

CINEMÁTICA VECTORIAL

1. Introducción.

El **movimiento** es uno de los fenómenos físicos más evidentes, al ser fácilmente observable. Su estudio nos permite entender la circulación de objetos con los que, seguro, estás familiarizado, como trenes coches y aviones, pero también nos sirve de base para el estudio de satélites, planetas, estrellas y otros muchos.

La rama de la Física que se encarga del estudio de este fenómeno es la **cinemática**. Esta estudia las leyes del movimiento sin tener en cuenta las causas que lo han producido.

Cuando viajamos en un tren con un compañero de viaje en el asiento de al lado, no tenemos dudas en afirmar que éste permanece quieto. A la vez, podemos afirmar que la azafata que pasa a repartir comida se encuentra en movimiento. Desde nuestro punto de vista o **sistema de referencia** la azafata se mueve, nuestro compañero y nosotros mismos estamos en reposo.

Imaginemos por un momento que un observador externo, situado fuera del tren, viera pasar al mismo y lo siguiera por unos segundos con la mirada. Para él, todos los elementos del tren estarían en movimiento: El tren, nuestro compañero, la azafata y nosotros mismos.

Para poder decir que un cuerpo se mueve, hemos de tomar un **sistema de referencia** y observar la posición del cuerpo respecto de él.

En el universo todo está en continuo movimiento. Desde los electrones de los átomos, a las moléculas, hasta los planetas , estrella o galaxias.

Teniendo en cuenta que **el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio** recibe el nombre de **posición**, podemos hacerlo si lo definimos del siguiente modo:

Movimiento es el cambio en la posición de un móvil con el tiempo con respecto a un sistema de referencia. Si el sistema de referencia está en reposo, el movimiento se considera absoluto y si está en movimiento lo consideramos relativo.

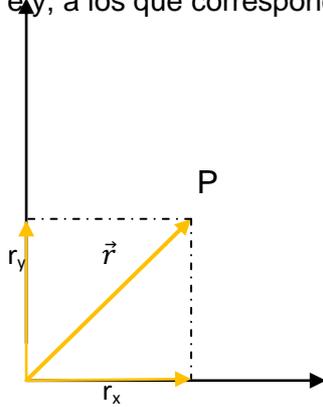
Conviene resaltar que **en el Universo todos los movimientos son relativos**, ya que no existen puntos fijos o inmóviles. Cuando vamos en un coche en marcha, sentados en nuestro asiento, no nos movemos con respecto al coche, sin embargo sí lo hacemos con respecto a una casa. Del mismo modo, aún estando en reposo sobre la Tierra, nos movemos con respecto al Sol, el cual, a su vez, también está dotado de movimiento.

Existen muchas clases de **sistemas de referencia**, no obstante, el que usaremos en el presente curso será el ortogonal tridimensional, esto es los tres ejes coordenados. El punto de referencia que utilizaremos será el origen O de los tres ejes cartesianos. El sistema de referencia (punto O, ejes coordenados, criterio de signos) es elegido por el observador, la persona que estudia el movimiento. Una vez elegido, debe mantenerse. No puede cambiarse durante la resolución del problema.

Punto material: En nuestro estudio del movimiento consideraremos que **el objeto móvil es una partícula**, un punto material que representa al objeto (bola, coche, avión, electrón...) y que concentra toda su masa. . El móvil no tiene que ser necesariamente pequeño para ser considerado como partícula. Así un avión no se comporta como una partícula para su piloto pero sí para un observador situado en Tierra. La abstracción de considerar a un móvil como una partícula, prescindiendo del movimiento de todos sus puntos, simplifica notablemente el conocimiento acerca del movimiento del cuerpo real

2. Posición. Trayectoria. Ecuación de movimiento.

La posición de una partícula en un punto P en cualquier instante vendrá determinada por el denominado **vector de posición** \vec{r} que es aquel cuyo origen se halla siempre en el origen de coordenadas y cuyo extremo coincide en cada instante con la posición del punto móvil. Este vector de posición va desde el origen del sistema de referencia, O, hasta el punto en que está el móvil. En este curso estudiaremos movimientos en dos dimensiones. Nuestro sistema de referencia está formado por los ejes coordenados x e y, a los que corresponden los vectores unitarios.



