Divulgaciones Matemáticas Vol. 10 No. 2(2002), pp. 149–159

Cálculo del número π mediante funciones trigonométricas

Calculation of π by mean of trigonometric functions

Diómedes Bárcenas (barcenas@ciens.ula.ve)
Olga Porras (porras@ciens.ula.ve)
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes
Mérida 5101, Venezuela

Resumen

Mediante el uso de las funciones trigonométricas seno y tangente se da una demostración elemental de la existencia del número π, así como un cálculo aproximado del mismo.
Palabras y frases clave: número π, funciones trigonométricas, seno, tangente.

Abstract

By mean of the trigonometric functions sinus and tangent an elementary proof of the existence of number π is given, as well as an approximate evaluation of it.
Key words and phrases: number π, trigonometric functions, sinus, tangent.

1 Introducción

En la Escuela Primaria se nos enseñó que la longitud de la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia y $\pi = 3{,}1416$. Se nos enseñó también que el área de un círculo es igual a πr^2, donde r es el radio y $\pi = 3{,}1416$.

Armados con esta información procedíamos al cálculo de áreas de círculos y longitudes de circunferencias y los pocos afortunados -si había algún afortunado en aquel auditorio infantil - capaces de memorizar las fórmulas de área y

Recibido 2001/11/29. Aceptado 2002/11/08.
MSC (2000): Primary 97-01; Secondary 33B10.

longitud, podían eventualmente calcular el área de un círculo o la longitud de su circunferencia una vez conocido el radio sin que nadie - ¿o quizás alguien? - se preocupara por el origen y la presencia de ese numerito mágico: $\pi = 3{,}1416$.

Más tarde, en la Escuela Secundaria, estudiamos en mayor profundidad los temas de área y longitud. Allí aprendimos que el perímetro o longitud de un polígono es igual a la suma de las longitudes de sus lados y que el área de un polígono es igual al semiproducto del perímetro por la apotema; preocupándonos poco, más bien nada, por el significado de estas fórmulas matemáticas.

En esta etapa de nuestra formación dimos un salto cualitativamente grande en el estudio del número π al aprender que este número fue profundamente estudiado por Arquímedes mientras investigaba precisamente las nociones de área y longitud.

Arquímedes, el más famoso de los matemáticos de la antigüedad, conocía las fórmulas de área y longitud para el caso de polígonos y se propuso conocer fórmulas análogas para el caso de círculos y circunferencias; en la búsqueda de su objetivo, Arquímedes se representó la circunferencia como sucesiones de polígonos regulares inscritos y circunscritos en dicha circunferencia.

Para calcular el área de un círculo, Arquímedes construyó polígonos regulares inscritos y circunscritos en la circunferencia del círculo y observó que a medida que duplicaba el número de lados de los polígonos, aumentaba el área de los polígonos inscritos, mientras disminuía el área de los polígonos circunscritos.

Mediante este procedimiento observó también que a medida que aumentaba el número de lados, las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos se acercaban a un mismo valor. Este valor común lo definió como área del círculo la cual es igual a πr^2. Utilizando polígonos regulares de 96 lados, Arquímedes logró la siguiente estimación de π:

$$3{,}1416 < \pi < 3{,}1442;$$

la cual no es la primera aproximación de π ya que en La Biblia se estima π con un valor de 3 y, de acuerdo con M.Kline [4] y Courant Robbins ([2]), los egipcios usaron una aproximación de π igual a 3.16.

Tampoco terminaron con Arquímedes los cálculos aproximados del número π; pues según [1], el matemático chino Zu Chong Zhi (420-500 D.C.) calculó π con una aproximación de siete cifras al hacer la estimación

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

En el siglo XVI Francisco de Vieta logró un gran avance al expresar π mediante la fórmula

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdots ,$$

lo cual permitió para la época un cálculo de π con una aproximación de 10 dígitos; mientras que en 1609, el matemático alemán Ludolf van Ceulen calculó π con una aproximación de 35 cifras; por tal razón, según [3], los alemanes llaman a π número ludolfiano.

