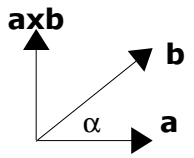
## ALGEBRA Y CÁLCULO VECTORIAL

- Hay dos maneras de multiplicar dos vectores.

  Una de ellas ya la hemos estudiado: el producto escalar.
  Ahora conoceremos la otra, el producto vectorial.

El producto vectorial de **a** x **b** es otro **vector** cuyas características son:

**Módulo** – a. b sen $\alpha$, siendo a el ángulo que forman **a** y **b**.
**Dirección** – perpendicular al plano que forman ambos.
**Sentido** – dado por la regla del sacacorchos (o de la mano derecha).
**Punto de aplicación** – cualquiera, es un vector libre.



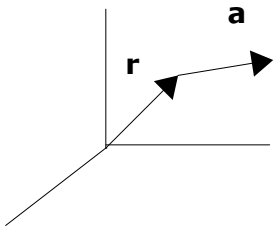

Si los vectores están expresados en componentes rectangulares x, y, z;

**a**= $a_x$ **i** + $a_y$ **j** + $a_z$ **k** ; **b**= $b_x$ **i** + $b_y$ **j** + $b_z$ **k** ; **a** x **b** es igual al desarrollo del determinante 3x3

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k}$$

El producto vectorial y las consecuencias que se derivan de su definición tienen numerosas aplicaciones en física como son la representación vectorial de superficies (que veremos más adelante) y el momento de un vector con respecto a un punto.

Se define momento de un vector **a** aplicado en P, con respecto a un punto O, como el producto vectorial de **r** x **a**.

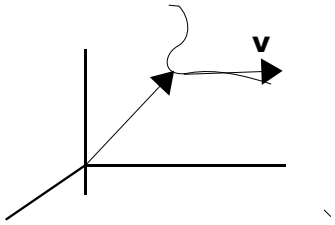



En primer tema que se estudiará este curso es **GRAVITACIÓN**. Para ello, aparte necesitaremos algunos de los conocimientos previos y familiarizarse con una magnitud física nueva llamada **momento angular**.

Hemos aprendido el curso pasado que el **momento lineal** nos informa del estado de movimiento de un cuerpo en traslación, sin embargo esta magnitud presenta un problema a la hora de tratar la traslación en movimientos curvilíneos, pues aunque su módulo pudiera no variar, su dirección nunca permanece constante.

Dado que la forma de proceder en física es explicar los fenómenos en función de la constancia de ciertas magnitudes, debemos por tanto, encontrar una magnitud que permanezca constante en el movimiento planetario. Dicha magnitud, vectorial, es el ***momento angular***, ***momento cinético*** **o** ***momento de la cantidad de movimiento***.

## MOMENTO ANGULAR




Si un cuerpo de masa m se mueve con una velocidad tiene una posición **r** con respecto al origen de coordenadas, podemos definir el momento angular **L** como el *producto vectorial* L= **r** x **p** = **r** x m **v**

El momento angular tiene:

a) dirección perpendicular al plano formado por los vectores **r** y **p**.
b) sentido dado por la regla del sacacorchos o de la mano derecha.
c) modulo dado por la expresión m v r sen $\alpha$

### TAREAS

**1.-** Deduce la expresión del momento angular para un movimiento circular.
**2.-** Deduce la expresión del momento angular para un movimiento curvilíneo.

## PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Derivemos **L** con respecto al tiempo $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$, recordando la definición de velocidad y que d**p**/dt = **F**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

a) El momento angular de un cuerpo **varía** cuando sobre él actúa el momento de una fuerza.

b) El momento angular será **constante** (se conserva) cuando d**L**/dt = 0, es decir cuando

**r** x **F** = **M** = 0

Este producto vectorial es cero cuando:

- No actúa ninguna fuerza sobre el cuerpo, en este caso el cuerpo se movería con MRU
- **r** y **F** tienen la misma dirección, este es el caso de las llamadas fuerzas centrales, como veremos es el caso de la fuerza gravitatoria.

