veces que ocurre dicho suceso cuando se repite un experimento aleatorio *n* veces.
- **Frecuencia relativa (h_i)** de un suceso es el cociente de su frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento: $h_i = \frac{f_i}{N}$.

EJEMPLO

Roberto ha lanzado un dado 50 veces, obteniendo los resultados de la tabla.

CARA	1	2	3	4	5	6	Suma
f_i	7	6	14	9	10	4	**50**
h_i	0,14	0,12	0,28	0,18	0,20	0,08	**1**

El número de veces que aparece cada cara es su frecuencia absoluta (f_i).

La frecuencia relativa la obtenemos dividiendo la frecuencia absoluta entre el número de veces que se repite el experimento.

1 **En un bombo hay diez bolas numeradas del 0 al 9. Se repite 100 veces el experimento de extraer una bola y reemplazarla a continuación. Los resultados obtenidos se expresan en la tabla.**

BOLA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma
f_i	7	13	11	12	8	10	12	6	10	11	**100**
h_i											

a) Completa la tabla calculando las frecuencias relativas.

b) Considera los sucesos y calcula.

A = múltiplo de 3, B = número impar y C = divisor de 6

- Frecuencia relativa de A, B y C:

$A = \{3, 6, 9\}$ $\quad h_A = h_3 + h_6 + h_9 =$

$B =$

$C =$

- Frecuencia relativa de $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ y $A \cap C$:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $\quad h_A = h_1 + h_3 + h_5 + h_6 + h_7 + h_9 =$

$A \cap B =$

$A \cup C =$

$A \cap C =$

CALCULAR LA PROBABILIDAD DE UN SUCESO

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

La **probabilidad de un suceso** es el número hacia el cual se aproxima la frecuencia relativa de ese suceso conforme aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio.

EJEMPLO

Se lanza un dado de cuatro caras y se anotan las veces que aparece el número 1.

LANZAMIENTOS	20	40	60	80	100
f_i	7	11	15	18	27
h_i	0,35	0,275	**0,25**	0,225	0,27

Al obtener la tabla de frecuencias relativas correspondiente a este experimento, se observa que el número hacia el cual se aproxima la frecuencia del suceso de aparecer el número 1 es 0,25.

Por tanto, la probabilidad de obtener número 1 al lanzar un dado de cuatro caras es $P = 0{,}25$.

1 **Tira una moneda 25 veces y completa la tabla.**

	RECUENTO	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
CARA			
CRUZ			

¿Son las frecuencias relativas números próximos a 0,5? ¿Qué consecuencias obtienes de tus resultados?

REGLA DE LAPLACE

Cuando todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de un suceso *A* es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles.

Esta expresión es la regla de Laplace: $\boldsymbol{P(A)} = \dfrac{\textbf{Casos favorables}}{\textbf{Casos posibles}}$

EJEMPLO

Se lanza un dado de seis caras al aire. El espacio muestral es: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calcula las siguientes probabilidades.

SUCESO	CASOS FAVORABLES	CASOS POSIBLES	$P = \dfrac{\text{CASOS FAVORABLES}}{\text{CASOS POSIBLES}}$
Salir número par	$\{2, 4, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$P = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
Salir número menor que 5	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$P = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$
Salir número par o menor que 5	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$P = \dfrac{5}{6}$
Salir número par y 4	$\{4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$P = \dfrac{1}{6}$

2 **Se hacen quinielas con un dado que tiene tres caras con el 1, dos caras con la X y la otra cara con el 2. Si se lanza una vez el dado, calcula aplicando la regla de Laplace.**

a) El espacio muestral: $E =$ ……

b) La probabilidad de obtener 1.

c) La probabilidad de obtener X.

d) La probabilidad de obtener 2.

3 **Una urna contiene: 1 roja, 1 azul, 1 verde y 1 blanca. Si se sacan dos bolas a la vez, calcula.**

a) El espacio muestral: $E =$ ……

b) La probabilidad de que una bola sea blanca y la otra roja.

c) La probabilidad de que las dos bolas sean rojas.

d) La probabilidad de que ninguna de las dos bolas sea blanca.

4 **Se saca una carta de una baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que salga:**

a) Un rey.

b) Oros.

c) Un 4 o un 6.

d) El rey de oros.

e) Una carta que no sea de copas.

f) Una figura de bastos.

g) Una carta que no sea figura.

h) Una carta menor que 5.

5 **En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han tomado carne 16 hombres y 20 mujeres, y el resto ha tomado pescado. Fijándote en la tabla, y completando los datos que faltan, si elegimos una persona al azar, calcula:**

	CARNE	**PESCADO**	Suma
HOMBRES	16		**28**
MUJERES	20		**32**
Suma	**36**		

a) ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tomado pescado?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado?

6 **Se lanzan dos dados y se suman los puntos obtenidos. Obtén:**

a) El espacio muestral: $E =$ ……

b) La probabilidad de que la suma sea 3.

c) La probabilidad de que la suma sea 7.

d) La probabilidad de que la suma sea superior a 10.

e) La probabilidad de que la suma sea 4 o 5.

OBJETIVO 7

APLICAR LAS PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

- **La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1.**
  Por ejemplo: en el lanzamiento de un dado, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
  $$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$
  $$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$
- La probabilidad de un suceso es un **número comprendido entre 0 y 1**.
- **La probabilidad del suceso seguro es 1 y la probabilidad del suceso imposible es 0.**
- Siendo A y B dos sucesos del espacio muestral E:
  – Si son incompatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.
  Por ejemplo, al lanzar un dado, dados los sucesos incompatibles A = Salir cara número primo y B = Salir cara múltiplo de 4, la probabilidad de que ocurra uno de los dos es:
  $$A = \{1, 3, 5\} \text{ y } B = \{4\} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$
  – Si son compatibles: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.
  Por ejemplo, si al lanzar un dado tenemos los sucesos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{3, 6\}$, la probabilidad de que ocurra su unión es: $P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.
- La **probabilidad del suceso contrario** de A, $\overline{A}$, es: $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$.
  Por ejemplo, si al lanzar un dado consideramos $A = \{3, 6\}$, entonces $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$.
  $$P(A) = \frac{2}{6} \qquad P(\overline{A}) = \frac{4}{6}$$
  Se comprueba que: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \rightarrow \frac{4}{6} = 1 - \frac{2}{6}$

1 **De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta al azar. Calcula estas probabilidades.**

SUCESO	PROBABILIDAD	SUCESO	PROBABILIDAD
A = Sacar espadas	$P(A) =$	D = Sacar espadas o sota	$P(D) =$
B = Sacar sota	$P(B) =$	E = No sacar espadas	$P(E) =$
C = Sacar espadas y sota	$P(C) =$	F = No sacar sota	$P(F) =$

2 **Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. Se considera el experimento de sacar una bola al azar. Calcula estas probabilidades.**

SUCESO	PROBABILIDAD	SUCESO	PROBABILIDAD
A = Salir bola blanca	$P(A) =$	D = Salir bola que no sea roja	$P(D) =$
B = Salir bola roja	$P(B) =$	E = Salir bola verde	$P(E) =$
C = Salir bola que no sea negra	$P(C) =$	F = Salir bola blanca o negra	$P(F) =$

3 **La probabilidad de un suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario?**