El advenimiento en el siglo XVII del cálculo diferencial permitió nuevos progresos en el cálculo de π y además de la fórmula de Vieta aparecieron otras expresiones de π como series y productos, entre los que se cuentan:

El producto de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot x \cdots ,$$

la serie de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots$$

y la fórmula de Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .$$

Mientras todas estas fórmulas utilizan matemática sofisticada, en este artículo proponemos una fórmula para el cálculo aproximado de π que a nuestro juicio se puede enseñar en la Escuela Secundaria, ya que sólo usamos las funciones trigonométricas con el entendido de que las fórmulas aquí propuestas no superan la eficiencia de los demás, pues el expresar π mediante series y productos infinitos ha permitido, con el invento de ordenadores cada vez más potentes, el cálculo de π hasta con una aproximación de más de seis mil cuatrocientos millones de dígitos, un hecho lejos de los objetivos de estas notas.

Aquí tan sólo proponemos una manera, a nuestro juicio, sencilla de aproximarnos al número π, una aproximación que aunque lenta, puede resultar bastante útil toda vez que según el astrónomo Newcomb (citado en [3]), una aproximación de π con 10 decimales permite calcular el radio de la tierra con aproximación de una pulgada.

Comenzamos por hacer la observación de que en lugar de partir del cálculo del área de un círculo mediante funciones poligonales, calcularemos la longitud de una circunferencia mediante tales aproximaciones.

En nuestra exposición haremos de los siguientes hechos:

Teorema 1. *La longitud ℓ de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r se puede representar mediante la fórmula*

$$\ell = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) r.$$

En consecuencia, el perímetro P del polígono regular de n lados inscritos en una circunferencia de radio r es igual a $2n\,\mathrm{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) r$.

Teorema 2. *Si ℓ_n denota el lado del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia, entonces*

$$\ell_{2n} = \frac{1}{2}\,\ell_n \sec\left(\frac{90^\circ}{n}\right).$$

En consecuencia, el perímetro del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia, es menor que el perímetro del polígono regular de $2n$ lados inscrito en la misma circunferencia.

Teorema 3. *Si L y ℓ denotan respectivamente el lado del polígono regular de n lados circunscrito e inscrito en una circunferencia, entonces*

$$L = \ell \sec\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = 2R\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

Respecto al lado L del polígono regular de n lados circunscrito en una circunferencia de radio r tenemos lo siguiente:

Teorema 4. *El perímetro del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia es menor que el perímetro del polígono regular del mismo número de lados circunscrito en la misma circunferencia.*

Teorema 5. *El perímetro del polígono regular de $2n$ lados inscrito en una circunferencia es mayor que el perímetro del polígono de n lados inscrito en la misma circunferencia.*

Teorema 6. *En una circunferencia el perímetro del polígono regular de $2n$ lados circunscrito en una circunferencia es menor que el perímetro del polígono regular de n lados circunscrito en la misma circunferencia.*

2 Cálculo aproximado de π

Es un hecho bien establecido que si P_n y $P_{n'}$ denotan los respectivos perímetros de los polígonos inscritos en circunferencias de diámetros d y d', entonces

$$\frac{P_n}{d} = \frac{P_{n'}}{d'} = \text{constante.}$$

En particular, al definir la **longitud** de una circunferencia como límite cuando n tiende a infinito de la longitud de los polígonos regulares de n lados inscritos en la circunferencia, si denotamos por C esta longitud entonces $\frac{c}{d}$ =constante, donde d es el diámetro de la circunferencia. Esta constante es la que se conoce como el **número** π objeto de este trabajo; y dado que $p_n < C < P_n$, donde P_n denota el perímetro del polígono regular de n lados circunscrito en la circunferencia y p_n el perímetro del polígono regular de n lados inscrito en la misma circunferencia tenemos que

$$p_n < 2\pi r < P_n;$$

puesto que

$$n \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right),$$

lo cual permite las siguientes aproximaciones de π:

Para $n = 3$,

$$2{,}598 < \pi < 5{,}196;$$

Para $n = 4$,

$$2{,}828 < \pi < 4;$$

Para $n = 5$,

$$2{,}938 < \pi < 3{,}632;$$

Para $n = 6$,

$$3 < \pi < 3{,}464;$$

Para $n = 10$,

$$3{,}09 < \pi < 3{,}249;$$

Para $n = 20$,

$$3{,}128 < \pi < 3{,}167;$$

Para $n = 60$,

$$3{,}14 < \pi < 3{,}144;$$

Para $n = 90$,

$$3{,}14 < \pi < 3{,}142;$$

Para $n = 360$,

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416;$$

Para $n = 720$,
$$3{,}14158 < \pi < 3{,}14161;$$
Para $n = 1800$,
$$3{,}141591 < \pi < 3{,}141958;$$
Para $n = 3600$,
$$3{,}1415922 < \pi < 3{,}1415934;$$
Para $n = 9000$,
$$3{,}14159259 < \pi < 3{,}141592781;$$
Para $n = 18000$,
$$3{,}141592638 < \pi < 3{,}141592685;$$
y para $n = 72000$,
$$3{,}141592653 < \pi < 3{,}141592656.$$

3 Existencia de π

Definición
$$\pi = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).$$
Como toda sucesión monótona y acotada es convergente, la existencia del límite es consecuencia de la segunda afirmación del Teorema 2. Esto garantiza que π está bien definido.

Teorema 7. $\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\dfrac{180°}{n}\right) = \pi.$

Demostración.
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{180°}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right).\sec\left(\frac{180°}{n}\right)\\ &= \pi\lim_{n\to\infty}\sec\left(\frac{180°}{n}\right) = \pi\end{aligned}$$

lo cual muestra la validez de la fórmula y ésto a su vez muestra la existencia de π. □

Con el objetivo de comparar el grado de dificultad de nuestra fórmula con las existentes en la bibliografía, ofrecemos una demostración de la serie de Leibnitz la cual, dicho sea de paso, demuestra el valor del límite de la serie presuponiendo la existencia de π [2].

Sabemos que
$$\arctan\alpha = \int_0^\alpha \frac{dx}{1+x^2};$$

por lo tanto,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2};$$

utilizando la fórmula para la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica de razón r tenemos que

$$\frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1};$$

lo cual se puede expresar mediante la fórmula

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + \frac{r^n}{1-r};$$

y al sustituir r por $-x^2$ obtenemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx - \int_0^1 x^6 dx + \cdots \\
&+ \int_0^1 (-1)^{n-1} x^{2n-2} dx + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \\
&= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx;
\end{aligned}$$

como

$$\left| \frac{x^{2n}}{1+x^2} \right| \leq x^{2n},$$

se tiene

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \right| \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

y por lo tanto la validez de la fórmula de Leibnitz.

4 Apéndice

En esta sección demostramos todos los teoremas mencionados en la introducción; omitimos la demostración del Teorema 1 por ser demasiado conocida y más evidente que las restantes.

Demostración del Teorema 2. *Considere la figura 1.*

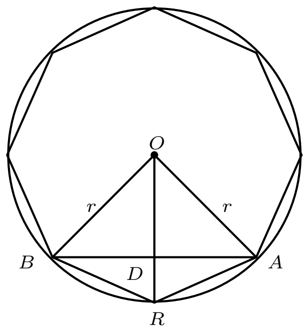

Figura 1

$$\begin{aligned} DR &= r - r\cos\frac{180^\circ}{n} = \\ &= r\left(1-\cos\frac{180^\circ}{n}\right) = 2r\,\mathrm{sen}^2\,\frac{180^\circ}{2n}. \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$AR = \sqrt{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{180^\circ}{n} + 4r^2\,\mathrm{sen}^4\,\frac{180^\circ}{2n}};$$

por lo tanto, si denotamos por ℓ_n la longitud del lado del polígono de n lados, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\ell_{2n}}{\ell_n} &= \sqrt{\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{180^\circ}{n} + 4r^2 \operatorname{sen}^4 \dfrac{180^\circ}{2n}}{4r^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{180^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{sen}^4 \dfrac{180^\circ}{2n}}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{180^\circ}{n}}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{sen}^4 \dfrac{90^\circ}{n}}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{180^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{90^\circ}{n} \operatorname{sen}^2 \dfrac{90^\circ}{n}}{\left(2 \operatorname{sen} \dfrac{90^\circ}{n} \cos \dfrac{90^\circ}{n}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\operatorname{sen}^2 \dfrac{90^\circ}{n}}{4 \cos^2 \dfrac{90^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tan^2 \frac{90^\circ}{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\tan^2 \frac{90^\circ}{n} + 1} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{90^\circ}{n}} = \frac{1}{2} \sec \frac{90^\circ}{n}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Demostración del Teorema 3. *Considere la figura 2.*

