E TI, COMO REPARTIRÍAS?
O POUCO BEN REPARTIDO...

GUÍA PRÁCTICA

Área de Normalización Lingüística
Universidade de Vigo


Proporción
Sistema d' Hondt
Media
Modelo
Regra
Enteiro
Poliedro
Xogo coalicional
Centroide
xogo
Solidariedade
Concede
Teoría de xogos
Baricentro
Divide
Proporcional
Asignación
Repartimentos
Escanos
Igualitaria
Dereitos
Coalicional
Ortoedro
Simetría
Axioma
Sistema
Xustiza
Modelo matemático
Mínimos dereitos
Demandantes
Ganancias
Perdas

E ti, como repartirías?
O pouco ben repartido...

GUÍA PRÁCTICA

Miguel A. Mirás Calvo, Universidade de Vigo
Iago Núñez Lugilde, Universidade de Vigo
Carmen Quinteiro Sandomingo, Universidade de Vigo
Estela Sánchez Rodríguez, Universidade de Vigo

Área de Normalización Lingüística
Universidade de Vigo

Edición: Universidade de Vigo, 2022

Deseño: Catro Ventos Editora

Impresión: Jadfel Artes Gráficas

ISBN: 978-84-123028-6-8

Depósito legal: VG 745-2021

Índice

Limiar 5

1. Introdución xeral aos problemas de repartimentos 7

2. Afondando no problema 11

    2.1. Algunhas propostas de repartición 20

    2.2. Axiomática e teoría de xogos 32

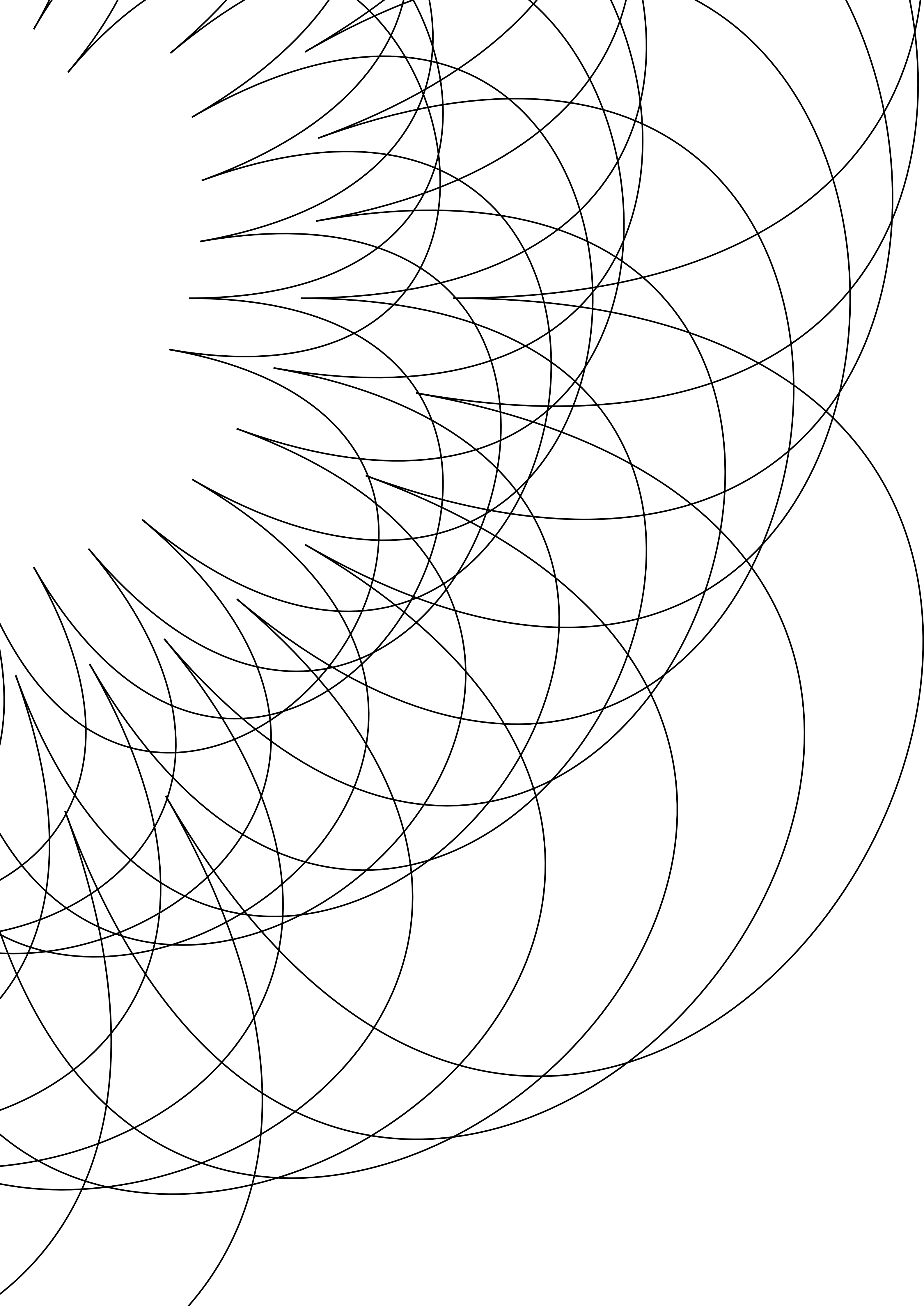
    2.3. Aplicacións a problemas de actualidade 34

3. Actividades didácticas 43

4. Glosario 57

5. Referencias 58

6. O noso equipo investigador 59



LIMIAR

De acordo cos seus estatutos, a Universidade de Vigo ten como un dos seus fins «contribuír ao progreso e ao benestar da sociedade mediante a produción, a transferencia e a aplicación do coñecemento, e a proxección social da súa actividade, con especial atención á realidade de Galicia, á súa cultura e á súa lingua» (artigo 2.4).

Desde a Área de Normalización Lingüística, como a unidade de traballo encargada de promover e darlle soporte técnico ao proceso de extensión do uso da lingua galega no ámbito docente, investigador, administrativo e de servizos, acreditamos firmemente na necesidade de promover a divulgación científica en lingua galega, tanto pola súa achega á dignificación do idioma coma pola relevancia que ten no necesario proceso normalizador, dentro da propia institución e no conxunto da sociedade actual.

A ciencia, en tanto que contribución humana determinante para mellorar as condicións de vida das persoas, constitúe unha fiestra clave para as linguas minoradas. Todos os desvelos que implica a divulgación científica teñen como finalidade afondar no elo que a universidade establece coa sociedade, a quen se debe. Por iso, tamén é responsabilidade das científicas e científicos axudar a protexer o patrimonio inmaterial que supón unha lingua en situación de vulnerabilidade.

Con estas guías prácticas pretendemos achegarnos a ese fin, pois están pensadas e deseñadas para usalas nos centros de educación secundaria de Galicia. Asemade, desexamos que sirvan para divulgar algúns dos resultados da investigación levada a cabo na Universidade de Vigo, en diversos ámbitos e áreas de coñecemento.

Queremos agradecer a axuda que a Unidade de Cultura Científica da Universidade de Vigo nos proporcionou coas súas suxestións e ideas, alén da eficaz comunicación cos grupos de investigación da Universidade de Vigo. E este agradecemento non podemos máis que estendelo ás persoas que forman parte dos grupos que elaboraron estas guías.. Sen o seu traballo, entusiasmo, dedicación e paciencia, este proxecto, que agardamos que teña continuidade nos próximos anos, non tería sentido.

Fernando Ramallo
Director da Área de Normalización Lingüística
Universidade de Vigo

1. INTRODUCIÓN XERAL AOS PROBLEMAS DE REPARTIMENTOS

É ben sabido que poden chegar a xurdir importantes desavinzas entre familiares cando toca repartir herdanzas ou cando se pretende establecer taxas para pagar á hora de levar a cabo un determinado plan público. Estipular a cantidade de dióxido de carbono que se pode emitir á atmosfera ou, mesmo, a distribución de vacinas son exemplos ben actuais de conflitos difíciles de resolver entre países, como tamén o é a adxudicación dos escanos dun parlamento entre os partidos políticos en función dos votos recibidos. Estas situacións teñen en común que o *ben* que se vai repartir non é abondo para satisfacer plenamente as demandas de cada persoa ou ente peticionario. Dar unha solución acaída a este tipo de problemas leva ocupando a humanidade ao longo da historia e non resulta tarefa sinxela pois, evidentemente, dependendo das circunstancias, unhas propostas de repartimento serán máis desexables ca outras polas partes en litixio.

Un problema de demandas (de repartimento) ten lugar cando temos que distribuír unha cantidade fixa entre un conxunto de demandantes cos mesmos dereitos que reclaman diferentes cantidades e de xeito que esa cantidade inicial da que dispoñemos non chega para cubrir todas as peticións. A cuestión é, pois, a seguinte: como elixir un repartimento de maneira *razoable* e *xusta*?

Comecemos cun exemplo sinxelo. Un grupo de amigas decide mercar a escote un agasallo para Rosalía, que está de aniversario. Encárganse de ir ao comercio Sabela e Xoana, que, ademais de pagar a súa parte, adiantan 80 euros (20 euros que pon Sabela e 60 que pon Xoana). Despois da festa, cadaquén entrégalles o diñeiro a Sabela e a Xoana pero, cando se xuntan e van repartir os 80 euros totais, danse de conta de que só teñen 50 euros. Perderon parte dos cartos! Como fan Sabela e Xoana para repartiren o que queda? Xa que parece lóxico admitir que ningunha debería de poñer máis cartos, trátase de atopar dous números $x, y \geq 0$ tales que $x + y = 50$.

Unha primeira proposta podería consistir en repartir a partes iguais, é dicir, 25 euros para cadaquén, pero, claro, iso significa que Sabela recupera máis do que adiantou e Xoana perde 35 euros. Probablemente esta división non sexa do agrado de Xoana!

Fagamos, logo, unha segunda proposta de repartimento: que tanto Sabela coma Xoana leven cantidades o máis semellantes posibles e de maneira que ningunha reciba máis do que puxo. Así, unha levaría 20 euros e a outra 30. Convéncevos máis?

Se tentamos que as perdas sexan o máis parecidas posible, sen que ningunha teña que poñer cartos do seu peto, a partición sería do seguinte xeito: 5 euros para Sabela e 45 para Xoana.

Por se aínda lle queredes dar máis voltas ao problema, aí vai unha cuarta suxestión: que repartan os 50 euros de que dispoñen de xeito proporcional á cantidade que avanzaron. Como Xoana puxo tres veces máis cartos, levará o triplo de euros ca Sabela. É dicir, 37,5 euros fronte a 12,5.

Outra proposta máis consiste en que, nun primeiro momento, tanto Sabela coma Xoana deixen para a outra o que non queren para si propia. É dicir, a Sabela corresponderíanlle 50 euros menos o que pide Xoana, e a Xoana, 50 euros menos o que solicita Sabela. Como no caso de Sabela esa diferenza é negativa, neste primeiro paso do repartimento non levaría nada, mentres que Xoana recuperaría 30 euros. Como aínda quedan 20 por dividir, repartimos esa cantidade a partes iguais entre elas. Polo tanto, Sabela quedaría finalmente con 10 euros, e Xoana, con 40.

Como podedes imaxinar, estas propostas de repartimento non son, por suposto, as únicas posibles. Podedes tentar vós achegar algunha máis. Algo adaptado, o caso que vimos de tratar aparece xa nos antigos textos do Talmud (libro sagrado da relixión xudía) e coñécese como o *problema da túnica en disputa (contested garment problem)*. Hai dous homes, un deles demanda a metade da túnica, e o outro, a túnica enteira. Na lei escrita do Talmud, o que demanda a metade debe recibir a cuarta parte e o outro as tres cuartas partes restantes. Non é unha repartición equitativa, pero será xusta?

Nos textos do Talmud podemos atopar tamén outras situacións interesantes. Por exemplo, un home, ao morrer, déixalles en herdanza 100 zuz (antiga moeda de prata xudía) ás súas tres esposas, mais tamén débedas de 100, 200 e 300 zuz, respectivamente. Canto se lle debe asignar a cada muller? E se a herdanza é de 200 zuz, canto lle asignamos a cadaquén? Que ocorre cando o herdo ascende a 300 zuz? Sen ningún tipo de explicación, no propio Talmud propóñense solucións para os tres casos:

- Se o herdo é de 100 zuz, cada demandante percibirá 100/3 zuz.
- Se a herdanza ascende a 200 zuz, as asignacións serán de 50, 75 e 75 zuz, respectivamente.
- Se deixou 300 zuz en herdo, recibirán 50, 100 e 150 zuz, respectivamente.