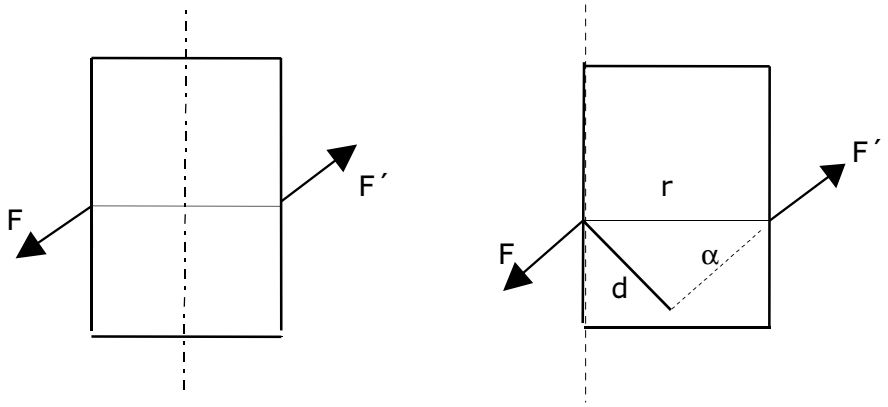
## ROTACIÓN DEL SÓLIDO RÍGIDO.

El sólido rígido (sistema de partículas cuyas distancias relativas no varían cuando se aplica una o varias fuerzas) no existe, pero suponer que un sólido es rígido, nos permite simplificar la aplicación de las leyes de la Física. Las bolas de billar, las piezas de acero, etc. pueden considerarse como sólidos rígidos y por lo tanto indeformables.

Un sólido rígido experimenta una **rotación** cuando sus partículas describen movimientos circulares alrededor de una recta llamada **eje de rotación.**

Ahora podemos preguntarnos: ¿quién produce las rotaciones?

Supongamos que queremos girar el objeto de la figura alrededor del eje representado. Necesitamos un **par de fuerzas** F y F'. Un par son dos fuerzas de la misma intensidad, paralelas y sentido contrario.



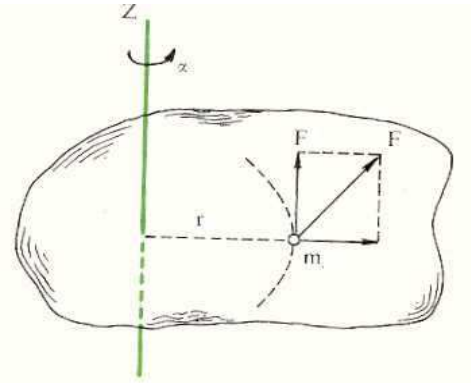

En el caso de la puerta de la derecha, nosotros sólo tenemos que realizar una componente del par (*acción)*, pues las bisagras realizan la otra (*reacción*).

Para caracterizar los pares de fuerzas, se define una magnitud vectorial denominada **momento**. *Cuanto mayor sea el momento, mayor será la rotación que produce*, es decir mayor a.

Se define *módulo* del momento de un par de fuerzas como el producto de una de ellas por la distancia perpendicular que las separa M = F.d

El *vector momento* de un par es perpendicular al plano que contiene dicho par y su sentido viene dado por la *regla del sacacorchos*.

Consideremos ahora el sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo, como en el caso de la puerta. Aplicamos una fuerza **F** en un punto i del sólido, la cual puede ser descompuesta en una componente tangencial y en otra normal.




Sólo la $F_t$ produce rotaciones

Hay que tener en cuenta que el momento es un producto vectorial, cuyo módulo es F.r.sen $\alpha$, por lo tanto si la dirección de **r** y de la **fuerza** forman un ángulo de 0º, esta fuerza no puede producir una rotación. Por lo tanto en este caso $F_t$ es la única que puede producir rotación.

$$M_i = F_t . r_i = m_i.a_i .r_i = m_i.r_i^2 . \alpha$$

Repitiendo el razonamiento para todos los puntos del sólido y sumando las expresiones obtenidas, resulta que el módulo del momento resultante es:

$$M = \sum m_i \cdot r_i^2 . \alpha$$

La expresión $\sum m_i \cdot r_i^2$ recibe el nombre de **momento de inercia del sólido respecto al eje**, y se representa por la letra **I**, por tanto **M = I. α**

El *momento de inercia* es una magnitud escalar y su unidad en el S.I. es Kg. $m^2$. Veremos que desempeña en rotación un papel similar a la *masa* en traslación, sin embargo, así como la masa es constante el momento de inercia es variable, pues depende de la masa del cuerpo, pero también de la situación del eje de giro *(ver Tabla).*

Si hacemos actuar sobre un sólido rígido capaz de girar alrededor de un eje, distintos *momentos*, se observa que se le comunican distintas aceleraciones angulares, de tal manera que **M/α =** I.

La ecuación **M=** I.α es la ***ecuación fundamental de la dinámica de rotación***

**Momentos de inercia de cuerpos uniformes de formas diversas**

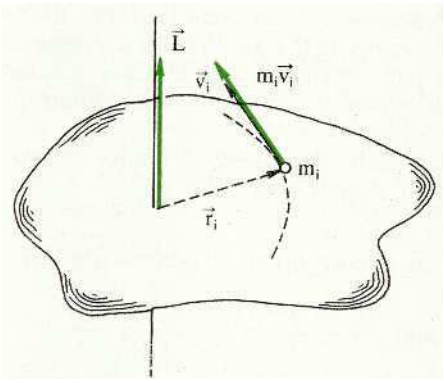
| | | |
|---|---|---|
| Cilindro hueco respecto a su eje (pared delgada) $I= MR^2$ | Esfera hueca respecto al diámetro (pared delgada) $I =2/3\ MR^2$ | Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su extremo $I=1/3ML^2$ |
| Cilindro sólido respecto a su eje $I = 1/2\ MR^2$ | Esfera sólida respecto al diámetro $I = 2/5\ MR^2$ | Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro $I= 1/12\ ML^2$ |

**MOMENTO ANGULAR. PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN**

Ya hemos dicho que un sólido rígido es un sistema de puntos materiales cuyas distancias mutuas son constantes.

Si este sólido gira alrededor de un eje, el ***momento cinético*** (*momento de la cantidad de movimiento*) de cada punto vendrá dado por $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$ que corresponde a un vector dirigido según el eje de rotación y de módulo: $L_i= r_i.\ m_i.\ v_i$,

como $v_i = \omega.r_i$ resulta que $L_i = m_i\ r_i^2.\ \omega$




El momento total del sistema tendrá por módulo la suma de los módulos componentes:

$L= \sum L_i = \sum m_i\ .r_i^2.\omega = I.\omega$

*El momento cinético de un cuerpo en rotación es un vector dirigido según el eje de rotación del cuerpo; <u>sentido</u> dado por la regla del sacacorchos; y <u>módulo</u>, producto del momento de inercia del cuerpo respecto al eje por el módulo de su velocidad angular.*

Derivando respecto al tiempo la expresión anterior, tendremos:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dI}{dt}\cdot\omega + I\cdot\frac{d\omega}{dt} = I\cdot\frac{d\omega}{dt} = I\cdot\alpha$$

pero d**L**/dt es el momento de la fuerza aplicada , entonces $\mathbf{M} = I.\alpha$

**TAREA 8:** Demostrar que d**L**/dt es el momento de la fuerza aplicada al cuerpo, respecto al eje de rotación.

La expresión **M** = I.d$\omega$/dt puede escribirse **M**.dt = d (I.$\omega$), por integración a un intervalo finito de tiempo se obtiene **M**.t = I.$\omega_2$ - I.$\omega_1$ , al producto **M**.t se le llama **impulso angular**.

Por tanto ***el impulso angular es igual a la variación del momento angular o cinético.***

Si sobre un cuerpo no actúa fuerza alguna o su momento resultante es cero, no estará sometido a ningún impulso angular. Entonces I$\omega$= cte. que es la expresión matemática del *principio de conservación del momento cinético:*

***Si en un sistema aislado es nulo el momento de las fuerzas aplicadas a un cuerpo, su momento cinético permanece constante.*** Es lo que sucede en la rotación de objetos celestes.