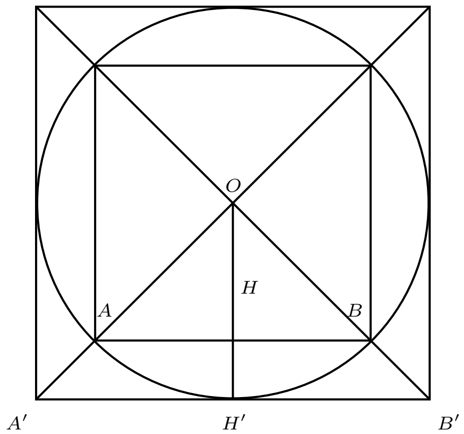

Figura 2

Observe que el ángulo $OH'A'$ es recto porque $\overline{OH'}$ es radio de la circunferencia y H' es el punto de tangencia de $\overline{A'B'}$. Luego $\overline{OH'}$ es bisectriz porque el triángulo $OA'B'$ es isósceles con $OA' = OB'$; luego, como OAB también es un triángulo isósceles se tiene que AHO es un ángulo recto y en consecuencia los triángulos AOH y $A'OH'$ son semejantes. De la semejanza de estos triángulos, si denotamos por R el radio de la circunferencia, deducimos que

$$\begin{aligned}
\frac{R}{R\sec\left(\frac{180°}{n}\right)} &= \frac{\frac{1}{2}\ell}{\frac{1}{2}L} \\
&\Rightarrow \quad L = \ell\sec\left(\frac{180°}{n}\right) = \\
&= \quad 2R\,\mathrm{sen}\,\frac{180°}{n}\sec\left(\frac{180°}{n}\right) = 2R\tan\left(\frac{180°}{n}\right).
\end{aligned}$$

□

Demostración del Teorema 4. *El lado L_n del polígono regular circunscrito en una circunferencia satisface la relación*

$$L_n = \ell_n \sec\left(\frac{180°}{n}\right).$$

Como $\sec\left(\frac{180°}{n}\right) > 1$ *se tiene que* $L_n > \ell_n$ *y por lo tanto*

$$nL_n > n\ell_n$$

Esto termina la demostración. □

Demostración del Teorema 5. *Es una aplicación de la desigualdad triangular.*

Una demostración para quienes prefieran el camino trigonométrico es la siguiente:

Si ℓ es la longitud del lado del polígono regular inscrito en la circunferencia, entonces, por el teorema 2,

$$\ell_{2n} = \frac{1}{2}\ell_n \sec\left(\frac{90°}{n}\right)$$

y por lo tanto

$$P_{2n} = 2n\ell_{2n} = n\ell_n \sec\left(\frac{90°}{n}\right) > n\ell_n = P_n.$$

□

Demostración del Teorema 6. *Sean P_n y P_{2n} los respectivos perímetros de los polígonos circunscritos de n y $2n$ lados y L_n el lado del polígono circunscrito de lado n. Entonces*

$$\begin{aligned} P_n &= nL_n = 2nR\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = 2nR\tan\left(\frac{90^\circ}{n}+\frac{90^\circ}{n}\right) \\ &= 2nR\frac{2\tan\left(\frac{90^\circ}{n}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{90^\circ}{n}\right)} > 4R\tan\left(\frac{90^\circ}{n}\right) \\ &= 4nR\tan\left(\frac{180^\circ}{2n}\right) = P_{2n}. \end{aligned}$$

□

Reconocimiento

La idea de escribir este artículo surgió durante la preparación del libro de Trigonometría para la V Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática.

Referencias

[1] Chern, S. S. *O*n the 2002 Congress, Notices of AMS, 48, 8, 2001.

[2] Courant, R., Robbins, H. *?*'Qué es la matemática?, Aguilar, Madrid, 1958.

[3] Kasner, E., Newman, J. *M*atemáticas e Imaginación, I, Biblioteca Científica Salvat, Barcelona, 1987.

[4] M.Kline, *M*athematics for Liberal Arts, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

[5] *E*l Universo de los números, Mundo Científico, edición especial, 2000.