Que criterio credes que empregaron para repartiren deste xeito? No primeiro caso, o repartimento faise de maneira igualitaria (como na primeira das propostas feitas a Sabela e a Xoana). No terceiro, o legado distribúese de xeito proporcional ás peticións (como na cuarta proposta do exemplo anterior). Pero que ocorre no segundo dos casos? Cal foi o criterio elixido? Ao considerar as tres situacións de maneira conxunta, o asunto semella ser aínda máis misterioso: hai un mecanismo que permita chegar á solución proposta no Talmud que cubra os tres casos? Esta pregunta permaneceu sen resposta durante máis de 2000 anos e non foi ata 1985 cando se deu cunha solución que permitise explicar os tres problemas de vez. Pois si, así de complicados resultan ás veces certos problemas de repartimentos.

Como xa diximos, poñerse de acordo en cal é a división máis acaída en cada circunstancia non sempre é doado!

En xeral, os problemas de demandas poden tratarse de distintos xeitos. Por unha banda, pódese realizar unha achega directa, comezando por definir unha regra (un repartimento) e confrontando a solución por ela suxerida en diferentes circunstancias cos resultados agardados que nos poden parecer razoables segundo as nosas experiencias ou expectativas.

Por outra, é posible estudalos a través dunha aproximación axiomática, é dicir, a partir de propiedades ou de axiomas desexables que nos leven ás regras establecidas para o repartimento. Por último, tamén se poden empregar métodos propios da teoría de xogos, convertendo o problema nun xogo coalicional e estudando as súas solucións. Nesta unidade didáctica expoñeremos formalmente varias das regras de repartimento máis coñecidas e veremos, a través de exemplos sinxelos e de actividades, algunhas das súas propiedades básicas.

2. AFONDANDO NO PROBLEMA

O modelo matemático empregado para realizar un estudo formal de problemas como os vistos nos exemplos anteriores é relativamente sinxelo. Partimos dunha cantidade $E \geq 0$ que hai que repartir entre n demandantes. Cada demandante reclama unha certa cantidade positiva (mesmo pode non pedir nada) e de xeito que a suma de todas esas demandas individuais iguala ou supera a cantidade inicial dispoñible E. Podemos, daquela, xuntar todas as peticións nunha tira de números (un vector en $\mathbb{R}^n$), $d = (d_1, \ldots, d_n)$, que denominaremos *vector de demandas*, verificando $d_1 + \ldots + d_n \geq E$. De xeito abreviado, escribiremos o problema como (E,d).

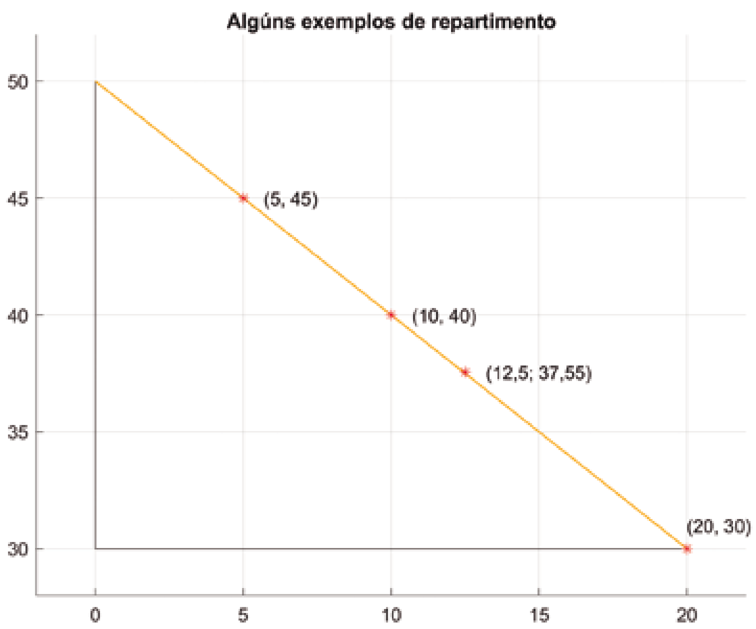
Unha *asignación* (ou repartimento) para o problema (E,d) é un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que para cada coordenada i se ten que $0 \leq x_i \leq d_i$ e, ademais, $x_1 + \ldots + x_n = E$. Ou sexa, ningún ou ningunha demandante ten que poñer cartos nin recibe máis do que reclama e nada sobra da cantidade inicial.

Denotaremos por $X(E,d)$ o conxunto de todas as posibles asignacións para (E,d). Da ecuación $x_1+\ldots+x_n=E$ deducimos que cada unha das coordenadas do vector x queda perfectamente determinada ao coñecer as restantes. Por exemplo, se coñecemos $x_1, \ldots, x_{n-1}$, obtemos x_n sen máis que facer a resta $x_n = E - x_1 - \ldots - x_{n-1}$. É dicir, durante unha primeira fase, podemos «esquecer» esa coordenada x_n (ou calquera das outras).

EXEMPLO

Para o primeiro dos problemas expostos na introdución, a cantidade inicial da que se dispón é $E=50$, o número de demandantes é $n=2$, e o vector de demandas, $d=(d_1,d_2)=(20,60)$. Os vectores (20, 30), (5, 45), (12,5; 37,5) e (10, 40) son asignacións para o problema (E,d) e o conxunto de asignacións é:

$$X(E,d)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1+x_2=50;\, 0\le x_1\le 20;\, 0\le x_2\le 60\}.$$



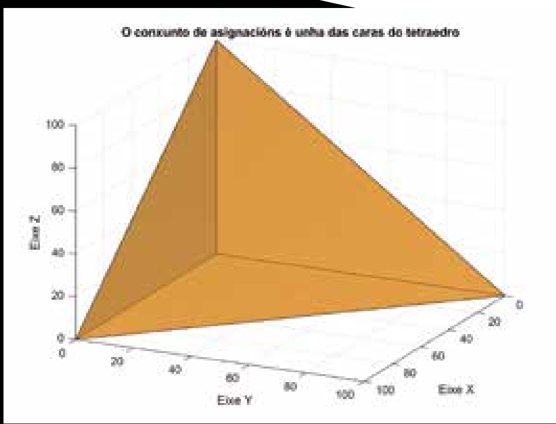
A figura da esquerda amosa ese conxunto (o segmento amarelo) e tales repartimentos.

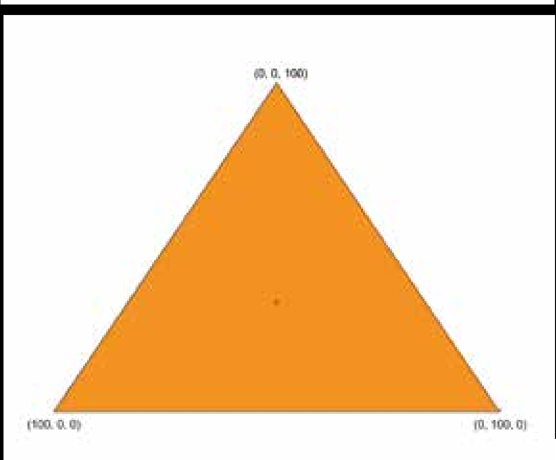
Se vos fixades, $X(E,d)$ é o segmento de vértices (0, 50) e (20, 30), e a asignación (10, 40) coincide exactamente co seu punto medio: co centro de masas do segmento.

EXEMPLO

No problema de repartimento da herdanza, cando esta é de 100 zuz, temos que $E=100$, $n=3$ e $d=(d_1,d_2,d_3)=(100,200,300)$. O conxunto de asignacións para (E,d) é agora o subconxunto de $\mathbb{R}^3$,

$$X(E,d)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3=100;\ 0\leq x_1\leq 100; 0\leq x_2\leq 200;\ 0\leq x_3\leq 300\}.$$



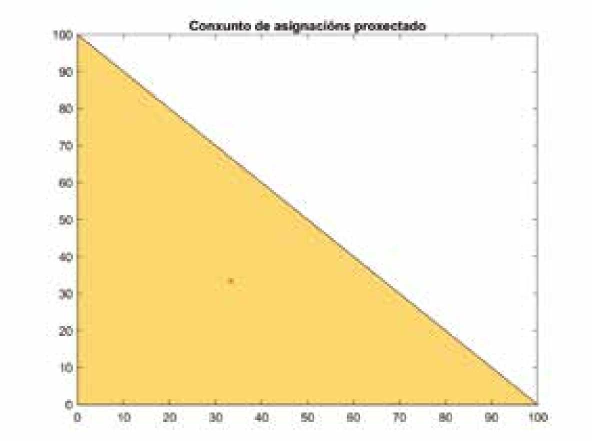


É dicir, o conxunto de asignacións é unha das caras do tetraedro de vértices (0, 0, 0), (100, 0, 0), (0, 100, 0) e (0, 0, 100). Concretamente, é o triángulo equilátero de vértices (100, 0, 0), (0, 100, 0) e (0, 0, 100). O baricentro (ou centroide) deste triángulo pode obterse como a media dos seus vértices e resulta ser $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$. Cómpre observar que o centroide do triángulo (resaltado en cor vermella na figura de abaixo) coincide coa asignación elixida polo Talmud para este problema.

Posto que a terceira das coordenadas de cada vector de $X(E,d)$ é do xeito $x_3=100-x_1-x_2$, tamén podemos considerar o conxunto de asignacións proxectado no plano (é dicir, «esquecendo» a terceira das coordenadas de cada punto do conxunto):

$$X(E,d)_{prox}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: 0\leq x_1\leq 100;$$
$$0\leq x_2\leq 200; 0\leq x_1+x_2\leq 100\}.$$

O conxunto de asignacións e o baricentro, aínda que esta vez proxectados no plano, aparecen na seguinte figura:

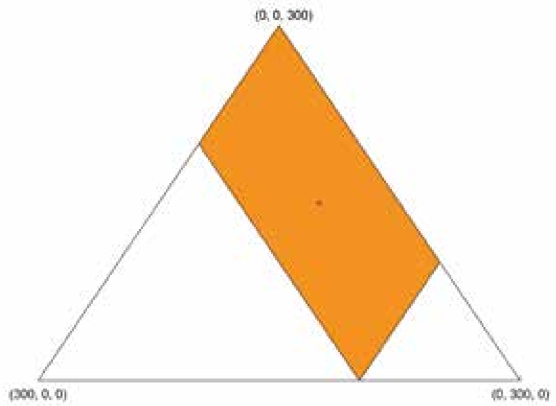


EXEMPLO

Cando a herdanza é de 300 zuz, o problema (E,d) é un problema de demandas con $E=300$, $n=3$ e vector de demandas o mesmo ca o do anterior exemplo, isto é, $d=(d_1,d_2,d_3)=(100,200,300)$. O conxunto $X(E,d)$ non é agora unha cara completa do tetraedro; nesta ocasión trátase do subconxunto de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$X(E,d)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_1+x_2+x_3=300;$$
$$0\le x_1\le 100; 0\le x_2\le 200; 0\le x_3\le 300\}.$$

Os vértices do conxunto son, polo tanto, (100, 200, 0), (0, 200, 100), (0, 0, 300) e (100, 0, 200). A solución proposta no libro do Talmud (50, 100, 150) aparece marcada en cor vermella e resulta ser, máis unha vez, o centroide do conxunto de asignacións.



Obviamente, tan só somos quen de facer representacións gráficas no plano ou no espazo e, daquela, para representar graficamente o conxunto de asignacións dun problema de demandas, este ha de ter, como máximo, tres demandantes. Se n=3, poderemos ver o conxunto $X(E,d)$ no espazo ou, tal e como fixemos nun dos exemplos anteriores, unha proxección del no plano. Aínda que no caso de catro demandantes non é posible representar o conxunto de asignacións, para termos unha idea de como é podemos proxectalo no espazo «esquecendo» algunha das catro coordenadas dos puntos.