La posición del móvil en el punto P , está descrita por su vector de posición:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}$$

Posición inicial: \vec{r}_0 posición en el instante en que empezamos a contar el movimiento. Normalmente consideraremos $t_0 = 0$ s, pero puede ser cualquier otro valor de tiempo.

Para hallar la distancia que existe en cualquier instante entre la partícula y el punto de referencia debemos hallar el módulo del vector de posición:

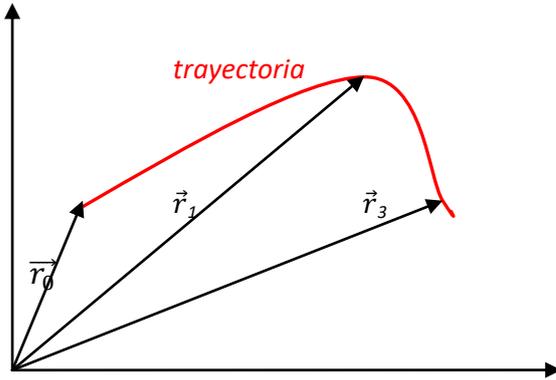
$$|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Nota: En el espacio (3 dimensiones), existiría una componente más, todas las magnitudes vectoriales tendrían tres componentes).

En el Sistema Internacional de unidades (S.I.), las coordenadas del vector de posición están dadas en metros (m).

Trayectoria: Es la línea continua descrita por el móvil en su recorrido.

La estela que deja un avión a reacción en el aire o un barco en el agua, permiten visualizar esta trayectoria.



Según la forma de la trayectoria, tendremos movimientos:

Rectilíneos: la trayectoria es una recta, por ejemplo un movimiento de caída libre.

Curvilíneos: la trayectoria es una curva, por ejemplo el movimiento de un proyectil, de la tierra alrededor del sol..etc. Uno de los movimientos curvilíneos más sencillos es el circular.

Ecuación de movimiento:

Al transcurrir el tiempo, el móvil va pasando por los distintos puntos de la trayectoria. A cada valor de tiempo, corresponde una posición. Es decir, la posición depende del tiempo.

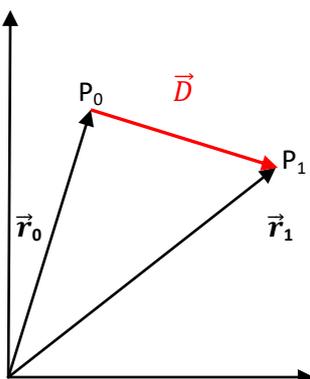
La ecuación matemática que nos da la posición del móvil en función del tiempo se le denomina ecuación del movimiento de la partícula. Cada movimiento tiene su propia ecuación de movimiento.

$$\vec{r} = r_x(t) \vec{i} + r_y(t) \vec{j}$$

3. Vector desplazamiento y espacio recorrido

Supongamos una partícula que inicialmente, en el instante $t_0 = 0$, se halla en la posición P_0 determinada por el vector de posición \vec{r}_0 y que transcurrido un tiempo t_1 la partícula se halla en la posición P_1 determinada por el vector de posición \vec{r}_1 . Es evidente que la partícula se ha desplazado. Se denomina vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ al vector que resulta de la diferencia de los vectores de posición en los instantes final e inicial.

$$\vec{D} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

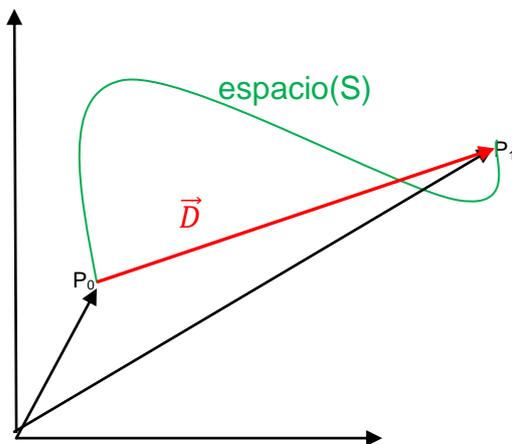


El vector desplazamiento une dos puntos de la trayectoria. Va desde la posición considerada inicial hasta la posición final. Se calcula como la diferencia entre las dos posiciones (siempre la final menos la inicial).