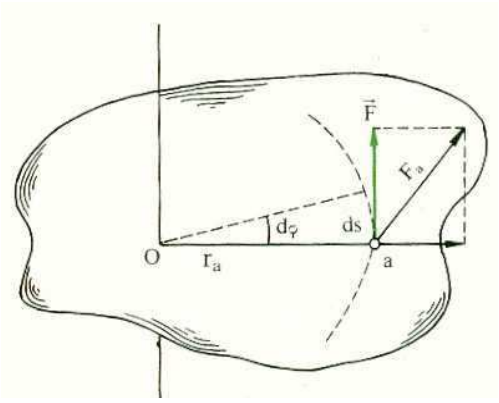
Son clásicos los ejemplos prácticos de este principio:

a) en patinaje sobre hielo, cuando la persona desea girar muy deprisa encoge el cuerpo y pega los brazos a él; así disminuye el momento de inercia y se obliga a aumentar su $\omega$, para que permanezca constante el producto I.$\omega$. Si desea disminuir su velocidad de giro, deberá extender los brazos así I crece, entonces $\omega$ debe disminuir.

b) Si una persona se sienta a horcajadas sobre un tonel y lleva en su mano un disco que pretende hacer girar, observará como el tonel gira en sentido contrario a como lo hace el disco. Esto se explica admitiendo que el momento cinético del tonel y el del disco han de anularse, puesto que el momento inicial del sistema era cero (tonel y disco estaban inicialmente en reposo).

c) el giróscopo o giroscopio.

## ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN. TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS.




En la figura, la fuerza F realiza trabajo $dW_i$ = F.ds = F.$r_i$.d$\varphi \Rightarrow$ $dW_i$ = $M_i$.d$\varphi \Rightarrow$

dW = I$\omega\delta\omega$ Integrando

$$W = \int_1^2 I\omega . d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

al término 1/2 I$\omega^2$ se le llama **energía cinética de rotación**, y el <u>teorema de las fuerzas</u> <u>vivas</u> en dinámica de rotación puede enunciarse de la siguiente manera:

*El trabajo desarrollado por la rotación de un cuerpo durante un cierto intervalo de tiempo, es igual a la variación de la energía cinética de rotación*

**TAREA 9:** ¿Cuál es el fundamento físico del yo-yo?

## ENERGÍA TOTAL DE UN CUERPO SOMETIDO A TRASLACIÓN Y ROTACIÓN

Son muy frecuentes los movimientos, por ejemplo una pelota que rueda por un suelo horizontal, un cilindro que cae rodando sin deslizamiento por un plano inclinado, etc. en los cuales hay simultáneamente movimiento rotacional y traslacional, en este caso.

***Su energía cinética total es la suma de la energía cinética de traslación del centro de gravedad del sólido y de la energía cinética de rotación en torno a un eje que pase por el centro de gravedad.***

Si el sólido posee energía potencial gravitatoria, se cumplirá el principio de conservación de la energía, que incluirá la de rotación.

Por otra parte, si al sistema se le suministra energía por acción de fuerzas exteriores y parte de esa energía se consume en trabajo de rozamiento, etc., también debemos tenerlo en cuenta.

**Cuadro comparativo entre traslación y rotación**

| TRASLACIÓN | ROTACIÓN |
|---|---|
| Espacio recorrido..... e | Ángulo descrito ..... $\varphi$ |
| Velocidad lineal ..... $v = de/dt$ | Velocidad angular ..... $\omega = d\varphi/dt$ |
| Aceleración lineal .... $a = dv/dt$ | Aceleración angular ..... $\alpha = d\omega/dt$ |
| Masa ..... m | Momento de inercia ..... I |
| Fuerza ..... F | Momento .....M |
| Ecuación fundamental .....$F = ma$ | Ecuación fundamental ..... $M = I\alpha$ |
| Impulso mecánico ..... F.t | Impulso angular ..... M.t |
| Momento lineal ..... m.v | Momento angular o cinético ..... $I.\omega$ |
| Trabajo de traslación ..... F.e | Trabajo de rotación ..... $M.\varphi$ |
| Energía cinética ..... $\frac{1}{2} mv^2$ | Energía cinética ..... $1/2\ I\omega^2$ |