EXEMPLO

Consideremos un problema de demandas, con catro demandantes, no que $E=16$ e o vector de demandas é $d=(2, 5, 7, 19)$. O conxunto de asignacións vén dado por:

$$X(E,d)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:\ x_1+x_2+x_3+x_4=16;\ 0\leq x_1\leq 2;\ 0\leq x_2\leq 5; 0\leq x_3\leq 7;\ 0\leq x_4\leq 19\}.$$

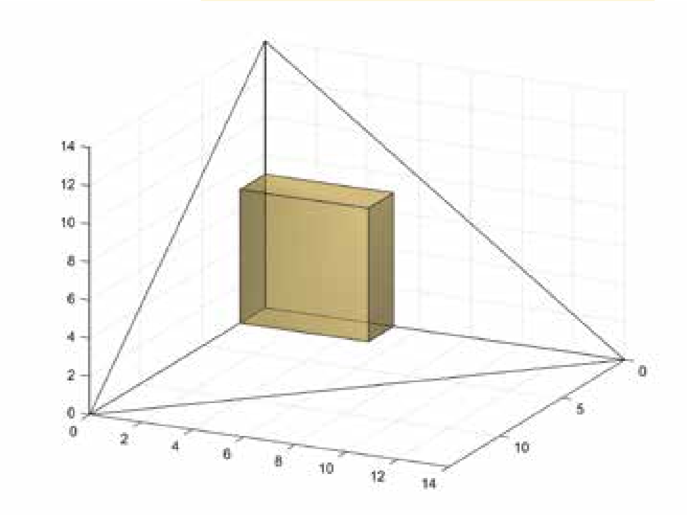
Para termos unha imaxe de tal conxunto, deixaremos de lado unha calquera das catro coordenadas dos puntos, por exemplo a cuarta. Por ser $x_4=16-x_1-x_2-x_3$ e $0\leq x_4\leq 19$, temos que $0\leq 16-x_1-x_2-x_3\leq 19$ ou, equivalentemente, $0\leq x_1+x_2+x_3\leq 16$. É dicir, cando prescindimos da derradeira das coordenadas, a proxección no espazo do conxunto de asignacións vén dada por:

$$X(E,d)_{prox}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq x_1\leq 2;\ 0\leq x_2\leq 5;\ 0\leq x_3\leq 7;\ 0\leq x_1+x_2+x_3\leq 16\}.$$

Fixémonos en que, nesa descrición do conxunto $X(E,d)_{prox}$, a cuarta parella de inecuacións é redundante, non engade ningunha restrición máis ás xa establecidas polas outras tres. Polo tanto, temos:

$$X(E,d)_{prox}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq x_1\leq 2, 0\leq x_2\leq 5, 0\leq x_3\leq 7\}.$$

A proxección no espazo do conxunto de asignacións é, entón, un paralelepípedo rectangular (ortoedro):



Sen cambiar o vector de demandas, pero considerando desta vez que a cantidade inicial da que se dispón é E=20, a proxección do conxunto de asignacións será un poliedro diferente ao obtido anteriormente. Observemos en primeiro lugar que:

$$X(E,d)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:\ x_1+x_2+x_3+x_4=20;\ 0\leq x_1\leq 2;\ 0\leq x_2\leq 5;0\leq x_3\leq 7;\ 0\leq x_4\leq 19\}.$$

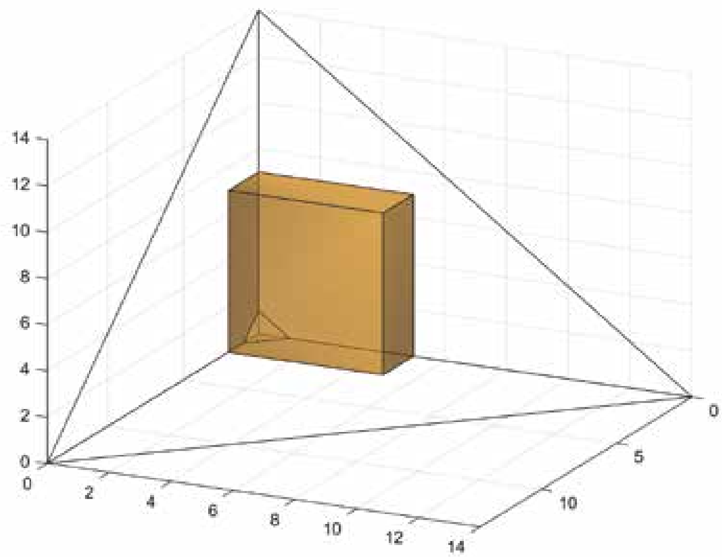
Imos, de novo, «esquecer» a cuarta coordenada de cada punto de $X(E,d)$. Agora ben, nesta ocasión $x_4=20-x_1-x_2-x_3$ e, daquela, temos que $0\leq 20-x_1-x_2-x_3\leq 19$. É dicir, $1\leq x_1+x_2+x_3\leq 20$. Polo tanto, a proxección do conxunto de asignacións vén dada por:

$$X(E,d)_{prox}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:0\leq x_1\leq 2;\\ 0\leq x_2\leq 5;0\leq x_3\leq 7;1\leq x_1+x_2+x_3\leq 20\}.$$

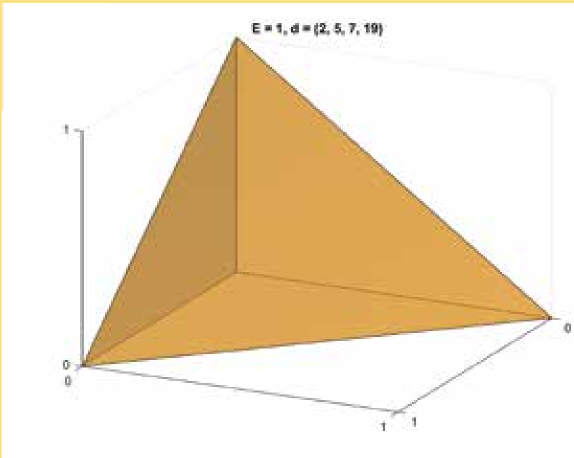
Da mesma maneira ca no exemplo anterior, a desigualdade $x_1+x_2+x_3\leq 20$ é superflua. Porén, agora hai que ter tamén en conta que $1\leq x_1+x_2+x_3$ á hora de describir a proxección do conxunto de asignacións:

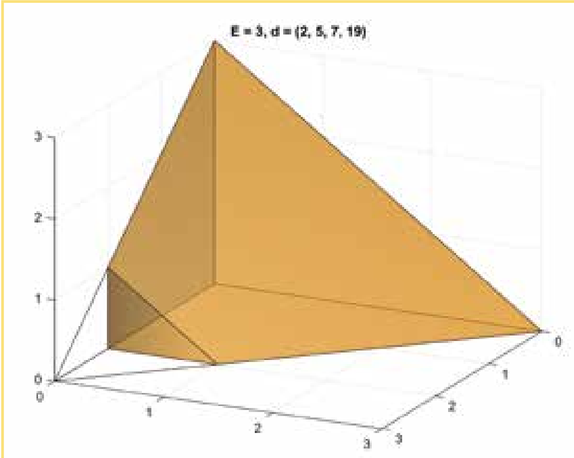
$$X(E,d)_{prox}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:0\leq x_1\leq 2;\\ 0\leq x_2\leq 5;0\leq x_3\leq 7;1\leq x_1+x_2+x_3\}.$$

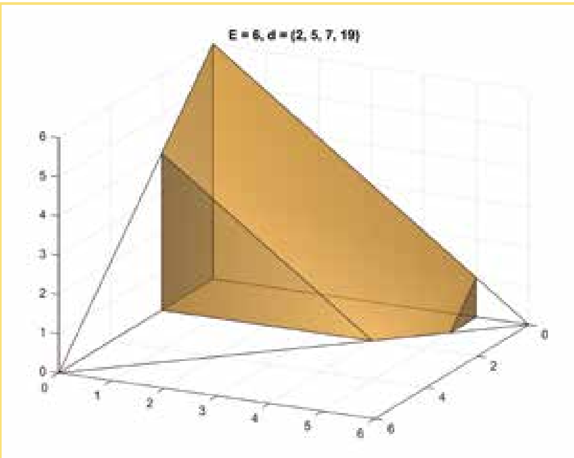
É dicir, de entre todos os puntos do ortoedro tan só están na proxección do conxunto de asignacións os situados por riba do plano $x_1+x_2+x_3=1$.

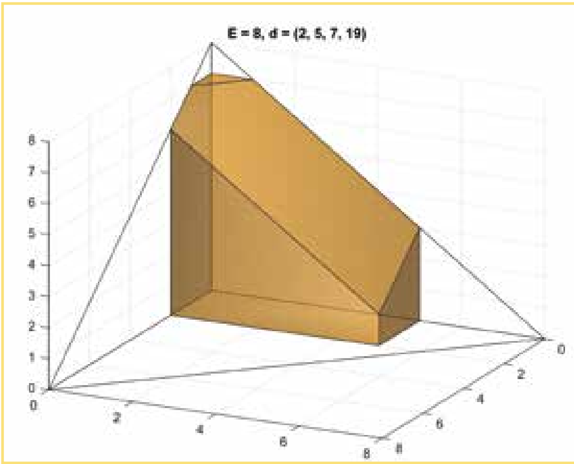


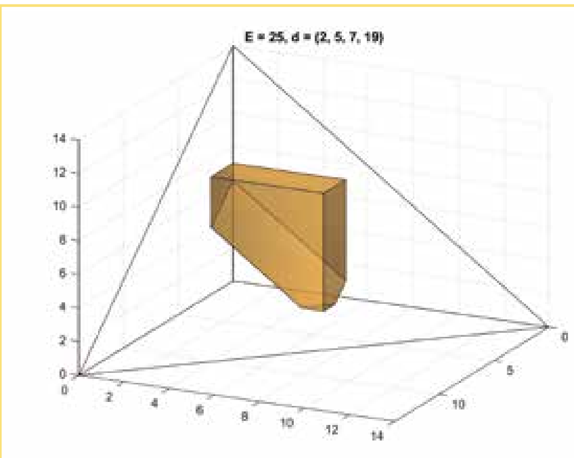
Nas seguintes figuras pódese ver a forma que ten o conxunto de asignacións dun problema de repartimentos onde variamos a cantidade que se vai repartir mantendo as demandas iniciais. Cantas maneiras distintas hai de cortar un ortoedro!

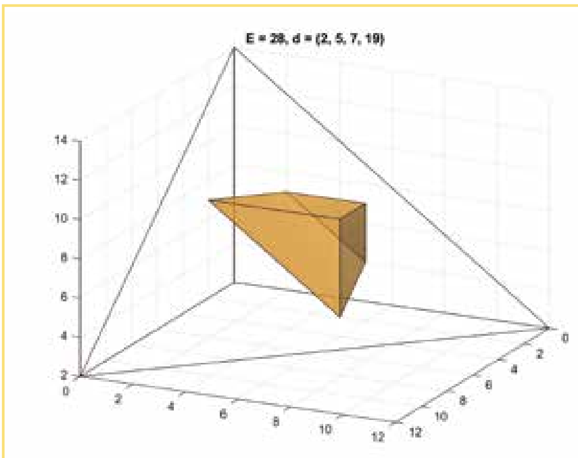












2.1. ALGUNHAS PROPOSTAS DE REPARTICIÓN

Unha *regra de asignación* (ou, simplemente, unha regra) é unha función que a cada problema (E,d) lle adxudica unha única asignación no conxunto $X(E,d)$. Unha regra pode interpretarse como un mecanismo de división da cantidade inicial entre os e as demandantes. Aceptar de mellor ou de peor grado a repartición determinada por unha ou outra regra dependerá, como non, das circunstancias en que se atopen as persoas reclamantes no momento de levala a cabo. Ás veces, as regras veñen dadas explicitamente (ben a través dunha fórmula, ben mediante unha construción xeométrica) ou, de maneira implícita, a través dun algoritmo. Imos repasar algunhas das máis coñecidas.

A regra proporcional

Un xeito moi habitual de repartimento é facer que as cantidades adxudicadas sexan proporcionais ás cantidades demandadas. Esta regra, quizais a máis coñecida de todas, recibe o nome de *regra proporcional* e xa foi estudada polo mesmo Aristóteles, para quen proporcionalidade equivalía a igualdade.

A regra proporcional adoita entenderse como un xeito de división igualitaria e a cantidade asignada a cada demandante i pode calcularse por medio da fórmula

$$pro_i\,(E,d) = \frac{d_i}{(d_1 + \ldots + d_n)}\,E.$$

O principio de proporcionalidade ten moitas aplicacións prácticas, non necesariamente nun problema no que conxuntamente se demanda máis do que se ten. A Lei da propiedade horizontal, por exemplo, utiliza o principio de proporcionalidade para sufragar os gastos dos servizos comúns nunha comunidade de propietarias/os. No ámbito da política tamén temos exemplos de proporcionalidade. Para elixir as e os representantes no Congreso dos Deputados téñense en conta 52 circunscricións electorais, correspondentes ás 50 provincias españolas máis Ceuta e Melilla. A cada provincia asígnanselle inicialmente dous escanos, mentres que as dúas cidades autónomas teñen garantido un/unha representante cada unha, co que 102 escanos xa están dados de principio. Os outros 248 escanos distribúense proporcionalmente á poboación de cada circunscrición. Máis adiante trataremos o repartimento de escanos a partidos políticos segundo os resultados das eleccións co coñecido método D'Hondt.

Outro exemplo máis vén do pagamento de impostos na declaración da renda. Para saber canto paga de impostos cada contribuínte, primeiro selecciónase o tramo ao que pertence, que depende basicamente dos ingresos anuais. Logo, aplícase a porcentaxe correspondente a ese tramo para determinar a taxa que debe pagar.

Tamén é posible facer repartimentos inversamente proporcionais, sen máis que aplicar o principio de proporcionalidade aos inversos das cantidades de partida.