El vector desplazamiento entre dos posiciones siempre es el mismo independientemente de la trayectoria seguida.

Diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida:

Vemos que el módulo del vector desplazamiento $|\vec{D}|$ sólo nos indica la distancia en línea recta desde el punto inicial hasta el punto final. La distancia recorrida (s) se mide sobre la trayectoria, es una magnitud escalar que mide longitud de la trayectoria.



Los valores del módulo del vector desplazamiento y el espacio recorrido (s) **sólo coinciden** cuando la trayectoria es **rectilínea y no cambie de sentido** el movimiento. Así, si un cuerpo se desplaza sobre una recta desde un punto A a un punto B, en todo momento, el módulo del desplazamiento coincide con el espacio recorrido, pero, si se invierte el movimiento, aunque el espacio recorrido sigue aumentando el módulo del desplazamiento disminuye hasta el punto de que se puede anular en el punto A.

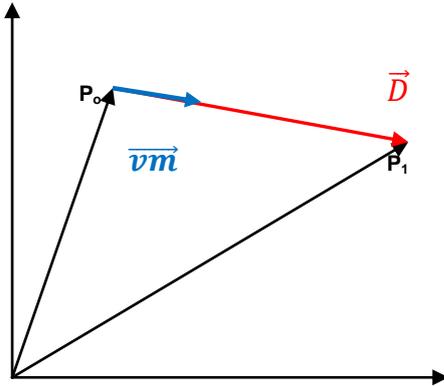
4. Vector velocidad. Velocidad media e instantánea.

Se define velocidad de una partícula como la variación del vector de posición \vec{r} con respecto al tiempo. Todo movimiento supone un cambio en la posición del móvil. Pero este cambio puede ser más rápido o más lento. La velocidad mide la rapidez de ese cambio. Es decir, **la velocidad mide cómo cambia la posición del móvil con el tiempo.**

Vector velocidad media

Sea una partícula una partícula que inicialmente, en el instante $t_0 = 0$, se halla en la posición P_0 determinada por el vector de posición \vec{r}_0 y que transcurrido un tiempo t_1 la partícula se y que transcurrido un tiempo t_1 la partícula se halla en la posición P_1 determinada por el vector de posición \vec{r}_1 . Se define vector velocidad media como el **cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo empleado en ello:**

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{D}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1}{t_1} - \frac{\vec{r}_0}{t_0}$$



El vector velocidad media \vec{v}_m tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento \vec{D} .

La velocidad media mide el cambio de posición en un intervalo de tiempo.

Unidades: En el S.I. $[v_m] = m/s = m \cdot s^{-1}$.

Del mismo modo que el vector desplazamiento, la velocidad media sólo tiene en cuenta los instantes inicial y final, independientemente de cómo haya sido el movimiento entre ambos instantes. Sólo nos da información sobre el promedio de velocidad en el intervalo. NO nos dice cómo se mueve en un instante concreto.

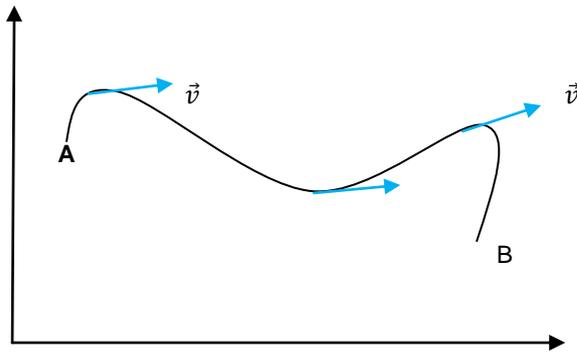
Velocidad instantánea: es aquella que posee una partícula en un instante determinado.