EXEMPLO

Por medio de cálculos sinxelos obtemos que as asignacións propostas pola regra proporcional para os tres problemas descritos no Talmud son:

$$\left(\frac{50}{3}, \frac{100}{3}, 50\right), \left(\frac{100}{3}, \frac{200}{3}, 100\right)$$

$$\text{e } (50, 100, 150), \text{ respectivamente.}$$

A regra concede e divide

A segunda das regras que imos describir, coñecida co nome de *concede e divide*, está definida para problemas con só dous ou dúas demandantes, é dicir, cando $n=2$ e $d=(d_1,d_2)$. O proceso de asignación proposto por esta regra baséase no feito de que, nun primeiro momento, cada demandante lle concede á outra/o a parte da cantidade dispoñible que non desexa para si propio, se tal cantidade é non–negativa, e cero, noutro caso. Ou sexa, a primeira persoa reclamante recibe a maior das cantidades entre 0 e $E-d_2$, e a segunda, a maior cantidade entre 0 e $E-d_1$. Estas cantidades son os dereitos mínimos de cada reclamante. A continuación, repártese o resto a partes iguais entre os dous peticionarios ou peticionarias.

EXEMPLO

*X*a vimos na introdución un primeiro exemplo de como repartir segundo esta regra: Sabela e Xoana solicitaban 20 e 60 euros, respectivamente, dun total de 50. Logo, o mínimo dereito de Sabela é 0, e o de Xoana, 30. Polo tanto, a asignación proposta pola regra concede e divide para resolver esta situación é (10, 40). Se o recurso inicial fose, por exemplo, 70, entón Sabela e Xoana recibirían nun primeiro momento os seus dereitos mínimos, 10 e 50 euros, respectivamente. A continuación, os 10 euros restantes repártense igualitariamente e a asignación final será (15, 55). Nesta segunda situación, o conxunto de asignacións é o segmento de vértices (10, 60) e (20, 50), cuxo centroide é, precisamente, o punto (15, 55).

O interese da regra concede e divide radica en que moitas das regras definidas para resolver conflitos do tipo que nos ocupa coinciden con ela no caso de que o número de demandantes sexa exactamente dous.

A regra das ganancias igualitarias

Se en vez de propoñer unha división igualitaria en termos relativos (igualdade por unidade demandada), como suxire a regra proporcional, imos cara a unha división igualitaria en termos absolutos, poñendo tan só como condición que ninguén perciba máis do que solicita, temos unha nova proposta de asignación: a *regra das ganancias igualitarias.*

Esta regra, que xa foi descrita polo médico, rabino e teólogo da Idade Media Maimónides no século XII, favorece demandantes con pedimentos máis baixos. Un xeito de calcular o vector de asignacións determinado pola regra das ganancias igualitarias é comezar dividindo en partes iguais a cantidade de que se dispón e ir facendo axustes cada vez que un ou unha das demandantes acade a totalidade da súa petición. Se ninguén chega a recibir a súa demanda completa, estamos ante unha división igualitaria. Se alguén acada ou supera o demandado despois de realizar a primeira división, entón axústase o percibido á súa demanda e repítese o proceso coa cantidade que queda por repartir tendo en conta o resto de persoas demandantes. Continúase deste xeito ata esgotar a cantidade inicial de maneira que ninguén perciba máis do solicitado inicialmente.

EXEMPLO

Se $E=100$ e $d=(100, 200, 300)$, a regra das ganancias igualitarias outórgalle de xeito claro $\frac{100}{3}$ a cada demandante.

Se mantemos as demandas pero aumentamos a cantidade da que se dispón a $E=450$, a primeira división asignaríalle 150 unidades monetarias a cadaquén. Como a primeira demanda, $d_1=100$, é menor ca esa adxudicación inicial, as 50 unidades de máis repartiríanse igualitariamente entre as outras dúas persoas demandantes. A asignación sería finalmente (100, 175, 175).

A regra das perdas igualitarias

Co punto de vista oposto ao subxacente na regra das ganancias igualitarias defínese a *regra das perdas igualitarias*. Nesta ocasión, téntase igualar as perdas coa restrición, iso si, de que ningún reciba unha cantidade negativa (é dicir, que non teña que poñer cartos do seu peto). Esta solución, que tamén aparece xa proposta por Maimónides, favorece demandantes con maiores peticións.

O xeito de repartir suxerido pola regra das perdas igualitarias pode describirse da seguinte maneira: distribúese a partes iguais entre as n demandas a cantidade $C = d_1 + ... + d_n - E$.

Se esa asignación, $\frac{C}{n}$, é máis pequena ca cada unha das demandas, a atribución final será: $(d_1 - \frac{C}{n}, ..., d_n - \frac{C}{n})$.

Se algunha das demandas, poñamos por caso d_i, é máis pequena ca $\frac{C}{n}$, o/a demandante correspondente non recibe nada e a diferenza $d_i - \frac{C}{n}$ repártese igualitariamente entre as restantes demandas.

Continúase este proceso ata que a asignación de todas as persoas demandantes sexa non-negativa.

EXEMPLO

Se $E = 450$ e $d = (100, 200, 300)$, teriamos que $C = 600 - 450 = 150$. Como $\frac{C}{3} = 50$, a regra das perdas igualitarias recomenda a asignación $(50, 150, 250)$.

Se $E = 200$, entón $C = 600 - 200 = 400$. Como a primeira demanda, 100, é menor ca $\frac{400}{3}$,

- a primeira demandante non levaría nada,
- a segunda quedaría con $200 - \frac{400}{3} - \frac{\left(100 - \frac{400}{3}\right)}{3} = 50$
- e a terceira $300 - \frac{400}{3} - \frac{\left(100 - \frac{400}{3}\right)}{3} = 150$.

É dicir, o vector de asignacións determinado pola regra das perdas igualitarias para este problema é $(0, 50, 150)$.

A regra do Talmud

Imos describir agora unha regra deseñada para acomodar as solucións propostas no Talmud para os tres problemas de herdanzas que describimos na introdución. Esta regra, nomeada xa que logo *regra do Talmud*, foi proposta en 1985 polo matemático e premio Nobel de Economía Robert J. Aumann e polo matemático Michael B. Maschler. A idea subxacente é que ningún obteña máis da metade do que reclama, sempre e cando a cantidade inicial dispoñible E sexa inferior á metade da cantidade total solicitada por todos os e as demandantes, $D=d_1+\ldots+d_n$, e, no caso contrario, que ningún perda máis da metade do seu pedimento. Así, pois, esta regra resulta ser un híbrido entre a regra das ganancias igualitarias e a regra das perdas igualitarias.

Entón, a proposta de asignación determinada pola regra do Talmud é:

A regra das ganancias igualitarias, considerando como dereitos a metade do demandado, $\frac{d}{2} = \left(\frac{d_1}{2}, \ldots, \frac{d_n}{2}\right)$, sempre que $E \leq \frac{D}{2}$.

A regra das perdas igualitarias, considerando como dereitos a metade do demandado, $\frac{d}{2} = \left(\frac{d_1}{2}, \ldots, \frac{d_n}{2}\right)$, sempre que $E \geq \frac{D}{2}$.

EXEMPLO

Vexamos que, para os tres exemplos descritos no Talmud, a regra homónima proporciona, efectivamente, as solucións propostas polos sabios antigos no libro. Lembremos que a suma das demandas é, nos tres casos, $D=600$.

Nos dous primeiros casos, cando $E=100$ ou $E=200$, a cantidade para repartir é menor ca $\frac{D}{2}=300$, polo que cada demandante percibirá a asignación suxerida pola regra das ganancias igualitarias para o mesmo valor de E e demandas $\frac{d}{2}=(50,100,150)$. É dicir, $\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right)$ se $E=100$ ou $(50,75,75)$ se $E=200$.

Cando $E = 300$, temos que $E = \frac{D}{2}$ e, para obter a cantidade que lle corresponde a cada demandante, podemos proceder usando calquera das dúas alternativas expostas na definición da regra:

A asignación suxerida pola regra das ganancias igualitarias para o problema con $E = 300$ e demandas $\frac{d}{2} = (50, 100, 150)$. Ou sexa, o vector de asignacións $(50, 100, 150)$.

A asignación suxerida pola regra das perdas igualitarias para o problema con $E = 300$ e demandas $\frac{d}{2} = (50, 100, 150)$. Ou sexa, o vector de asignacións $(50, 100, 150)$.

A regra das chegadas aleatorias

Imos supoñer que as e os reclamantes chegan un por un e, a medida que van chegando, van percibindo todo o que demandan, mentres a cantidade inicial non se esgote. Para eliminar os efectos producidos polo principio «quen primeiro chega primeiro se serve», faremos a media das cantidades adxudicadas a cada persoa peticionaria en cada unha das posibles ordes de chegada. Esa media é a asignación proposta pola denominada *regra das chegadas aleatorias*. Podedes comprobar que as asignacións obtidas seguindo unha orde dos ou das demandantes son os puntos extremos do conxunto de repartimentos, que tamén se chaman *vectores de contribucións marxinais*.

EXEMPLO

No problema de Sabela e de Xoana, só hai dúas posibles ordes de chegada. Se primeiro chega Sabela, o repartimento será (20,30), mais, de ser Xoana quen chegue primeiro, a asignación será (0,50). A media destas dúas asignacións dános, pois, a cantidade proposta pola regra das chegadas aleatorias: $\frac{1}{2}((20,30)+(0,50))=(10,40)$.

Nos problemas do Talmud, como son tres as reclamantes, hai seis posibles ordes de chegada: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ e $(3,2,1)$. Se, por exemplo, queremos resolver o caso no que a cantidade inicial é de 200 unidades monetarias, as adxudicacións en cada orde serían, respectivamente: $(100,100,0)$, $(100,0,100)$, $(0,200,0)$, $(0,200,0)$, $(0,0,200)$ e $(0,0,200)$.

	Demandante 1	**Demandante 2**	**Demandante 3**
Orde de chegada: (1, 2, 3)	100	100	0
Orde de chegada: (1, 3, 2)	100	0	100
Orde de chegada: (2, 1, 3)	0	200	0
Orde de chegada: (2, 3, 1)	0	200	0
Orde de chegada: (3, 1, 2)	0	0	200
Orde de chegada: (3, 2, 1)	0	0	200

As medias das cantidades percibidas polas tres demandantes son $\frac{200}{6}$, $\frac{500}{6}$ e $\frac{500}{6}$, respectivamente. É dicir, a asignación final suxerida pola regra das chegadas aleatorias para o problema é $(\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3})$.

A regra da media das asignacións

Na súa obra *Sobre o equilibrio dos planos*, Arquímedes de Siracusa introduce o concepto de *centro de masas* e presenta métodos de cálculo do centro de masas para figuras tales como triángulos ou paralelogramos. Imos rematar este pequeno percorrido por algunhas das máis coñecidas regras de asignación cunha de marcado carácter xeométrico, moi intuitiva, e que proporciona dun xeito natural unha escolla no conxunto de asignacións para o problema (E,d): a que propón como solución do problema o propio centroide do conxunto $X(E,d)$. Parece unha idea sinxela, pero de todas as regras que estudamos aquí é a máis nova.

Esta maneira de repartir trata de forma ecuánime todas as posibles asignacións do conxunto de repartimentos para perseguir unha xustiza colectiva. Se a regra das chegadas aleatorias era unha media das asignacións obtidas nas $n!$ posibles ordes de chegada, a *regra da media das asignacións* é a media do conxunto de asignacións baixo a premisa de que todas as asignacións do conxunto son igualmente probables.

EXEMPLO

No caso de dous ou dúas demandantes, como xa vimos anteriormente, o conxunto de asignacións é o segmento

$$X(E,d)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1+x_2=E;\, 0\le x_1\le d_1;\, 0\le x_2\le d_2\}.$$

Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que as demandas están ordenadas en orde crecente, é dicir, $0\le d_1\le d_2$. O punto medio dese segmento é:

a) $\left(\frac{E}{2},\frac{E}{2}\right)$, se $0\le E\le d_1$.

b) $\left(\frac{d_1}{2},E-\frac{d_1}{2}\right)$, se $d_1\le E\le d_2$.

c) $\left(\frac{E+d_1-d_2}{2},\frac{E-d_1+d_2}{2}\right)$, se $d_2\le E\le d_1+d_2$.

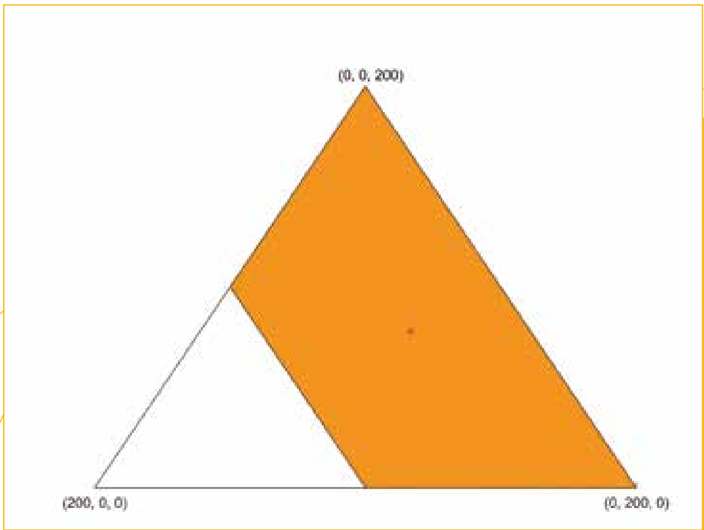
Fixádevos en que, neste caso, a regra da media das asignacións propón sempre a mesma atribución ca a regra concede e divide, a regra do Talmud e a regra das chegadas aleatorias. Cando o número de demandantes é maior ca dous, nalgunhas ocasións as asignacións propostas por certas regras tamén coinciden co centroide do conxunto de asignacións, pero a maioría das veces non é así. Vimos anteriormente exemplos nos que esta coincidencia se daba e outros nos que non.

Agora ben, non sempre é tan sinxelo obter o centro xeométrico do conxunto de asignacións, como ocorre no caso en que o número de demandantes é 2. En xeral, para calcular o centroide de $X(E,d)$ podemos empregar un método xeométrico xa proposto polo propio Arquímedes que consiste en descompoñer o conxunto en varias pezas que non compartan entre elas volume ningún e para as que sexa sinxelo obter tanto o volume coma o centroide. Esta é a idea que subxace no seguinte exemplo de cálculo da regra da media das asignacións e que permite adiviñar a maneira de describir algún algoritmo para o seu cálculo en problemas con maior número de demandantes.

EXEMPLO

Retomemos o exemplo do Talmud no que $E=200$. O conxunto das asignacións para este problema é:

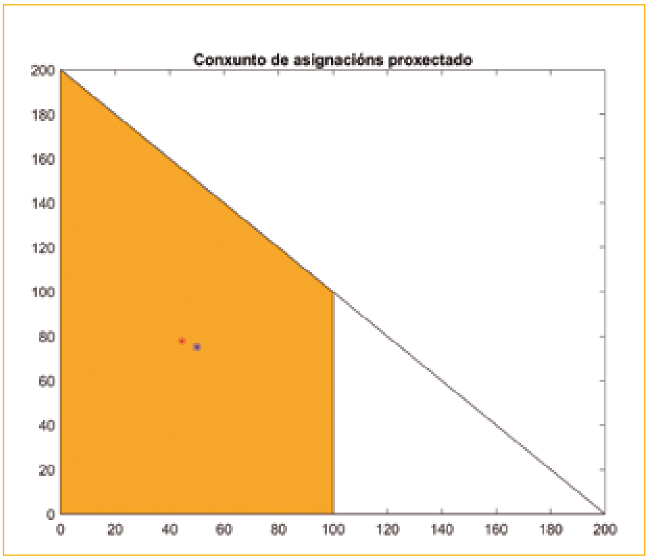
$$X(E,d)=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3: x_1+x_2+x_3=200;$$
$$0\leq x_1\leq 100; 0\leq x_2\leq 200; 0\leq x_3\leq 300\}.$$



O conxunto de asignacións proxectado no plano (se esquecemos, como xa diximos anteriormente, a terceira das coordenadas de cada punto) é:

$$X(E,d)_{prox}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:0\leq x_1\leq 100;0\leq x_2\leq 200;0\leq x_1+x_2\leq 200\}.$$

A representación gráfica deste conxunto e as atribucións suxeridas pola regra da media das asignacións (en cor vermella) e pola regra do Talmud (en azul) amósanse na seguinte figura:



Para obter a solución proposta pola regra da media das asignacións empregaremos algúns coñecementos básicos de álxebra e de xeometría. Comezaremos calculando as dúas primeiras coordenadas e, a partir delas, a terceira.

O triángulo máis grande que aparece na figura é un triángulo rectángulo de lado 200 e ten por área $A_T=\dfrac{200\times 200}{2}=20000$; o seu baricentro (ou centroide) está situado no punto de coordenadas $C_T=\left(\dfrac{200}{3},\dfrac{200}{3}\right)$.

Do mesmo xeito, posto que o triángulo máis pequeno é, tamén, un triángulo rectángulo de lado 100, a área do mesmo é $A_t=\dfrac{100\times 100}{2}=5000$ e ten o baricentro no punto $C_t=\left(\dfrac{400}{3},\dfrac{100}{3}\right)$.

Xa que logo, a área do conxunto de asignacións é a diferenza entre as áreas dos dous triángulos, é dicir, $A_{X(E,d)}=A_T-A_t=15000$. Polo método de descomposición de Arquímedes sabemos que se verifica a relación $A_T\times C_T=A_t\times C_t+A_{X(E,d)}\times C$, onde $C=(C_1,C_2)$ denota o punto correspondente ao centroide do conxunto $X(E,d)_{prox}$.

Polo tanto, cada unha das dúas coordenadas de *C* pode obterse facilmente do seguinte xeito:

a

$$C_1 = \frac{20000 \times \frac{200}{3} - 5000 \times \frac{400}{3}}{15000} = \frac{4000000 - 2000000}{45000} = \frac{400}{9}$$

b

$$C_2 = \frac{20000 \times \frac{200}{3} - 5000 \times \frac{100}{3}}{15000} = \frac{4000000 - 500000}{45000} = \frac{700}{9}$$

A terceira coordenada é, entón,

c

$$200 - \frac{400}{9} - \frac{700}{9} = \frac{700}{9}.$$

En definitiva, a asignación proposta pola regra da media das asignacións para este problema é

$$\left(\frac{400}{9}, \frac{700}{9}, \frac{700}{9}\right).$$

A xeito de resumo, rematamos esta primeira aproximación a algunhas das regras de asignación cunha táboa que amosa as cantidades percibidas por cada demandante para cada un dos tres problemas propostos no libro do Talmud.

Cando *E = 100*

	Propor-cional	Ganancias igualitarias	Perdas igualitarias	Talmud	Chegadas aleatorias	Media das asignacións
Demanda 1 = 100	16,6667	33,3333	0	33,3333	33,3333	33,3333
Demanda 2 = 200	33,3333	33,3333	0	33,3333	33,3333	33,3333
Demanda 3 = 300	50	33,3333	100	33,3333	33,3333	33,3333

Cando $E = 200$

	Propor-cional	Ganancias igualitarias	Perdas igualitarias	Talmud	Chegadas aleatorias	Media das asignacións
Demanda 1 = 100	33,3333	66,6667	0	50	33,3333	44,4444
Demanda 2 = 200	66,6667	66,6667	50	75	83,3333	77,7778
Demanda 3 = 300	100	66,6667	150	75	83,3333	77,7778

Cando $E = 300$

	Propor-cional	Ganancias igualitarias	Perdas igualitarias	Talmud	Chegadas aleatorias	Media das asignacións
Demanda 1 = 100	50	100	0	50	50	50
Demanda 2 = 200	100	100	100	100	100	100
Demanda 3 = 300	150	100	200	150	150	150

2.2. AXIOMÁTICA E TEORÍA DE XOGOS

Unha vez repasadas as regras de repartimento básicas dos problemas de demandas, cabe preguntarse que principios básicos sustentan cada unha delas. Un axioma é unha propiedade que sería desexable que tivese un método de repartición. Por exemplo, parece razoable pedir que dous individuos que demandan o mesmo reciban o mesmo. Neste caso diremos que a regra é *simétrica*. Outra propiedade vai na liña dos dereitos mínimos que ten cada demandante antes de repartir. Unha regra satisfai *dereitos mínimos* se nun primeiro paso asigna eses dereitos e logo reparte o restante. Tamén podemos pensar que, se algunha das demandantes pide máis do que hai para repartir, podemos truncar tal demanda pola cantidade inicial. Fálase entón do axioma de *demandas irrelevantes* para as regras que reparten a cantidade inicial entre as demandas truncadas. A listaxe de axiomas que podemos definir é moi grande, e formulan ideas que recollen diferentes formas de xustiza, equidade, solidariedade. É moi interesante!

A clave está non só en se as regras satisfán os axiomas, senón tamén en saber que conxunto deles caracterizan as regras. É dicir, supoñamos que ti cres que hai un conxunto de axiomas que debe cumprir a regra para utilizala no teu problema; entón pode ocorrer que ou ben non hai ningunha regra nesas condicións, ou hai máis dunha, ou existe unha única regra con todos os requisitos. Neste último caso, falamos de que eses axiomas caracterizan a regra. Por poñer un exemplo, a regra concede e divide pódese caracterizar cos tres axiomas antes mencionados: simetría, dereitos mínimos e demandas irrelevantes. Ou sexa, a única regra de repartimento para dous ou dúas demandantes que satisfai as propiedades de simetría, dereitos mínimos e demandas irrelevantes é a regra concede e divide.

Finalizamos falando brevemente da teoría de xogos, unha disciplina iniciada durante a segunda guerra mundial co traballo de John von Neumann e Oskar Morgenstern. Grazas a ela mellorou enormemente a maneira de tomar decisións estratéxicas e tamén en cuestións de benestar social. No contexto de problemas de repartimento podemos asociar un xogo coalicional a cada problema de repartimento, de xeito que se pode calcular para cada subgrupo de demandantes ou coalicións o que levarían do estado inicial se todos os membros que non interveñen na coalición son atendidos exactamente co que piden. Deste maneira, podemos usar as solucións da teoría de xogos para o noso problema de repartimento. Hai diversas solucións, entre elas as máis coñecidas son o *core* do xogo, o valor de Shapley, o nucléolo e outra máis nova, o *core-center*. Pois ben, o valor de Shapley coincide co repartimento da regra das chegadas aleatorias, o nucléolo co repartimento da regra do Talmud e o *core-center* coa regra da media das asignacións.

2.3. APLICACIÓNS A PROBLEMAS DE ACTUALIDADE

Son moitas as aplicacións dos problemas de demandas a cuestións relacionadas co noso día a día. Imos referirnos a tres delas. A primeira é a repartición de escanos entre os distintos partidos políticos en función dos votos recibidos nun proceso electoral. Sen dúbida, este método de repartimento mantén pendentes as e os analistas nas noites electorais, polas implicacións que ten para formar os gobernos das nosas institucións democráticas. As dúas seguintes atinxen e preocupan non só aos gobernos dos países, senón a toda a poboación mundial: a distribución das emisións de gases de efecto invernadoiro e o repartimento de vacinas.

A repartición de escanos no noso sistema electoral

Tanto a distribución de representantes a cada circunscrición electoral en función da súa poboación coma a asignación de escanos aos partidos políticos en función dos votos recibidos son problemas de repartimento cunha particularidade moi especial respecto aos outros problemas que tratamos: os resultados teñen que ser números enteiros. Este feito (non poder asignar dous escanos e medio ou un oitavo de escano) condiciona a definición das regras de repartimento.

O método de repartición de escanos máis utilizado en Europa é o sistema D'Hondt, en lembranza do xurista belga Victor D'Hondt (1841–1901), que o presentou no ano 1878. A denominación técnica desta regra de repartimento enteiro é o método dos divisores naturais e, en realidade, foi introducido por Thomas Jefferson (1743–1826), terceiro presidente dos Estados Unidos de América, para repartir o número de representantes correspondente a cada un dos estados da unión na Cámara de Representantes dos Estados Unidos no ano 1794.

A forma de proceder é a seguinte. En cada circunscrición, ordénanse, de maior a menor, os votos obtidos polos partidos. A continuación, exclúense do repartimento todos os partidos que non acaden unha porcentaxe mínima dos votos válidos emitidos (todos agás os nulos).

Dependendo do tipo de elección, esta barreira oscila entre o 3 % nas eleccións xerais ao Parlamento español e o 5 % nas eleccións autonómicas ou municipais. Unha vez que temos a listaxe de partidos que superan a barreira mínima, aplícase o método D'Hondt: divídese o número de votos obtidos por cada partido entre os números naturais 1, 2, 3... ata alcanzar o número de escanos da circunscrición. Os escanos asígnanselles aos partidos que teñen os maiores cocientes nas divisións.

EXEMPLO

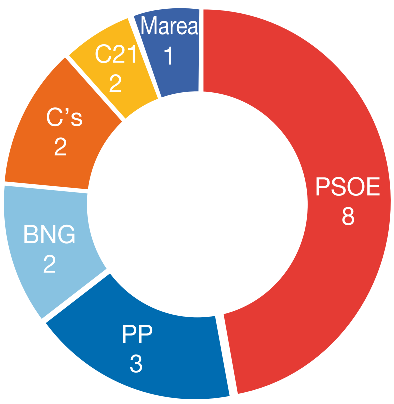
Consideremos as eleccións municipais de maio de 2019 no concello de Tui, ao que lle corresponden 17 escanos. Os resultados na noite electoral, no escrutinio inicial, foron os que se presentan na primeira fila da táboa que se mostra. Todos os partidos superaron o 5 % esixido. Ao facer as divisións das que falabamos antes, obteriamos os datos da seguinte táboa. En cor laranxa escura podedes ver os escanos que se repartirían e entre parénteses está a orde de asignación; por exemplo, o primeiro escano iría para o PSOE, dado que 4382 é o maior cociente das divisións.

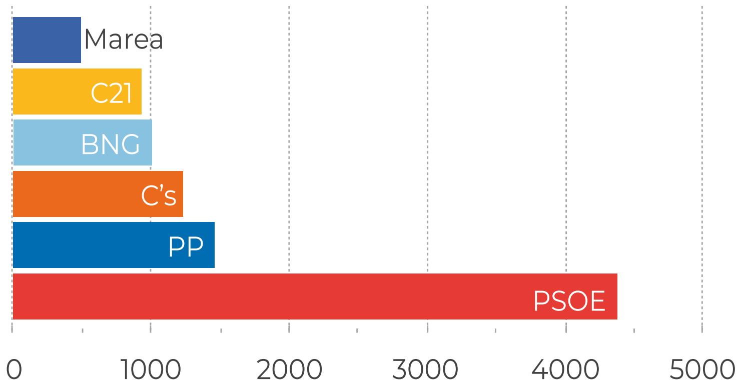
	PSOE	PP	C's	BNG	C21	Marea
1	**4382 (1)**	**1460 (4)**	**1241 (5)**	**1002 (7)**	**929 (8)**	**494 (16)**
2	**2191 (2)**	**730 (11)**	**621 (13)**	**501 (15)**	465	247
3	**1461 (3)**	487	414	334	310	165
4	**1096 (6)**	365	310	251	232	124
5	**876 (9)**	292	248	200	186	99
6	**730 (10)**	243	207	167	155	82
7	**626 (12)**	209	177	143	133	71
8	**548 (14)**	183	155	125	116	62
9	**487 (17)**	162	138	111	103	55

Repartindo deste xeito, o PSOE obtería 9 representantes, o PP, C's e o BNG terían 2, mentres que C21 e Marea quedarían con 1.

O dato curioso é que a xunta electoral, logo de revisar as reclamacións, considerou como válidos dous votos que inicialmente foran contados como nulos. Deste xeito, no reconto definitivo, concedeulles 1 voto máis tanto ao PP coma ao BNG. Ao calcular de novo polo método D'Hondt, o PP gaña un escano que perde o PSOE.

A distribución definitiva queda tal e como se describe no gráfico. Logo, ese ou esa representante decidiuse por un único voto. Un exemplo inmellorable para ilustrar que cada voto conta!





	PSOE	PP	C's	BNG	C21	MAREA
Votos	4382	1461	1241	1003	929	494

Aplicación á emisión de gases de efecto invernadoiro

Na vixésimo primeira Conferencia Internacional sobre Cambio Climático, organizada en París no ano 2015, os países integrantes da Convención Marco das Nacións Unidas sobre o Cambio Climático (CMNUCC) chegaron a un pacto histórico para combater o cambio climático e reducir o quecemento global. O denominado Acordo de París ten por obxectivos manter o aumento da temperatura global media por debaixo dos dous graos Celsius e esforzarse por limitar ese aumento a un grao e medio. No acordo recoñécese, ademais, que así descenderían de xeito moi significativo tanto o risco coma o impacto do cambio climático, e convense na necesidade de reducir a emisión á atmosfera de gases de efecto invernadoiro.

[redacted]

Agora ben, para acadar os obxectivos do Acordo de París, as emisións de CO_2 á atmosfera teñen que descender un 7,6 % cada ano ata 2030, no caso de querermos acadar o límite desexable dos 1,5 graos Celsius, ou un 2,7 %, de colocarmos o límite nos 2 graos.

Sexamos optimistas e pensemos que todos os esforzos van dirixidos a acadar o obxectivo dos 1,5 graos Celsius. Como repartimos entre os países ese descenso do 7,6 % anual das emisións de dióxido de carbono? Posto que a cantidade de CO_2 enviada á atmosfera se pode medir en, por exemplo, quilotoneladas (kt), unha solución pode ser considerar a cuestión como un problema de demandas, establecendo como cantidade inicial o número *E* de quilotoneladas dispoñibles e como demandantes os diferentes países. O ano 2014 é o último do que puidemos obter datos completos das emisións, polo que tomaremos estas como as correspondentes tamén ao ano 2020. A xeito de exemplo, tan só colleremos as seis rexións do mundo que máis CO_2 emitiron nese ano: a China, os Estados Unidos, a India, a Unión Europea, o resto do continente asiático e Rusia. Un traballo máis elaborado consideraría un recubrimento de toda a Terra por rexións. As emisións correspondentes a estas seis zonas recóllense na seguinte táboa:

	China	Estados Unidos	India	Unión Europea	Resto de Asia	Rusia
Emisións (en kt)	10 291 926	5 225 412	2 232 729	2 095 334	1 848 538	1 736 984

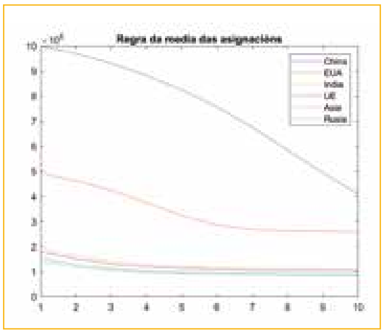
Así pois, o número total de quilotoneladas de dióxido de carbono enviadas á atmosfera nesas seis rexións en 2020 foi de 23 430 923. Se desexamos reducir nun 7,6 % esa cantidade durante 2021, o total de emisións permitidas para este ano descende ata, aproximadamente, as 21 650 173 kt. Se, como é de supoñer, cada un deses seis territorios solicita poder seguir emitindo a mesma cantidade de CO_2 ca no ano anterior, estamos diante dun problema de demandas no que E = 21 650 173 kt, as entidades demandantes son cada un dos seis territorios e o vector de demandas é o formado polas cantidades recollidas na anterior táboa. Para este problema de demandas, cada unha das regras introducidas anteriormente proporcionaranos un vector no que se recollen as asignacións de emisións recomendadas para cada zona, para o ano 2021. Cada unha das columnas da táboa seguinte é o vector das asignacións proposto polas seis regras que definimos para o problema en cuestión.

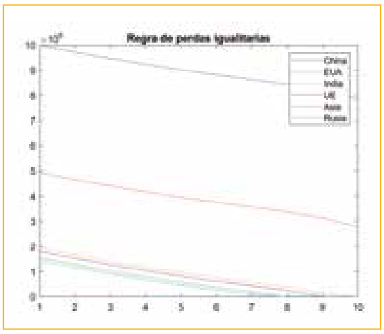
	Proporcio-nal	Ganancias igualitarias	Perdas igualitarias	Talmud	Chegadas aleatorias	Media das asignacións
China	9 509 740	8 511 176	9 995 134	9 995 134	9 993 675	9 995 134
Estados Unidos	4 828 281	5 225 412	4 928 620	4 928 620	4 927 161	4 928 620
India	2 063 042	2 232 729	1 935 937	1 935 937	1 934 478	1 935 937
Unión Europea	1 936 089	2 095 334	1 798 542	1 798 542	1 797 083	1 798 542
Resto de Asia	1 708 049	1 848 538	1 551 746	1 551 746	1 550 287	1 551 746
Rusia	1 604 973	1 736 984	1 440 192	1 440 192	1 447 487	1 440 192

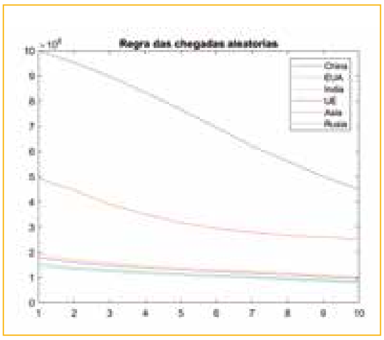
Se as rexións respectan o acordado, cumprirase o obxectivo para o primeiro ano. Porén, o acordo é moito máis ambicioso e esixe que, no ano 2022, as emisións sexan, máis unha vez, un 7,6 % inferiores ás do ano 2021. Así a cousa, temos que resolver un novo problema de demandas onde, nesta ocasión, E=20 047 759,82 kt (o 92,4 % de 21 650 173) e o vector de demandas é o mesmo ca o do problema inicial. Analogamente, cada unha das regras descritas dará un vector de asignacións que nos indicará cales deberían ser as emisións de cada unha desas rexións no ano 2022.

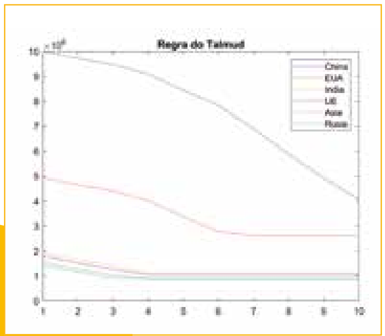
Continuando con este proceso nos restantes anos, e resolvendo de cada vez o correspondente problema de demandas, cada unha das seis zonas terá coñecemento de cal é a cantidade máxima de gas que pode enviar cada ano á atmosfera para, así, cumprir co Acordo de París. Fixádevos en que, para o ano 2030, a cantidade total máxima de dióxido de carbono permitida descendeu ata os 10 629 408 kt. De respectaren o pactado, cumpriranse os obxectivos do Acordo de París.

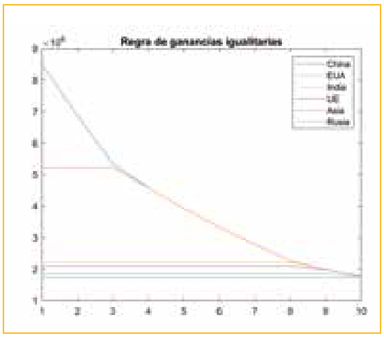
Nas seguintes gráficas vemos a evolución das emisións de CO_2 permitidas a cada rexión en función da regra de repartimento elixida para resolver o problema. Observade que no eixe *X* están os dez anos: comeza en 2021 e remata en 2030.

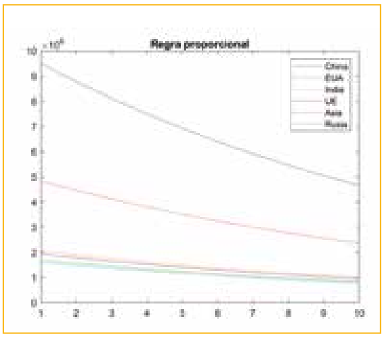












Asemellanse? Sen fixarse moito vemos que a gráfica da regra das ganancias igualitarias é moi distinta das outras. Lembrade que mesmo pequenas diferenzas poden ser determinantes para conseguir os obxectivos.

Tal e como avanzamos ao principio desta unidade, os repartimentos propostos non son, en xeral, igualmente aceptados por todas as entidades demandantes. Neste caso particular, observando as gráficas, deducimos que a evolución nas emisións permitidas aos diferentes países é ben diferente segundo a regra de repartimento elixida, e a escolla dunha ou outra regra para resolver o problema dependerá, seguramente, tanto de intereses económicos coma do tipo de política medioambiental coa que se traballe.

Unha análise rápida dos resultados deixa ver que, por exemplo, no caso da regra das perdas igualitarias, a India, a Unión Europea, Asia e Rusia xa non poderían emitir CO_2 no ano 2030, mentres que a China e os Estados Unidos poderían seguir enviando á atmosfera unha gran cantidade deste gas de efecto invernadoiro durante ese ano. É de imaxinar que este repartimento non vai ser do agrado de todos os países e, polo tanto, o máis lóxico parece ser descartar esta regra. Observamos tamén que a regra das ganancias igualitarias lles permite á India, á Unión Europea, a Asia e a Rusia seguir emitindo as mesmas cantidades de CO_2 durante os dez anos e só lles esixe esforzos á China e a Rusia, polo que tampouco parece esta unha regra aceptable por todas as partes en conflito.

O resto das regras de repartimento semellan presentar un comportamento similar e calquera das catro pode parecer axeitada para resolver o problema. Así e todo, cómpre subliñar unha diferenza importante entre elas: a regra proporcional e a regra das chegadas aleatorias permítenlles á China e aos EUA emitir no ano 2030 máis cantidade de dióxido de carbono da que lles autorizan a regra do Talmud e a regra da media das asignacións, mentres que a regra proporcional e a regra das chegadas aleatorias son máis esixentes coas rexións menos contaminantes. Así pois, dependendo de a que países se lles queira impoñer un esforzo maior, escolleremos unha ou outra desas catro regras para facer a asignación final: se entendemos que son os países máis contaminantes os que máis esforzos teñen que realizar, usaremos a regra do Talmud ou a regra da media das asignacións, mais se, por seren economicamente máis poderosos, finalmente se é máis permisivo con eles e se lles esixe un menor esforzo, empregarase para a repartición a regra proporcional ou a regra das chegadas aleatorias.

Aplicación ao repartimento de vacinas

A crise orixinada pola pandemia do coronavirus (covid–19) orixinou novas situacións nas que se ha repartir un ben escaso entre diferentes demandantes. Así ocorre, por exemplo, co repartimento de vacinas que estamos vivindo nestes días. Polo de agora non hai vacinas abondo para toda a poboación mundial, e a decisión de a quen lle dar as doses existentes é un problema moi importante de cara a controlar a enfermidade.

Evidentemente, este problema afecta a calquera rexión do mundo, pero ímolo expoñer dende a perspectiva de España. A este país chega cada semana unha cantidade de vacinas para distribuílas entre as 17 comunidades autónomas, Ceuta e Melilla. Estes territorios solicítanlle ao goberno central as vacinas necesarias para inmunizaren a súa poboación e, como non é factible co número de doses dispoñibles vacinar toda a xente, o Goberno ten que decidir cantas lle envía a cada comunidade.

Formularemos o problema dende dous puntos de vista. No primeiro deles imos supoñer que cada comunidade demanda unha cantidade de vacinas igual á súa poboación. Cando lle cheguen as doses, o goberno autonómico decidirá a quen vacinar primeiro. Deste xeito, cada semana, o goberno central terá un problema de repartimento onde se corresponderá coa cantidade de vacinas que acaba de recibir e o vector de demandas será un vector coa poboación de cada comunidade. Dependendo da estratexia de vacinación do goberno central, aplicarase unha regra ou outra e o proceso rematará cando os 19 territorios dispoñan de vacinas para toda a poboación.

Outro punto de vista consiste en ter en conta grupos de poboación de vacinación preferente. Como é ben sabido, debido a diferentes factores de risco, hai persoas que se han vacinar antes ca outras e esta situación pode considerarse á hora de facer o repartimento. O primeiro grupo de risco é o formado polas e polos conviventes nas residencias de persoas maiores. En vez de repartir as vacinas en función da poboación total, o Estado pode decidir levar a cabo unha primeira distribución en función da poboación que viva nese tipo de residencias, polo que cada rexión demandará esa cantidade de vacinas. Unha vez vacinado ese grupo, teríase en conta o segundo en importancia e cada comunidade cambiaría as súas demandas iniciais por unhas novas que se corresponderían coa poboación pertencente a este segundo fatado. E seguiríase así ata inmunizar a totalidade da poboación. Facendo o repartimento deste xeito, conseguiríase que non houbese comunidades onde se vacinase xente de entre 30 e 50 anos, mentres que noutras aínda quedase poboación maior sen recibir a súa dose.

Así pois, cada semana, o goberno central terá un problema de repartimento no que *E* se corresponde coa cantidade de vacinas dispoñibles para eses sete días e o vector de demandas cambiará en función de a que grupo corresponda vacinar. Isto beneficiaría comunidades máis envellecidas, como Galicia, que teñen máis risco ca outras nas que a poboación é máis nova.

Unha vez delimitado o problema, o seguinte paso é resolvelo coas diferentes regras e decidir cal é a máis axeitada para tal situación. Como non coñecemos o número de vacinas que van chegar semanalmente, imos supoñer que é un número constante: a media do número de vacinas que chegaron ata o de agora.

Para o primeiro dos supostos, onde as demandas son sempre as mesmas, resolvendo o problema coa regra das perdas igualitarias conséguese ter inmunizada a poboación das comunidades grandes antes ca a poboación das máis pequenas, que teñen que agardar moito máis. Porén, como cabería esperar, se resolvemos coa regra das ganancias igualitarias, temos o resultado inverso: conséguese a inmunidade antes para as comunidades pequenas e son as grandes as que deben de agardar. Co resto de regras, os cambios son pouco significativos e consegue a inmunidade todo o territorio case ao mesmo tempo.

Se temos en conta os grupos prioritarios de vacinación, o comportamento das regras é o mesmo ca o exposto no parágrafo anterior. É dicir, remataríamos primeiro coas comunidades pequenas se usamos a regra das ganancias igualitarias, ou coas máis grandes de empregarmos a regra das perdas igualitarias; o proceso finalizaría ao mesmo tempo de elixirmos calquera das outras regras. Agora ben, se queremos inmunizar en primeiro lugar os grupos de risco, non serve darlle prioridade a unha comunidade por ter menos habitantes xa que, ao ter só vacinado un fatado, non se conseguiría a inmunidade de rabaño. Semella, pois, lóxico repartir as vacinas entre as comunidades de xeito proporcional á poboación de cada grupo de risco. Unha vez feito iso, cando xa só quede por vacinar a poboación non considerada de risco, sería factible volver usar o razoamento do parágrafo anterior e repartir as vacinas mediante a regra das perdas igualitarias para acadar a inmunidade de rabaño por zonas, o que permitiría volver á normalidade en certos territorios.

Na actualidade, as vacinas estanse a repartir de xeito proporcional á poboación total de cada comunidade e, despois, cada goberno autonómico decide que grupos de risco inmunizar. Este exemplo serve de mostra para reflexionar sobre as implicacións que pode ter o criterio de repartimento elixido, e tamén que as circunstancias que rodean o problema condicionan a elección da regra máis axeitada en cada momento.

3. ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

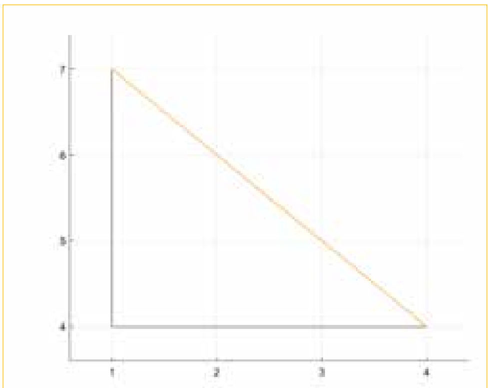
ACTIVIDADE 1

Introdución	O problema do repartimento da túnica consiste en que dous homes demandan parte dunha túnica. Un deles demanda a metade, aínda que non é divisible, e o outro demanda a peza de roupa enteira.
Tarefa	Que se che ocorre facer para dividir a peza de roupa? Que división proporías segundo o teu propio criterio? Formula o correspondente problema de repartimento e describe o conxunto de asignacións. Calcula o repartimento recomendado polas diferentes regras e compara esas asignacións coa que ti propuxeches. Cal das regras che parece máis axeitada para repartir?
Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Empregar unha linguaxe matemática básica para formalizar ideas. » Inventar solucións para problemas e defendelas en público.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa.
Outras actividades posibles	» Comprobar os propios resultados cos do resto de compañeiras e compañeiros e cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems » Procurar exemplos de problemas de repartimentos nos que o ben inicial non sexa divisible.

ACTIVIDADE 2

Introdución	Segundo o criterio inicial que establezamos para repartir o ben inicial do que se dispón, empregaremos un tipo de repartición ou outro.
Tarefa	Supoñamos que se trata de repartir 6000 euros de beneficios entre tres traballadores ou traballadoras dunha empresa. Se o tempo que levan traballando na empresa é de 2, 3 e 6 anos, cal sería o repartimento se decidimos asignar o beneficio proporcionalmente á antigüidade na empresa? De querermos repartir os beneficios tendo en conta o número de erros que os traballadores ou traballadoras cometeron ao longo do último ano, parece máis razoable pensar nunha repartición inversamente proporcional. Se, poñamos por caso, cometeron 2, 3 e 6 erros, respectivamente, cal sería a asignación final?
Obxectivos	» Mellorar a comprensión do principio de proporcionalidade directa e inversa. » Reafirmar o principio de proporcionalidade estudado nos cursos da ESO para relacionalo con outras formas de repartimento. » Empregar unha linguaxe matemática básica para formalizar ideas.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	15 minutos.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa.

ACTIVIDADE 3

Introdución	A partir da representación gráfica do conxunto de asignacións recuperamos moitísima información sobre o correspondente problema de demandas.
Tarefa	Que número de demandantes ten o problema cuxo conxunto de asignacións amosa en cor amarela a figura? Canto vale cada unha das demandas? Cal é o valor da cantidade inicial *E*?  Describe coas túas propias palabras o conxunto de asignacións e tenta expresar tal conxunto de maneira formal. Propón razoadamente unha solución para este problema de demandas e discute a súa idoneidade co resto de estudantes da clase. Comparade as vosas propostas coas asignacións recomendadas polas regras introducidas na unidade didáctica.
Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Empregar unha linguaxe matemática básica para formalizar ideas. » Inventar solucións para problemas e defendelas en público.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa.
Outras actividades posibles	Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R-project.org/package=ClaimsProblems

ACTIVIDADE 4

Introdución	Pode ocorrer que diferentes problemas de demandas teñan un mesmo conxunto de asignacións proxectado, o cal non significa que, necesariamente, a asignación proposta por unha determinada regra teña que ser a mesma para cada un deles. Como na actividade anterior, imos partir da representación gráfica (neste caso da proxección no plano) do conxunto de asignacións $X(E,d)$ e tentaremos imaxinar varios problemas de demandas que se correspondan cos datos proporcionados.
Tarefa	Que número de demandantes ten o problema cuxo conxunto de asignacións proxectado no plano amosa en amarelo a figura?  Describe coas túas propias palabras a proxección do conxunto de asignacións e tenta expresar tal conxunto de maneira formal. Canto vale a área dese polígono? Enuncia dous problemas de demandas cuxo conxunto $X(E,d)$ sexa, precisamente, o da figura. Podes conxecturar que características teñen en común todos os problemas de demandas que teñen como conxunto de asignacións o dado? Propón razoadamente unha solución para eses problemas e discute o axeitado delas co resto de estudantes da clase. Obtén, de dúas maneiras distintas, a asignación recomendada pola regra da media das asignacións.
Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Relacionar os conceptos aprendidos con outros de carácter xeométrico estudados nos cursos de matemáticas. » Ser capaz de conxecturar propiedades xerais a partir de casos particulares. » Empregar unha linguaxe matemática básica para formalizar ideas. » Inventar solucións para problemas e defendelas en público.

Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa, dos resultados obtidos e da capacidade de defensa en público deles.
Outras actividades posibles	Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems

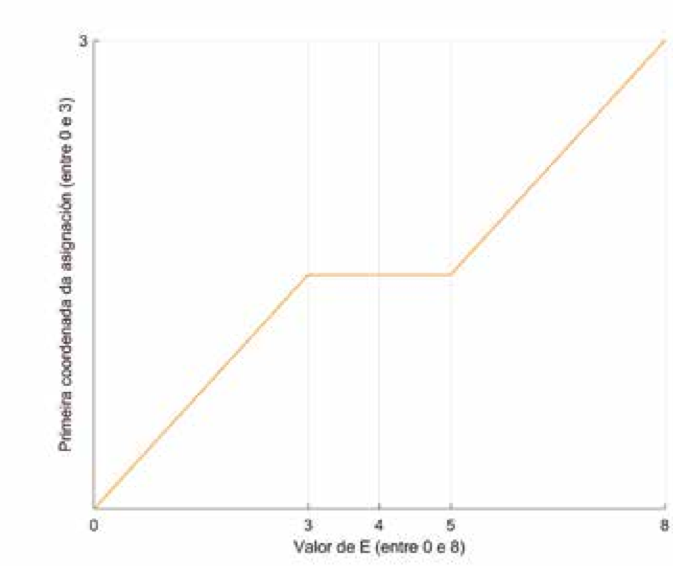
ACTIVIDADE 5

Introdución	Se o número de demandantes dun problema de demandas (E,d) é tres e, ademais, $d_1+d_2 \leq E \leq d_3$, entón a proxección no plano do conxunto de asignacións $X(E,d)$ é un rectángulo de lados d_1 e d_2. Se son catro as persoas demandantes e $d_1+d_2+d_3 \leq E \leq d_4$, a proxección de $X(E,d)$ en $\mathbb{R}^3$ é un paralelepípedo rectangular (ortoedro) de lados d_1, d_2 e d_3.
Tarefa	Bosquexa a proxección do conxunto de asignacións para o problema con $n = 3$, $E = 5$ e $d = (1, 2, 6)$ e repite o exercicio para o caso no que $n = 4$, $E = 10$ e $d = (2, 3, 5, 11)$. Propón de maneira razoada unha solución para cada un dos problemas e discute a súa idoneidade co resto de estudantes da clase. Comparade as vosas propostas coas asignacións recomendadas pola regra do Talmud, pola regra das chegadas aleatorias e pola regra da media das asignacións. Tenta conxecturar cales son as solucións propostas por estas tres regras para problemas cun número calquera de demandantes e nos que a cantidade inicial para repartir E é un número maior ou igual ca a suma de todas as demandas menos a maior e menor ou igual ca a maior delas.
Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Relacionar os conceptos aprendidos con outros de carácter xeométrico estudados nos cursos de matemáticas. » Ser capaz de conxecturar propiedades xerais a partir de casos particulares.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa, dos resultados obtidos e da capacidade de defensa en público deles.
Outras actividades posibles	Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R-project.org/package=ClaimsProblems

ACTIVIDADE 6

Introdución	Unha variación no valor da cantidade inicial pode afectar tanto á forma coma á medida (área ou volume) do conxunto de asignacións.
Tarefa	Consideremos o vector de demandas $d = (4, 6, 9)$. Bosquexa a proxección no plano do conxunto de asignacións para os problemas con $E = 2$, $E = 5$, $E = 7$, $E = 10$ e $E = 12$. Cales son os vértices de cada un deses conxuntos? Cal é o valor da área do polígono obtido en cada caso? Onde está situado o centro de masas de cada unha das figuras? Que podes conxecturar sobre a variación da cantidade asignada a cada demandante pola regra da media das asignacións ao ir aumentando o valor de E?
Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Relacionar os conceptos aprendidos con outros de carácter xeométrico estudados nos cursos de matemáticas. » Ser capaz de conxecturar propiedades xerais a partir de casos particulares. » Empregar unha linguaxe matemática básica para formalizar ideas.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora e media.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa, dos resultados obtidos e da capacidade de defensa en público deles.
Outras actividades posibles	Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems

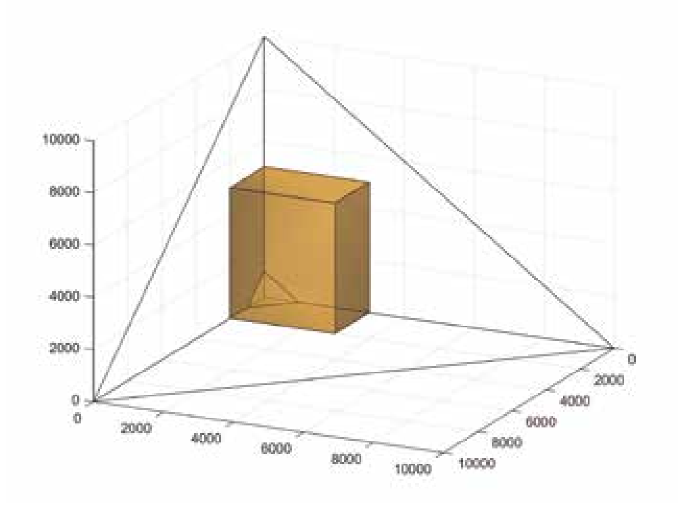
ACTIVIDADE 7

Introdución	Algunhas das propiedades para as regras están relacionadas coa variación dalgúns dos parámetros que definen o problema (da cantidade inicial, dalgunha das demandas ou, mesmo, do número de demandantes). Son propiedades de monotonía. Obviamente, para un mesmo vector de demandas *d*, a asignación proposta polas distintas regras para cada demandante dependerá do valor da cantidade inicial *E*. Que ocorre se, por exemplo, aumenta o valor de *E*? Hai algunha relación entre as asignacións propostas por unha determinada regra antes e despois de tal cambio?
Tarefa	Consideremos o vector de demandas $d = (3, 5)$. Para podermos falar dun problema de demandas, *E* ten que ser maior ou igual ca cero e menor ou igual ca a suma de todas as demandas. É dicir, *E* ten que variar entre 0 e 8. Podemos pensar cada unha das coordenadas do vector de asignacións proposto por calquera regra como unha función de *E*. Por exemplo, a primeira das persoas demandantes recibirá, segundo a regra concede e divide, unha cantidade entre 0 e 3. Para os infinitos valores de *E* entre 0 e 8, esa cantidade está representada na seguinte gráfica  Bosquexa a gráfica que representa a cantidade asignada pola regra concede e divide á segunda demandante para cada valor de *E* entre 0 e 8. Á vista das dúas gráficas, que podes avanzar sobre a variación do que lle corresponde a cada peticionaria/o a medida que o valor da cantidade inicial da que se dispón aumenta?

Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Relacionar os conceptos aprendidos con outros de carácter xeométrico estudados nos cursos de matemáticas. » Ser capaz de conxecturar propiedades xerais a partir de casos particulares. » Empregar unha linguaxe matemática básica para formalizar ideas.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa, dos resultados obtidos e da capacidade de defensa en público deles.
Outras actividades posibles	» Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: » https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems » Empregar esa mesma libraría para explorar o comportamento do resto de regras diante do aumento da cantidade dispoñible *E*.

ACTIVIDADE 8

<table>
<tr>
<td>Introdución</td>
<td>Unha regra de repartimento pode interpretarse como unha maneira «desexable» para as persoas demandantes de dividiren unha certa cantidade inicial E que non abonda para compracer todos os pedimentos. Como é de supoñer, aceptar de mellor ou de peor grado a repartición asignada por unha ou outra regra dependerá das circunstancias nas que se atopen as demandantes no momento de se levar a cabo. Así pois, decidir que regra empregar en cada situación convértese nunha cuestión de especial importancia.</td>
</tr>
<tr>
<td>Tarefa</td>
<td>Supoñamos que un taller de reparación de automóbiles, con catro persoas empregadas, está en bancarrota. Tanto polo labor realizado coma polo tempo traballado na empresa, a cantidade para percibir como indemnización por cada integrante do cadro de persoal é diferente: a persoa encargada do taller tería que recibir 14 000 euros, mentres que as outras tres deberían de cobrar 5000, 3000 e 2000 euros, respectivamente. Para pagarlle as indemnizacións ao persoal, o taller só dispón de 15 000 euros. Que cantidade lles asigna aos catro membros do persoal cada unha das cinco primeiras regras descritas na unidade?
Comproba que a proxección no espazo do conxunto de asignacións do problema é a seguinte:



Cal é o volume do conxunto de asignacións proxectado? Emprega a representación anterior para calcular a cantidade proposta pola regra da media das asignacións.
Se o taller fose da túa propiedade, cal deses repartimentos elixirías ti para satisfacer as demandas das empregadas e empregados?</td>
</tr>
</table>

Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Relacionar os conceptos aprendidos con outros de carácter xeométrico estudados nos cursos de matemáticas. » Gañar habilidade cos cálculos matemáticos. » Entender as diferenzas conceptuais entre as regras. » Ser capaz de tomar unha decisión en función das ideas individuais.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Dúas horas.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e discutir a solución acadada co resto do alumnado.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, libros con contidos básicos de matemáticas e a reflexión.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa, dos resultados obtidos e da capacidade de defensa en público deles.
Outras actividades posibles	Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems

ACTIVIDADE 9

Introdución	O repartimento de bens indivisibles (cantidades enteiras) ten un tratamento matemático distinto dos problemas de demandas xerais. A adxudicación de escanos a partidos políticos en función dos votos recibidos nun proceso electoral é unha destas situacións. Nesta unidade resaltamos a importancia que pode ter un só voto na elección de representantes a un órgano de goberno.
Tarefa	Con axuda dunha folla de cálculo resolve a repartición de escanos do concello de Tui no ano 2019.
Obxectivos	» Mellorar a comprensión dos conceptos expostos na unidade didáctica. » Entender o método D'Hondt.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Unha hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía e ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade, leis electorais publicadas no DOG e no BOE, páxinas web con datos de eleccións autonómicas, estatais...
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa, dos resultados obtidos e da capacidade de defensa en público deles.
Outras actividades posibles	» Procurar os datos precisos para resolver a repartición de representantes dos distintos partidos no teu concello nas últimas eleccións municipais. Comprobar que os teus resultados son os correctos. » Buscar na lei electoral vixente como se efectúa a asignación de representantes no parlamento (galego ou español) ás circunscricións electorais (provincias) en función da súa poboación. » Buscar outros métodos de repartimento de escanos, distintos do método D'Hondt, usados noutros países.

ACTIVIDADE 10

Introdución	Nun problema, os aspectos que non son matemáticos tamén inflúen á hora de decidir que método de repartimento se escolle. Velaquí un par de exemplos: » Primeiro problema. Tres executivas dunha empresa cobran unha prima mensual de 1500, 2000 e 2500 euros, respectivamente. A crise económica obriga a empresa a reducir este tipo de incentivos salariais. Se a empresa dispón de 4500 euros para pagar as gratificacións das tres, canto cres que debería recibir cada unha? » Segundo problema. Tres xubiladas reciben unha pensión mensual de 1500, 2000 e 2500 euros, respectivamente. A crise demográfica obriga o goberno a reducir as pensións. Se dispón dun total de 4500 euros para pagar a pensión das tres, canto cres que debería recibir cada unha?
Tarefa	Propón un repartimento para cada un dos casos e compara a túa resposta coas asignacións suxeridas polas regras estudadas.
Obxectivos	» Comparar os repartimentos dos individuos sen formación no tema cos propostos polas diferentes regras. » Analizar se o contexto do propio problema condiciona a forma de repartir.
Curso/idade	Alumnado de educación secundaria obrigatoria.
Duración	Media hora.
Disciplinas implicadas	Matemáticas, economía, ciencias sociais.
Metodoloxía de traballo	Resolver individualmente o problema proposto e comparar coas asignacións das principais regras.
Fontes de información	A información proporcionada nas anteriores seccións da unidade.
Avaliación	Valoración da implicación do alumnado na tarefa.
Outras actividades posibles	» Pensar noutros enunciados posibles e propoñer novos problemas sen cambiar as demandas nin o total para repartir. » Analizar se o alumnado elixe coherentemente a mesma regra de repartimento para resolver unha listaxe de problemas con diversas demandas e recurso inicial. » Comprobar os propios resultados e os do resto de compañeiras e compañeiros cos obtidos empregando o software libre da libraría de R denominada ClaimsProblems, dispoñible en: https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems

4. GLOSARIO

Asignación: cantidade que se recibe despois do proceso de repartimento.

Axioma: afirmación tan evidente e clara que é admitida sen necesidade de demostración. No contexto dos problemas de demandas é a expresión matemática dunha intuición que temos sobre como unha regra debe comportarse ante un determinado tipo de situacións.

Bancarrota: creba producida nunha empresa que deixa débedas pendentes.

Baricentro: punto de intersección das medianas dun triángulo.

Centro de masas: punto xeométrico dun conxunto que recolle todo o seu comportamento dinámico.

Centroide: centro de masas cando sobre o conxunto se considera unha densidade uniforme.

Dereitos mínimos: cantidades que lles corresponden ás demandantes de seren atendidas todas as peticións do resto.

Demandante: persoa ou ente a quen se lle debe certa cantidade.

Escano: lugar ocupado por un membro dun parlamento.

Media: valor dunha serie de magnitudes que serve para representar o conxunto.

Modelo matemático: forma matemática de describir un problema para analizalo.

Poliedro: corpo sólido limitado por caras poligonais.

Proporción: relación que existe entre un elemento e o total dun conxunto.

Regra de asignación: procedemento para dividir a cantidade inicial entre as e os demandantes nun problema de repartimentos.

Repartimentos enteiros: solucións enteiras (sen decimais) para problemas nos que non é posible dividir os recursos para repartir.

Segmento: parte dunha recta comprendida entre dous puntos.

Sistema D'Hondt: método para asignarlles escanos a partidos políticos en función dos votos recibidos nunhas eleccións.

Teoría de xogos: área das matemáticas que tenta, entre outras cousas, modelar e estudar determinadas situacións tratándoas como un problema de carácter xeral e propoñendo solucións matemáticas (por exemplo, propostas de repartición no caso de problemas de demandas) que posúan certas propiedades razoables e xustas.

Xogo coalicional: forma matemática de modelar problemas nos que a cooperación entre axentes é determinante.

5. REFERENCIAS

Binmore, K. (2007). *La teoría de juegos. Una breve introducción*. Alianza Editorial.

Dieudonné, F. (2020). *Matemáticas para todos: Teoría de juegos*.

Fernández García, F. R. e Puerto Albandoz, J. (2011). *Introducción a las probabilidades: juegos de azar*. Estalmat Andalucía. Dispoñible en: https://thales.cica.es/~estalmat/ACT/SESIONES/Curso–10–11/Veteranos/Sesion–04–Segundo/Juegos_Azar_VETERANOS–Segundo–1011.pdf.

Núñez Lugilde, I.; Mirás Calvo, M. A.; Quinteiro Sandomingo, C. e Sánchez Rodríguez, E. (2021). *ClaimsProblems: Analysis of Conflicting Claims*. R package version 0.1.0. Dispoñible en: https://CRAN.R–project.org/package=ClaimsProblems.

Stewart, I. (2012). *Como cortar un pastel* (trad. A. Chaparro). Editorial Crítica.

Thomson, W. (2019). *How to divide when there isn't enough. From Aristotle, the Talmud, and Maimonides to the axiomatics of resource allocation*. Cambridge University Press.

6. O NOSO EQUIPO INVESTIGADOR

Somos Miguel A. Mirás Calvo, Iago Núñez Lugilde, Carmen Quinteiro Sandomingo e Estela Sánchez Rodríguez, persoal docente e investigador da Universidade de Vigo con formación en diversas especialidades matemáticas: álxebra, análise matemática e estatística e investigación operativa. O noso actual traballo de investigación desenvólvese fundamentalmente no campo da teoría de xogos. Estudamos a xeometría, as propiedades matemáticas das solucións e algoritmos para o seu cálculo, co obxectivo de mellorar o seu coñecemento e axudar na toma de decisións en problemas complexos. Somos autores de varios artigos especializados relacionados co tema tratado nesta guía. Nun deses artigos estudamos a regra da media das asignacións, proposta por nós. Descubrir as propiedades que cumpre e achar formas de cálculo eficiente non está sendo unha tarefa doada mais, como adoita ocorrer, o difícil sempre resulta máis gratificante.

EN GALEGO!

Investigación e divulgación científica

Área de Normalización Lingüística
Universidade de Vigo

9 788412 302868