Hemos visto que la velocidad media no nos da información sobre cómo se mueve la partícula en un instante concreto. Pero si calculamos la velocidad media en un intervalo corto de tiempo, la información del movimiento resulta más precisa. Cuanto más corto sea el tiempo que dejemos pasar, más se aproximará la velocidad media a la velocidad que lleva el móvil en el instante que estamos estudiando (velocidad instantánea). Si los intervalos de tiempo Δt son lo suficientemente pequeños también lo serán los desplazamientos efectuados. Sólo de este modo podremos llegar a saber el valor de la velocidad en un instante determinado en cualquier punto de la trayectoria. Así se alcanza el concepto de velocidad instantánea y matemáticamente coincide con el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Esta operación matemática se denomina derivada (en este caso “derivada de la posición respecto al tiempo”).

Es decir, el **vector velocidad instantánea** es la derivada del vector de posición con respecto al tiempo. **Es un vector tangente a la trayectoria** en el punto considerado y su sentido es el del movimiento.



Recordemos que la velocidad es una magnitud vectorial. Su módulo se denomina rapidez. Se mide en m/s.

La velocidad instantánea es aquella que posee una partícula en un instante determinado y matemáticamente coincide con el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

5. Aceleración. Aceleración media. Aceleración instantánea.

Los movimientos más frecuentes no son los uniformes donde no cambia la velocidad, si aquellos en los que cambia la velocidad. Para medir los **cambios en la velocidad** necesitamos una nueva magnitud: **la aceleración**. Como la velocidad es un vector, la aceleración también lo será y debe dar cuenta de los cambios que se produzcan en la velocidad, tanto en su módulo como en su dirección.

Aceleración media \vec{a}_m : Mide el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2}{t_2} - \frac{\vec{v}_1}{t_1}$$

Unidades: En el S.I. $m/s^2 = m \cdot s^{-2}$.

Al igual que en el caso de la velocidad, la aceleración media sólo tiene en cuenta los instantes inicial y final, independientemente de cómo haya sido el movimiento entre ambos instantes. Por eso definimos la aceleración instantánea.

Aceleración instantánea \vec{a} : Indica cómo cambia la velocidad del móvil en un instante determinado. Al igual que en el caso de la velocidad instantánea, se calcula mediante un límite:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Es la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad. Se mide en las mismas unidades que la aceleración media

Importante: Es preciso tener muy claro que la aceleración NO nos dice cómo se mueve la partícula ni hacia dónde se mueve. Eso es la velocidad. La aceleración nos informa de si la velocidad cambia, de qué modo y hacia dónde está cambiando

7. Componentes de la aceleración: aceleraciones tangencial (a_t) y normal (a_n).

Así como las direcciones del vector desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea son fáciles de visualizar, no ocurre lo mismo con el vector aceleración.

Cuando en un movimiento cambia la velocidad, puede ser que cambie su rapidez, su dirección, o ambas cosas. Podemos estudiar estos cambios por separado,

escomponiendo la aceleración como la suma de dos componentes distintas de las cartesianas, denominadas componentes intrínsecas.

Aceleración tangencial (a_t) : Una de las causas de que se origine un movimiento acelerado es que **varíe el módulo de la velocidad** , sin que lo hagan ni su dirección ni su sentido. La magnitud que mide como cambia el módulo de la velocidad , se llama aceleración tangencial:

- Es tangente a la trayectoria
- Su sentido: es el del movimiento si hay aumento en el valor del módulo de la velocidad y contraria al movimiento si disminuye el módulo de la velocidad

Aceleración normal o centrípeta (a_n): nos va a medir como **cambia la dirección de la velocidad**.

- Lleva dirección perpendicular (=normal) a la trayectoria
- Su sentido es hacia dentro de la curva.

La suma de ambas componentes es, lógicamente, el vector aceleración:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

En muchos casos en este curso cuando hablamos de aceleración nos estamos refiriendo únicamente a la aceleración tangencial.

Vemos en la imagen un ejemplo de movimiento curvilíneo donde el módulo de la velocidad va aumentando con el tiempo:

