MATEMÁTICAS ACADÉMICAS

3ºESO

IES AGRA DE RAÍCES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BLOQUE 2: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

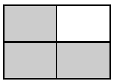
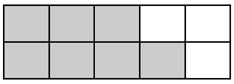
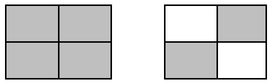
2.1. Números Racionales.

Una **Fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ donde ***"a"*** es el numerador y ***"b"*** es el denominador. "a" y "b" son siempre números enteros y $b \neq 0$.

El denominador indica el número de partes en las que dividimos la unidad, y el numerador indica el número de esas partes que tomamos.

Ejercicios:

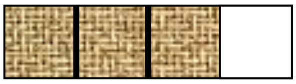
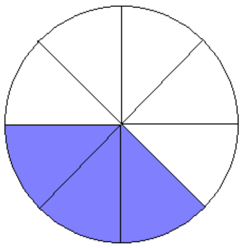
1. Indica la fracción que corresponde a cada dibujo:

2. Representa mediante un dibujo las siguientes fracciones:

a. $\frac{3}{8}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{5}{6}$ d. $\frac{14}{6}$

3. Indica la fracción que corresponde a cada uno de los dibujos siguientes:


4. Representa en la recta real las siguientes fracciones:

a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{5}{4}$ c. $\frac{3}{7}$ d. $\frac{11}{3}$

5. Indica, utilizando la definición de fracción:
    a. ¾ de 1600€
    b. 2/5 de 300 kilos
    c. 4/7 de 210 personas

Fracciones Propias e Impropias:

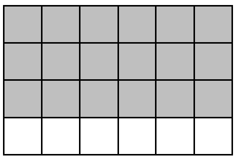
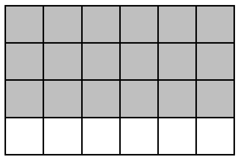
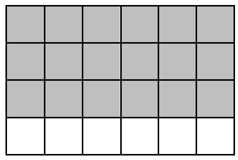
Una fracción se dice que es propia cuando representa una parte de la unidad, y se dice que es impropia si representa más de la unidad.

Ejercicio:

6. Indica cuáles de las siguientes fracciones son Propias y cuáles son Impropias:

$$\frac{3}{5} \;;\; \frac{7}{3} \;;\; \frac{9}{4} \;;\; \frac{5}{8} \;;\; \frac{55}{90} \;;\; \frac{200}{30}$$

Dos fracciones se dice que son **equivalentes** cuando representan la misma cantidad

Ejemplo: $\frac{3}{4}$  ; $\frac{6}{8}$  ; $\frac{9}{12}$ 

Propiedad: Dos fracciones , $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se dicen que son equivalentes si se cumple que: **a·d = b·c**

Ejercicio:

7. Comprueba si son equivalentes los siguientes pares de fracciones:

$$\frac{2}{3} \; y \; \frac{3}{4} \;;\qquad \frac{3}{5} \; y \; \frac{9}{15} \;;\qquad \frac{1}{3} \; y \; \frac{3}{9} \;;\qquad \frac{2}{7} \; y \; \frac{3}{10}$$

8. Indica cuáles de las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{24}{9}, \frac{40}{15}, \frac{6}{15}, \frac{3}{7}, \frac{6}{10} \; y \; \frac{6}{14}$$

Una fracción se dice que es **irreducible** cuando el numerador y el denominador no tienen divisores comunes, es decir, cuando no se puede simplificar.

Ejercicio:

9. Indica la fracción irreducible equivalente a cada una de las siguientes fracciones: $\frac{24}{30}$, $\frac{105}{315}$ y $\frac{27}{25}$
10. Indica cuatro fracciones cuyo denominador sea 24 y que sean equivalentes a las siguientes fracciones: $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{8}\ y\ \frac{5}{6}$
11. Indica razonadamente el resultado de $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\frac{5}{6}=$
12. Indica tres fracciones cuyo denominador sea 100 y que sean equivalentes a las siguientes fracciones: $\frac{3}{4}, \frac{40}{50}\ y\ \frac{5}{25}$
13. Indica razonadamente el resultado de $\frac{3}{4}+\frac{40}{50}+\frac{5}{25}=$

Propiedad: Para poder sumar o restar fracciones debemos obtener antes fracciones equivalentes que tengan todas el mismo denominador, lo que se conoce como **Reducir a Común Denominador**.

Ejercicio:

14. Realiza las siguientes operaciones:
    a. $\frac{3}{15}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}=$
    b. $\frac{7}{21}-\frac{3}{14}+\frac{1}{18}=$
15. Demuestra razonadamente y mediante un dibujo que:
    a. $\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{2}{4}$
    b. $\frac{1}{4}\div 3=\frac{1}{12}$
    c. $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$
    d. $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{12}$

Propiedad:

a. El **producto de dos o más fracciones** es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores anteriores y cuyo denominador es el producto de los denominadores anteriores: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f}=$

b. Para **dividir dos fracciones** se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda fracción: $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

16. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones:

a. $\frac{5}{4}+\frac{3}{8}=$

b. $\frac{7}{3}-\frac{9}{10}=$

c. $\frac{4}{10}+\frac{3}{15}=$

d. $\frac{2}{8}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}=$

e. $\frac{5}{7}+\frac{3}{7}-\frac{4}{7}=$

f. $\frac{2}{3}+\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=$

g. $2+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=$

h. $\frac{8}{10}-\frac{1}{25}+\frac{4}{15}=$

17. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones, simplificando el resultado:

a. $\frac{2}{5}\bullet\frac{4}{6}=$

b. $\frac{8}{3}\div\frac{6}{4}=$

c. $3\bullet\frac{2}{5}=$

d. $8\div\frac{1}{2}=$

e. $\frac{5}{7}\bullet 9=$

f. $\frac{1}{4}\div\frac{3}{9}=$

g. $\frac{5}{12}\div 3=$

h. $\frac{2}{5}\div\left(\frac{4}{5}\bullet\frac{1}{2}\right)=$

i. $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\right)\div\left(\frac{5}{7}-\frac{2}{7}\right)=$

j. $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\div 4+\frac{3}{4}\bullet\frac{-3}{2}=$

18. Realiza las siguientes operaciones combinadas de fracciones simplificando el resultado:

a. $\frac{2}{3}\bullet\frac{1}{5}+\frac{4}{10}=$

b. $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}=$

c. $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)\bullet\frac{5}{2}-\frac{7}{12}=$

d. $\frac{3}{2}\bullet\frac{4}{5}+\frac{7}{5}-\frac{3}{2}\div\frac{5}{2}=$

e. $\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\right)+\frac{4}{15}=$

f. $\frac{4}{5}+2-\frac{1}{3}\bullet\left(\frac{4}{5}-3\right)=$

19. Realiza las siguientes operaciones, simplificando el resultado:

a. $3\bullet\frac{4}{5}+2=$

b. $\frac{3}{5}-\frac{1}{10}=$

c. $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)+5\bullet\frac{1}{2}=$

d. $5\div\frac{15}{2}-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)=$

e. $\frac{3}{12}+5-\frac{5}{15}=$

f. $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{3}{2}\bullet\frac{4}{3}=$

g. $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\bullet\frac{5}{2}-\frac{4}{3}\div\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\right)+2-5\div\frac{3}{2}+\frac{52}{30}=$

Problemas con Fracciones:

20. Ana tiene 360 euros. El lunes se gasta $\frac{3}{5}$ partes en un teléfono móvil. El martes se gasta $\frac{1}{3}$ de lo le quedaba en un videojuego. ¿Cuánto dinero le quedó? Indica razonadamente todos los pasos.

21. Un ayuntamiento dispone de un terreno de 15.000 metros cuadrados para construir un parque. Se sabe que el 40% del terreno se dedicará a zonas deportivas, $\frac{1}{3}$ se dedicará a zonas infantiles, y el resto a zona de jardines. También se sabe que $\frac{2}{5}$ partes del terreno dedicado a zonas deportivas será para pistas de baloncesto.
    a. Indica cuántos metros cuadrados tendrá cada una de las tres zonas del parque.
    b. ¿Cuántos metros cuadrados ocuparán las pistas de baloncesto? ¿Qué fracción del total de parque ocuparán estas pistas?

22. Si en una conferencia de políticos europeos, se sabe que $\frac{5}{7}$ partes NO son españoles, y que los españoles son 36 políticos. ¿Cuántos políticos hay en total en la conferencia?

23. Una familia dedica los dos tercios de sus ingresos a gastos de mantenimiento, ahorra la cuarta parte y gasta el resto en divertirse.
    a) ¿Que fracción de los ingresos invierte en divertirse?
    b) Si los ingresos familiares son de 2400€, ¿cuánto dinero dedica a cada sección?

24. Lucía dedica las ¾ partes del día a estudiar, los 2/3 **del resto** a leer y lo que le queda de día a descansar.
    a) ¿Que fracción de tiempo le queda para descansar?
    b) Si consideramos 12h de día, ¿qué tiempo le dedica a leer?, ¿Y a descansar?

25. Al salir de unas oposiciones nos dan las soluciones del examen que acabamos de hacer, comprobamos que Luis tiene 13/24 bien hechas, María 5/16 y José 7/12.
    a) ¿Quien tiene más preguntas bien hechas? y menos?
    b) Si en el examen hay 96 preguntas, cuántas contestó bien cada persona?

26. Raúl tiene un taller mecánico que mide 8 metros de ancho y 10 metros de largo. Del total de la superficie del taller, Raúl dedica 3/20 a la zona de oficina, 2/5 a la zona de almacén y el resto a la zona de reparaciones. Su hermano Juan tiene otro taller, con exactamente la misma superficie pero con forma cuadrangular.
    a. Indica que parte del taller dedica Raúl a zona de oficina, de almacén y de reparaciones.
    b. Del total de coches reparados esta semana, el lunes repararon ¼ parte, entre el martes y miércoles repararon 2/3 del resto de coches, y entre el jueves y viernes repararon 9 coches. Indica cuántos coches repararon en total en toda la semana.

27. Disponemos de dos botellas que tienen la misma cantidad de líquido. La primera botella tiene 2 partes de aceite y 1 parte de agua. La segunda botella tiene 3 partes de aceite y una de agua. Si vaciamos el contenido de las dos botellas en un nuevo recipiente, ¿cuál será la proporción de agua y aceite en el nuevo recipiente?

TAREA: COMPRAS EN EL CENTRO COMERCIAL

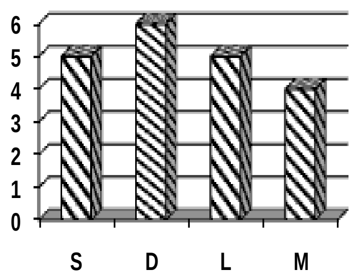
El grupo de 27 alumnos y alumnas de 3º A del "IES Agra de Raíces" ha decidido jugar al "Amigo Invisible" antes de las vacaciones de Navidad. Han acordado un mínimo de 12 € para cada regalo. Para hacer las compras van al Centro Comercial Finisterrae y después han quedado para ir al cine. El día de las compras se reparten boletos en las tiendas para un sorteo de un viaje a Lanzarote para dos personas si el número coincide con el "gordo" de Navidad. Además, todos los números que tengan las dos últimas cifras iguales al primer premio ganarán una cesta de Navidad.

a) La novena parte del grupo compra su regalo en la perfumería Garrote, los $\frac{2}{3}$ en Carrefour, el 50% del resto en la tienda Carola y los demás en 2DOS. ¿Cuántos regalos se compran en cada una de las tiendas?. Si los que compraron bisuteríaen 2DOS a 15€ se encontraron con un descuento del 10% por pagar en efectivo, ¿cuánto se gastaron en cada regalo?

b) A Raúl, que ha comprado en perfumería Garrote, le han dado el número 30427 para el sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que le toque una cesta de Navidad? ¿Crees que es "muy probable" o "poco probable" que Raúl se gane una cesta?

c) En la sección de libros de Carrefour hay una promoción que dice "Lleve 3 y pague 2". Ana, Selene y Paula han decidido comprar libros y, como van a comprar juntas, aprovechan la oferta. Los libros que compran cuestan 13 € cada uno. ¿Cuánto dinero les queda para invertir del presupuesto mínimo para los regalos? ¿Crees que deben comprar algo más para sus amigos invisibles? Justifica la respuesta.

d) En un panel a la entrada del centro comercial se observa un gráfico indicando la afluencia de público en miles de personas durante el puente de La Constitución. Observando el gráfico indica:



- Indica la fracción de personas que corresponde a cada uno de los días del puente.
- Si el lunes, el 40% de las personas visitan el centro comercial por la mañana, ¿cuántas personas acuden el lunes por la tarde?
- De todas las personas que estuvieron en Cee el martes, $^{2}\!/_{7}$ partes de ellos visitaron el centro comercial. ¿Cuántas personas estuvieron el martes en Cee?

2.2. Números Decimales.

Los **números decimales** expresan cantidades con unidades incompletas.

Un números decimal tiene una **parte entera**, situada a la izquierda de la coma, y una **parte decimal**, situada a la derecha.

Tipos de números decimales:

a. Un **número decimal es exacto** cuando tiene un número finito de cifras decimales. Ejemplo: 3,25
b. Un **número decimal es periódico** cuando tiene infinitas cifras decimales y, además, una o varias de ellas se repiten de forma periódica. La cifra o cifras que se repiten periódicamente se denomina período.
   i. Si el período empieza inmediatamente después de la coma, a dicho número se le denomina **decimal periódico puro**. Ejemplo: $2,\widehat{3} = 2,33333\ldots$
   ii. En caso contrario, se denomina **decimal periódico mixto**. La cifra o cifras que están después de la coma y que no se repiten se llaman anteperíodo. Ejemplo: $2,25\widehat{6} = 2,25666666\ldots$
c. Un número **decimal es no exacto y no periódico** si tiene infinitas cifras decimales y ninguna de ellas se repite periódicamente. Ejemplo: 3,125113251116321177321….

Ejercicio:

1. Indica el número decimal que corresponde a cada una de las siguientes fracciones. Clasifica dichos números decimales.

a. $\frac{3}{4} =$ c. $\frac{2}{7} =$ e. $\frac{36}{25} =$ g. $\frac{17}{22} =$

b. $\frac{5}{6} =$ d. $\frac{15}{3} =$ f. $\frac{15}{11} =$

Paso de Fracción a número decimal.

Toda fracción se puede expresar mediante:

- Un número entero. Ejemplo: 15/3 = 5
- Un número decimal exacto. Ejemplo: 3/4 =0,75 (Esto ocurre cuando el denominador de su fracción irreducible sólo tiene como factores el 2, 5 o ambos)
- Un número decimal periódico. Ejemplo: 1/6=0,166666… , 1/3 = 0,333333….
  - Si el denominador de su fracción irreducible no tiene como factores ni 2 ni 5, entonces será un decimal periódico puro.
  - Si el denominador de su fracción irreducible tiene como factores el 2 ó el 5 y además algún otro, entonces será un decimal periódico mixto.

IMPORTANTE: Una fracción nunca se puede expresar mediante un número decimal no exacto y no periódico. Estos números se denominan números **IRRACIONALES** y nunca se podrán expresar en forma de fracción.

Todo número entero, decimal exacto o decimal periódico se puede expresar en forma de fracción. Estos números se denominan **RACIONALES**.

Fracción Generatriz de un número decimal, es la fracción irreducible que equivale a dicho número decimal.

Cálculo de la fracción generatriz:

a. Fracción generatriz de un número decimal exacto.
- Sea N el número decimal, ejemplo: N=3,25
- Multiplicamos y dividimos dicho número por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya, ejemplo: $N=\frac{325}{100}$
- Simplificamos la fracción ejemplo: $N=\frac{325}{100}=\frac{13}{4}$

b. Fracción generatriz de un número decimal periódico puro.
- Sea N el número decimal, ejemplo: $N=2,\overline{325}$
- Multiplicamos los dos miembros de la igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período, ejemplo: $100\cdot N=2325,\overline{325}$
- Restamos las dos igualdades anteriores, ejemplo: $100\cdot N-N=2325,\overline{325}-2,\overline{325} \Rightarrow 99\cdot N=2323$
- Despejamos N: ejemplo: $N=\frac{2323}{100}$

c. Fracción generatriz de un número decimal periódico mixto.
- Sea N el número decimal, ejemplo: $N=2,32\widehat{5}$
- Multiplicamos los dos miembros de la igualdad por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo, ejemplo: $100\cdot N=232,\widehat{5}$
- Y ahora continuamos como en el caso "b" anterior,
  ejemplo: $10\cdot 100\cdot N=2325,\widehat{5} \Rightarrow 1000\,N=2325,\widehat{5}$
- Restamos las dos igualdades anteriores,
  ejemplo: $1000N-100N=2325,\widehat{5}-232,\widehat{5} \Rightarrow 900N=2093$
- Despejamos N: ejemplo: $N=\frac{2093}{900}$

Ejercicios

2. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a. 3,27 b. $2,\widehat{7}$ c. $6,3\overline{75}$ d. $5,\overline{305}$

3. Realiza las siguientes operaciones utilizando fracciones generatrices:

a. $\frac{3}{4}-2\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)+1,\widehat{3}=$

b. $2,1\widehat{6}+\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{5}\right)\cdot 5,\widehat{6}-0,75=$

<u>CLASIFICACION DE LOS NÚMEROS</u>

- Nº Reales
  - Nº Racionales: (Son todos aquellos que se pueden expresar mediante una fracción)
    - Nº Enteros
    - Nº Decimales
      - Exactos
      - Periódicos
        - Puros
        - Mixtos
  - Nº Irracionales: son aquellos que no se pueden expresar en forma de fracción, es decir aquellos que son decimales no exactos y no periódicos

<u>Ejercicio</u>**:**

4. Pon al menos tres ejemplos de cada una de los tipos de números del esquema anterior

<u>APROXIMACIONES Y ERRORES</u>:

Cuando un número decimal tiene muchas cifras decimales, necesitamos aproximarlos a otro número decimal de un orden "n" que tenga menos cifras decimales y que por lo tanto nos resulte más fácil su manejo.

Estas aproximaciones se pueden hacer por **<u>Redondeo</u>** o por **<u>Truncamiento</u>**.

<u>Para redondear un número decimal</u> hasta la cifra de orden "n" se mantienen todas las anteriores y la cifra de orden "n" se mantiene si la siguiente cifra decimal es menor que 5, y se aumenta en una unidad si la siguiente cifra decimal es mayor o igual que 5.

Ejercicio:

5. Redondea a las milésimas los siguientes números decimales:

   a. 2,336246742
   b. 3,125735673
   c. 52,299739567
   d. $3,\overline{27}$
   e. $7,56\widehat{9}$
   f. 4,9997688888

6. Redondea con dos cifras decimales los números del ejercicio anterior:

Para truncar un número decimal hasta un orden "n", eliminamos las cifras decimales superiores a ese orden, y dejamos las demás como están.

Ejercicio:

7. Trunca a las milésimas los números decimales del ejercicio anterior.

Error Absoluto y Error Relativo.

Tenemos que ser conscientes que cuando realizamos una aproximación de un número decimal, estamos cometiendo un error.

El Error Absoluto es la diferencia, en valor absoluto, entre el número exacto y su aproximación.

El Error Relativo es el cociente, en valor absoluto, entre el Error Absoluto y el número exacto.

Ejemplo. Sea N=2,456789 que aproximamos por A=2,46, entonces:

$$Error Absoluto \ E_a = |2{,}456789 - 2{,}46| = 0{,}003211$$

$$Error \ \mathrm{Re}lativo \ E_r = \left| \frac{0{,}003211}{2{,}456789} \right| = 0{,}0013...$$

Ejercicio:

8. Juan está midiendo la anchura de un pelo, y Luis la distancia desde su casa al colegio. Si Juan dice que la anchura del pelo es de 0,8mm cuando realmente mide 0,72875, y Luis dice que la distancia de su casa al colegio es de 2,5Km cuando realmente es de 2507 metros, ¿quién de los dos ha cometido un mayor error en su medición?

2.3. POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES CON EXPONENTE ENTERO

Una **potencia de exponente un número entero positivo** es una forma abreviada de expresar de expresar una multiplicación en la que todos sus factores son iguales:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\ veces}$$

Ejemplo:

i. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

ii. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

iii. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

iv. $(0,3)^2 = 0,3 \cdot 0,3 = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0,09$

Ejercicio:

1. Indica el resultado de las siguientes potencias:

   a. $6^2 =$

   b. $(-6)^2 =$

   c. $(2)^3 =$

   d. $(-2)^3 =$

   e. $(-1)^{25} =$

   f. $(-1)^{20} =$

   g. $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 =$

   h. $\left(\frac{-1}{3}\right)^5 =$

   i. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$

   j. $\left(\frac{-2}{-3}\right)^3 =$

   k. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

   l. $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 =$

2. Completa y aprende el contenido de la siguiente propiedad:

   "En una potencia de base un número racional y exponente positivo:

   - Si la base es un número positivo, la potencia es siempre ________________.
   - Si la base es un número negativo:
     - La potencia es ____________ si el exponente es Par
     - la potencia es _____________si el exponente es Impar"

3. Indica razonadamente el signo de las siguientes potencias:

a. $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 =$

b. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} =$

c. $(-7)^5 =$

d. $\left(\frac{1}{-3}\right)^5 =$

e. $\left(\frac{5}{3}\right)^5 =$

f.

g. $(17)^5 =$

h. $(-25)^5 =$

i. $\left(-\frac{31}{3}\right)^{12} =$

j. $(25)^5 =$

k. $\left(\frac{-1}{-3}\right)^5 =$

4. Indica razonadamente y sin resolver cuál es la mayor de las siguientes potencias:

$$(-0{,}6)^2 \;,\; (-0{,}6)^3 \;\; y \;\; (-0{,}6)^4$$

5. Indica en forma de potencia:

a. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

b. 81 =

c. 16 =

d. 2 · 16 =

e. (– 3) ·(–27) =

f. 5 · 25 · 125 =

g. $\frac{1}{2} \cdot 2^3 \cdot 32 \cdot \frac{4}{8} =$

Una **potencia de exponente un número entero negativo** se define de la siguiente manera:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad si \quad a \neq 0$$

Ejercicio:

6. Indica el valor de las siguientes potencias de exponente negativo:

a. 2^{-3}

b. $(-3)^{-2}$

c. $(-5)^{-3}$

d. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

e. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$

f. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

g. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

Fíjate como hemos resuelto el ejercicio anterior y date cuenta de la siguiente propiedad:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a} \qquad ; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{b^n}{a^n}$$

7. Demuestra las igualdades anteriores.

8. Indica razonadamente el signo de las siguientes potencias:

   a. $(-3)^{-2}$

   b. $(-3)^{-3}$

   c. 3^{-4}

   d. 3^{-5}

   e. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

   f. $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-8}$

   g. $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-7}$

9. Completa y aprende el contenido de la siguiente propiedad:

   "En una potencia de base un número racional y exponente un número entero:

   - Si la base es un número positivo, la potencia es siempre ________________.
   - Si la base es un número negativo:
     - La potencia es ____________ si el exponente es Par
     - la potencia es _____________si el exponente es Impar"

10. ¿Cómo calcularías $(0,5)^{-5}$ sin usar la calculadora?, ¿y $(0,2)^{-3}$?, ¿y $(0,4)^{-2}$?

Propiedades de las potencias:

1. Para cualquier valor de a $(a \neq 0)$ siempre se cumple que:

   a. $a^0 = 1$

   b. $a^1 = a$

   c. $a^{-1} = \frac{1}{a}$

2. Potencia de un producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

3. Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

4. Producto de potencias de la misma base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

   Ejercicio: Demuestra la propiedad anterior

5. Cociente de potencias de la misma base: $a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

   Ejercicio: Demuestra la propiedad anterior

6. Potencia de una potencia: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

   Ejercicio: Demuestra la propiedad anterior

Ejercicio:

11. Expresa como una sola potencia de exponente positivo:

    a. $2^5 \cdot 2^7 =$

    b. $2^7 \cdot 2^{-5} =$

    c. $2^6 \cdot 2^3 \cdot 2^{-5} \cdot 2^0 \cdot 2^{-1} =$

    d. $(-3)^6 \div (-3)^2 =$

    e. $(-3)^6 \div (3)^2 =$

    f. $(-3)^5 \div (-3)^2 =$

    g. $5^2 \cdot (5^3)^4 \cdot 5^{-5} =$

    h. $5^2 \cdot 5^{-6} =$

    i. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 =$

    j. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-5} =$

    k. $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^5 =$

    l. $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^5 =$

m. $\left(4^3 \cdot 4^5\right)^2 =$

n. $\left[(-5)^4 \div (-5)^3\right]^2 =$

o. $\left(3^5 \div 3^2\right)^5 =$

p. $\left(\dfrac{7^4}{7^6}\right)^3 =$

q. $2^5 \cdot 4^4 \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^3 =$

r. $2^5 \cdot 4^4 \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-3} =$

s. $\left(5^{-3} \cdot 25^4\right)^{-2} =$

12. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \dfrac{1}{2} + \left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1} - \dfrac{3}{4}\right]^{-1} = ;\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\right]^{-1} =$

b. $\left[\dfrac{2}{3} + 1{,}\widehat{3}\right]^{-2} \bullet \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^{0} - \dfrac{5}{6} \div \dfrac{2}{3} =$

13. Realiza las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma de potencias de números primos:

a. $\dfrac{\left(15^2 \cdot 60\right)^3 \cdot 45}{\left(10^2\right)^3 \cdot 75} =$

b. $\left(-9^2\right)^3 \cdot \left(81^2 \div 9^3\right)^{-3} =$

c. $\dfrac{\left(12^2\right)^4 \cdot 45}{\left(10^2 \cdot 50\right)^4 \cdot 36} =$

d. $\left[(-4)^3\right]^4 \div \left[(-2)^3\right]^{-5} =$

e. $\left(-4^4\right)^5 \div \left(81^2 \div 9^3\right)^{-3} =$

14. Realiza las siguientes operaciones con potencias, simplificando al máximo el resultado y expresándolo como potencias de base un número primo:

a. $\left(-6^2\right)^3 \cdot \left(-8^3\right)^2 =$

b. $\left(2^2 \cdot 3^3\right)^5 \cdot \left(6^2 \cdot 9^{-3}\right)^{-4} =$

c. $\dfrac{\left(-9 \cdot 5^2\right)^2 \cdot \left(25^3 \cdot 2\right)^3}{\left(3^3 \cdot 24\right)^2} =$

Notación Científica.

La notación científica se utiliza para expresar de forma sencilla números muy grandes o muy pequeños y que posean muchas cifras.

La notación científica es una forma de expresar números mediante el producto de un número mayor o igual que uno y menor que 10, multiplicado por una potencia de 10.

Recordar que una potencia de base 10 y exponente un número entero positivo es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique su exponente, y que una potencia de base 10 y exponente un entero negativo es igual a la unidad dividida entre dicha potencia.

Ejercicio:

15. Expresa como una potencia de 10 los siguientes números:

    a. 0,001
    b. 100
    c. 1
    d. 0,00001
    e. 0,1
    f. 10.000

16. Expresa los siguientes números en notación científica:

    a. 3.000.000
    b. 2.700
    c. 0,00025
    d. 12
    e. 0,3
    f. 352.000.000.000
    g. 0,01500
    h. 0,0000705

Suma y resta en notación científica

Para sumar o restar números en notación científica, es necesario que tengan la misma potencia de 10 en todos los sumandos.

Ejemplo: $2{,}5 \cdot 10^4 + 3{,}15 \cdot 10^4 = 5{,}65 \cdot 10^4$

En caso de que no tengan la misma potencia de 10, debemos conseguir primero que tengan la misma potencia y luego sumar (o restar).

Ejemplo: $2{,}4 \cdot 10^5 - 0{,}15 \cdot 10^3 = 240 \cdot 10^3 - 0{,}15 \cdot 10^3 = 239{,}85 \cdot 10^3 = 2{,}3985 \cdot 10^5$

o también:

$$2{,}4 \cdot 10^5 - 0{,}15 \cdot 10^3 = 2{,}4 \cdot 10^5 - 0{,}0015 \cdot 10^5 = 2{,}3985 \cdot 10^5$$

Multiplicación y división en notación científica

La multiplicación y división en notación científica resulta mucho más sencillo ya que no hay que hacer ninguna transformación, simplemente debemos multiplicar(o dividir) por una lado las potencias de 10 y por otro los números que le preceden.

Ejemplo: $\left(6{,}3\cdot 10^{5}\right)\cdot\left(2\cdot 10^{-3}\right)=12{,}6\cdot 10^{2}=1{,}26\cdot 10^{3}$

$\left(4{,}5\cdot 10^{8}\right)\div\left(2\cdot 10^{-2}\right)=2{,}25\cdot 10^{10}$

Ejercicio:

17. Realiza las siguientes operaciones con notación científica:

a. $3{,}25\cdot 10^{3}+2{,}1\cdot 10=$

b. $5{,}8\cdot 10^{-5}-3{,}7\cdot 10^{-4}=$

c. $\left(8{,}4\cdot 10^{6}\right)\div\left(3\cdot 10^{3}\right)=$

d. $(1{,}05\cdot 10^{12})\cdot\left(5{,}1\cdot 10^{4}\right)=$

18. ***TAREA. NOTACIÓN CIENTÍFICA***

Números Grandes: El que un número sea grande o pequeño es un concepto relativo, depende de a qué se refiera: viajar a 150 Km/h es una gran velocidad si se va en un coche, pero sería ridícula, por pequeña, si se trata de un avión, ya que incluso en rutas comerciales un avión puede desplazarse a más de 1.000 Km/h. Pero estas velocidades son pequeñas comparadas con la sonda "Giotto" (lanzada en 1985 para observar el cometa Halley), que llegó a 252.000 Km/h, y ésta, a su vez se queda chica con la del "viento solar" (corriente de electrones y protones procedente del Sol), que es de 1.600.000 Km/h.

Lo que sí es cierto es que algunos números son francamente incómodos de escribir y, lo que es peor, son difíciles de leer y de comprender lo que significan.

Por ejemplo, el gasto presupuestario por el Estado español en 1983 fue de unos cinco billones de pesetas, o sea, 5.000.000.000.000 ptas; un número incómodo, ¿no te parece?

Pero no creas que estos números incómodos salen sólo en Economía, por aquello de la inflación.

Ya en el siglo III a. de C., Arquímedes ideó un proceso para "contar" los granos de arena que serían necesarios para llenar el Universo, y llego nada menos que a 1000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000; no te molestes en leer, se trata de un 1 seguido de 63 ceros. Lo de menos es saber si Arquímedes llego a un número acertado (cosa bastante difícil en su época); lo importante es que actuó con método para realizar cálculos.

Aun hoy los científicos siguen observando el Universo y haciendo mediciones de todo tipo. Así, creen que hay mas de 100.000.000.000 de galaxias o que la edad de las estrellas mas antiguas es de 13.000.000.000 años.

Todos estos números adolecen de la misma dificultad de escritura. Sin embargo, todos tienen la cualidad de acabar en varios ceros; por eso se pueden expresar de forma bastante cómoda, como verás en los ejemplos siguientes:

5.000.000.000.000 = 5 x 1.000.000.000.000 = 5 x 10^{12}

13.000.000.000 = 13 x 1.000.000.000 = 13 x 10^{9}

Las potencias de 10 son muy útiles para expresar estos números.

Responde a las siguientes cuestiones:

A) Escribe como potencias de 10:

a) cien mil.
b) Un billón.
c) 100.000.000.000
d) diez millones.

B) Expresa, ayudándote de potencias de 10:
a) La velocidad de la sonda "Giotto".
b) La velocidad del viento solar.
c) El numero de granos de arena hallado por Arquímedes.
d) Número aproximado de galaxias del Universo.
e) Edad aproximada de las estrellas más antiguas.

Números Pequeños: La medida de una bacteria de tamaño intermedio es de unos 0.003 mm., pero los virus son todavía mas pequeños; por ejemplo, el de la poliomielitis mide 0.000 015 mm.

Este número ya empieza ha ser difícil de escribir y retener, por la cantidad de ceros que tiene en sus primeras cifras decimales. Pero observa que estos números menores que 1 también se pueden escribir de forma abreviada:

$$0.000015 = 15: 1000000 = 15/10^{6}= 15 \times 10^{-6}$$

Como ves, es una forma más cómoda de escribir estos números decimales.

Resuelve los problemas siguientes, expresando el resultado en notación científica:

1) La edad del Sol es de aproximadamente 5×10^{9} años. Sin embargo, hay cuerpos que pueden tener 4 veces la edad del Sol. ¿Cuál es la edad de estos cuerpos?

2) Se calcula que en la Vía Láctea hay aproximadamente $1{\acute{}}2 \times 10^{11}$ estrellas. ¿Cuántos años le tomaría a una persona contar las estrellas si cuenta una por segundo?

3) El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-21} kg. y el más grande es la ballena azul que pesa aproximadamente $1{\acute{}}38 \times 10^{5}$ kg. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena? ¿Cuánto pesa un cuarto de ballena azul y un millón de virus?

4) El peso estimado de nuestra galaxia es de $2{\acute{}}2 \times 10^{41}$ kg. y el peso estimado del Sol es de $1{\acute{}}989 \times 10^{30}$ kg. ¿Cuántos soles harían falta para lograr el peso de nuestra galaxia?.

5) El volumen estimado de todos los océanos de la Tierra es de 1 285 600 000 km^{3} y el volumen de agua dulce estimado es de 35 000 000 km^{3}. ¿Cuál es la proporción?

6) La pirámide de Keops tiene un volumen estimado de 25 000 000 m^{3} y el lago Ness de 7´5 km^{3}. ¿Cuál es su volumen conjunto?

7) El tamaño de un mosquito es de 5×10^{-3} m y el tamaño del virus de la gripe es de 1 micra, o sea, 0´001 mm. Indica cuántas veces mayor que el virus de la gripe es un mosquito?

8) Una año luz es la distancia que viaja la luz en un año, es decir, aproximadamente 5 869 713 600 millas. Se estima que la Vía Láctea tiene un diámetro de aproximadamente 200 000 años luz. ¿Cuántas millas tiene la Vía Láctea de diámetro?

2.4. RAÍCES CUADRADAS. Expresiones Radicales: transformaciones y operaciones.

Se define $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ donde "***n***" es el <u>índice</u> de la raíz y "***a***" es el <u>radicando</u>

Ejemplo: $\sqrt{36} = \pm 6$, $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[3]{-8} = -2$

Ejercicio:

1. Indica, sin usar la calculadora, el resultado de las siguientes raíces:

    a. $\sqrt{25} =$

    b. $\sqrt{100} =$

    c. $\sqrt{10.000} =$

    d. $\sqrt{-16} =$

    e. $\sqrt{-9} =$

    f. $\sqrt[3]{1000} =$

    g. $\sqrt[4]{16} =$

    h. $\sqrt[3]{-1000} =$

    i. $\sqrt[4]{-81} =$

    j. $\sqrt[3]{-8} =$

    k. $\sqrt[3]{8} =$

    l. $\sqrt[5]{1024} =$

    m. $\sqrt[5]{-1024} =$

    n. $\sqrt[4]{-625} =$

2. Indica el número de soluciones reales que tienen las siguientes raíces:

    a. $\sqrt[4]{327}$

    b. $\sqrt[10]{-12}$

    c. $\sqrt[3]{-12}$

    d. $\sqrt[5]{125}$

    e. $\sqrt{8}$

    f. $\sqrt[7]{-12}$

    g. $\sqrt[4]{-9}$

    h. $\sqrt[4]{9}$

3. ¿Qué tipo de número decimal son las soluciones de las raíces anteriores?

4. Indica de manera aproximada, con tres cifras decimales, la solución o soluciones de las raíces anteriores.

Potencias de exponente fraccionario:

Una raíz de índice "n" y radicando a^m es lo mismo que $a^{\frac{m}{n}}$, es decir: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Radicales equivalentes:

Dos radicales son equivalentes si al expresarlos en forma de potencia, sus bases son iguales y las fracciones de sus exponentes son equivalentes, es decir:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad es \ \ equivalente \ \ a \ \ a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad si \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

Ejercicio:

5. Indica dos raíces equivalentes a cada una de las siguientes:

   a. $\sqrt[8]{5^6}$

   b. $\sqrt[3]{5}$

   c. $\sqrt[24]{3^{15}}$

   d. $\sqrt[4]{7^3}$

6. Indica si son equivalentes los siguientes radicales:

   a. $\sqrt[3]{5^2} \ y \ \sqrt[9]{5^6}$

   b. $\sqrt[5]{25} \ y \ \sqrt[10]{5^4}$

   c. $\sqrt[4]{2^3} \ y \ \sqrt[3]{2^4}$

   d. $\sqrt[8]{3^{10}} \ y \ \sqrt[12]{3^{15}}$

   e. $\sqrt[6]{5^3} \ y \ \sqrt[3]{7^2}$

   f. $\sqrt[40]{2^{60}} \ y \ \sqrt[60]{2^{80}}$

Reducir radicales a índice común:

Para reducir varios radicales a índice común, se expresan en forma de potencia y se reducen las fracciones que forman los exponentes a denominador común. Evidentemente los radicales obtenidos son equivalentes a los originales.

Ejemplo:

Reducir a índice común $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{3^2} \ y \ \sqrt[4]{2}$

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{6}{12}}$; $\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{8}{12}}$; $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{12}}$ y por tanto:

$\sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6}$; $\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[12]{3^8} \quad y \quad \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^3}$

Ejercicio:

7. Reduce los siguientes radicales a índice común

   a. $\sqrt[5]{3^2}\ ;\ \sqrt[20]{7^3}\ \ y\ \sqrt[15]{5}$

   b. $\sqrt{3^5}\ ;\ \sqrt[8]{2^3}\ \ y\ \sqrt[4]{5}$

8. Simplifica los siguientes radicales:

   a. $\sqrt[84]{2^{105}}$

   b. $\sqrt[12]{8}$

   c. $\sqrt[75]{2^{25}}$

   d. $\sqrt[6]{1024}$

<u>Propiedades de Raíces</u> :

1. $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$

2. <u>Suma de Raíces</u>: Solo se pueden sumar factores que tengan raíces que sean iguales (lo que se conocen como radicales semejantes)

Ejemplo: $\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}=4\cdot\sqrt{5}$; $4\sqrt[3]{3^2}-5\sqrt[3]{3^2}=-\sqrt[3]{3^2}$

<u>Ejercicio</u>:

9. Realiza las siguientes operaciones:

   a. $3\sqrt{7}+6\sqrt{7}-4\sqrt{7}=$

   b. $5\sqrt{8}+4\sqrt{6}-3\sqrt{6}+2\sqrt{8}$

3. <u>Producto de Raíces</u>: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ (es necesario que tengan el mismo índice)

4. <u>División de Raíces</u>: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\div b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (es necesario que tengan el mismo índice)

5. <u>Raíz de una Raíz</u>: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

6. <u>Potencia de una Raíz</u>: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

7. <u>Extraer factores de una Raíz:</u> Todo factor del radicando que esté elevado a un exponente igual al índice de la raíz, puede ser extraído del interior de la raíz.

Ejemplo: $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3\cdot 5}=5\cdot\sqrt[3]{5}$

Ejercicio:

6. Extrae de la raíz:

a. $\sqrt{45} =$

b. $\sqrt{300} =$

c. $\sqrt[5]{96} =$

d. $\sqrt{405} =$

e. $\sqrt{10.000} =$

f. $\sqrt[3]{162} =$

g. $\sqrt{1000} =$

h. $\sqrt{150} =$

8. Racionalización de una Raíz.

Cuándo tenemos una fracción con una raíz cuadrada en el denominador, tenemos que racionalizarla para eliminar dicha raíz del denominador:

Ejemplo: $\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{5\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{5\cdot\sqrt{6}}{6}$

Ejercicio:

7.Racionaliza:

a. $\frac{20}{\sqrt{10}} =$

b. $\frac{12\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{8}} =$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}} =$

d. $\frac{5}{\sqrt{5}} =$

9. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\sqrt{\frac{4}{9}} + \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \frac{1}{4}\right)^{-1} \div 2^{-2} =$

b. $\sqrt[3]{\left[\left(\sqrt{\frac{25}{4}}\right)^{-1} - 42\cdot5^{-3}\right]} =$

c. $\left[\frac{3^{-2}}{2^{-3}} \div \sqrt{\frac{16}{9}}\right]^{-2} + \left[\sqrt{\frac{2^2\cdot3^{-2}}{3^2\cdot2^{-2}}}\cdot4^{-2}\right] =$

10. Calcula los resultados de las siguientes raíces (sin usar calculadora)

a. $\sqrt{25} =$

b. $\sqrt{-25} =$

c. $\sqrt[3]{125} =$

d. $\sqrt[3]{-125} =$

e. $\sqrt[4]{81} =$

f. $\sqrt[5]{-32} =$

g. $\sqrt[4]{-81} =$

h. $\sqrt[5]{243} =$

11. Calcula los resultados de las siguientes raíces (sin usar calculadora)

a. $\sqrt{\dfrac{9}{16}} =$

b. $\sqrt{4 \cdot 25} =$

c. $\sqrt[3]{\dfrac{5^3}{7^3}} =$

d. $\sqrt[8]{256} =$

e. $\sqrt[3]{\dfrac{40 \cdot 25}{343}} =$

f. $\sqrt[5]{\dfrac{96 \cdot 162}{6250}} =$

12. Calcula el lado de un cuadrado cuya área es de 64 metros cuadrados.

13. Calcula cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es de 52 metros cuadrados. Aproxima el resultado a los centímetros.

14. Una casa mide 9 metros de largo y 25 metros de ancho. ¿Cuánto debe medir el área de una casa cuadrada que tenga la misma superficie que la anterior?

15. Realiza las siguientes operaciones:

a. $4\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} + 7\sqrt[3]{5} =$

b. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^2}} \cdot \left(\sqrt[6]{12} \div \sqrt[6]{4}\right) =$

c. $2\sqrt[5]{9} - \left(7 \cdot \sqrt[5]{3}\right)^2 + \sqrt[5]{9} =$

d. $2 \cdot \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{200} =$

e. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} =$

f. $\sqrt[3]{2} \div \sqrt[6]{2} =$

g. $\dfrac{\left(\sqrt[4]{3^2}\right)^5 \cdot \sqrt{\sqrt[6]{81}}}{\sqrt[3]{81}} =$

h. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) =$

i. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} =$

j. $\left(6\sqrt[3]{16} - 4\sqrt[3]{2}\right) \div \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{64}}\right)^3 =$

2.5 EXPRESIONES ALGEBRÁICAS Y POLINOMIOS.

Una **expresión algebraica** es un conjunto de números y letras que se combinan con los signos de las operaciones matemáticas. Ejemplo: 3xy ; 2x + 3y ; $4x^2+3y$

Un **Monomio** es una expresión algebraica formada por el producto de un número, llamado coeficiente, y una o varias letras(variables) elevadas a un número natural, y que constituyen la parte literal del monomio.

El **grado de un monomio** es el exponente de la letra que forma la parte literal, si solo hay una, o la suma de los exponentes, si hay más de una.

Ejemplo:

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Variable	Grado
$-2b^3$	*-2*	b^3	*B*	*3*
$5x^4 \cdot y^3$	*5*	$x^4 \cdot y^3$	*x, y*	*7*
$x^6 \cdot y$				
$\frac{5 \cdot x^6 \cdot y}{3}$				
$a^3 \cdot 5$				
$\frac{1}{5} \cdot x^6 \cdot y \cdot a^2 \cdot 3$				

Ejercicio:

1. Completa los espacios es blanco del cuadro anterior.
2. Escribe un monomio de grado 3 y cuyas variables sean "x" e "y"
3. Escribe un monomio de grado 5, cuyo grado sea 6 y cuyas variables sean "a" y "b"
4. Escribe un monomio de grado 5, cuya parte literal sea " $x^2 \cdot y$ " y cuyo coeficiente sea "– 6 "

Dos **Monomios son semejantes** si tienen la misma parte literal.

Dos **Monomios son opuestos** si son semejantes y tienen coeficientes opuestos

Ejemplo: "$3x^5 \cdot y^2$" y "$-7x^5 \cdot y^2$" son semejantes. "$3x^5 \cdot y^2$" y "$-3x^5 \cdot y^2$" son opuestos.

Ejercicio:

5. Escribe un monomio semejante a ***3xy*** cuyo coeficiente sea "– 3". ¿Qué puedes decir del nuevo monomio?

6. Escribe un monomio semejante a $5a^2 \cdot b$ cuyo grado sea igual a 6

OPERACIONES CON MONOMIOS

SUMA Y RESTA: Para sumar o restar dos monomios estos deben ser semejantes. En caso contrario, la operación se deja indicada.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: El producto(o cociente) de dos monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto(el cociente) de los coeficientes, y por parte literal, el producto (el cociente) de las partes literales de ambos monomios.

7. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a. $2x^2 + 3x^2 - 8x^2 =$

b. $3x^5y - 7x^5y + 6x^5y =$

c. $2a^3b^2 - 6a^3 + 5a^3b^2 + a^3 =$

d. $(3xy) \cdot (-2x^2y^3z) =$

e. $(12x^6y^3z^2) \div (3x^2y) =$

f. $\dfrac{21xy^2z^3}{7xz^2} =$

g. $(-x^2z^2) \cdot (-5x^3y^2) =$

h. $(xy) \cdot (4xy^2) + 7x^2y^3 - (10x^5y^4) \div (2x^3y) - x^2y^3 =$

i. $(a^2b^4) \cdot a^5 \div (a^3b) - (ab) \cdot (-2a^3b^2) - 8a^4b^3 =$

POLINOMIO:

Un **Polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma o la resta de dos o más monomios no semejantes.

Al trabajar con un polinomio, conviene **reducir el polinomio**, es decir agrupar los monomios semejantes.

Cada uno de los monomios que forman un polinomio se denomina **término**, y el que no tiene parte literal se denomina **término independiente**.

El **grado de un polinomio** es el mayor de los grados de los términos de dicho polinomio.

Ejemplo de polinomio: $P(a,b) = 3ab + 5b^2 - 3a^3b^2 + a$

Ejercicio:

8. Reduce los siguientes Polinomios:

   a. $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x^3 - 8 + 3x + 5 - 4x^2 - 5x$

   b. $Q(x) = 2x^2y + 3xy^2 - 5xy + 9 + 3xy - 4xy^2 - 7 + x^2y$

9. Completa la tabla siguiente:

Polinomio	**Grado**	**Variables**	**Término Independiente**
$7x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 8$			
$3x^3 - x^2 + 5x^5 - 2x$			
$3x + 8x^3 - 2x^2 + 5 - 3x^3 - 3$			
$3x^6y^2 - 4x^5y^4 - 3xy^6$			

Valor numérico de un Polinomio: El valor numérico de un polinomio es el valor que se obtiene después de sustituir las variables por unos valores determinados y luego operar.

Si sustituimos la variable "***x***" del polinomio ***P(x)*** por el valor "***x=a***", dicho valor numérico lo expresamos de la forma ***P(a)***

10. Completa la siguiente tabla, calculando el valor numérico pedido

Polinomio	Valor numérico en:		
	X=1	X=0	X= –2
$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$			
$Q(x) = -2x^5 - 3x^2 + 2x$			
$R(x) = x^3 + 8$			

11. Dado el polinomio *P(x,y)=* $3x^6y^2 - 4x^5y^4 - 3xy^6$, indica el valor de P(1,1), P(0,-1) y P(-1,-1).

12. Calcula el valor de "***a***" para que el polinomio $P(x)=3x^3+ax-5$, cumpla que ***P(2)=3***

13. Indica un polinomio de **grado 3** que cumpla que P(1)=0

14. Indica un polinomio de **grado 2** que tenga como **término independiente 4** y que **P(2)=6**.

Se dice que un número "**a**" es **raíz de un polinomio** ***P(x)*** si ***P(a)=0***, es decir si el valor numérico del polinomio para dicho número es cero.

15. Indica si 0, 1, 2 y -1 son raíces del polinomio $P(x)=3x^2-3x-6$

16. Dado el polinomio $P(x)=x^3+ax^2+9x$, calcula el valor de "a" para que "x=–3" sea una raíz de *P(x)*. ¿Sabrías indicar alguna raíz más del polinomio *P(x)*?

OPERACIONES CON POLINOMIOS:

a. SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

Para sumar (o restar) polinomios, se agrupan los monomios semejantes y se suman (o restan) sus coeficientes.

Ejemplo: Sea $P(x)=3x^3+2x^2+x+1$ $\quad y \quad$ $Q(x)=x^2-2x+3$, entonces:

$$P(x)+Q(x)=3x^3+2x^2+x+1+(x^2-2x+3)=3x^3+2x^2+x+1+x^2-2x+3=3x^3+3x^2-x+4$$

$$P(x)-Q(x)=3x^3+2x^2+x+1-\left(x^2-2x+3\right)=3x^3+2x^2+x+1-x^2+2x-3=3x^3+x^2+3x-2$$

b. MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada monomio de uno de ellos por todos los monomios del otro, y después, se suman los polinomios obtenidos.

Ejemplo: Sea $P(x)=3x^2+2x-3$ $\quad y \quad$ $Q(x)=x^2-2x$, entonces

$$P(x)\cdot Q(x)=\left(3x^2+2x-3\right)\cdot\left(x^2-2x\right)=3x^4-6x^3+2x^3-4x^2-3x^2+6x=3x^4-4x^3-7x^2+6x$$

Ejercicio:

17. Sean los polinomios $P(x) = -2x^3 + 3x - 2$; $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $R(x) = x^2 - 2x$
Realiza las siguientes operaciones:

a. P(x) + R(x)

b. P(x) – R(x)

c. Q(x) · R(x)

d. [P(x) + Q(x)] · R(x)

e. [P(x) · R(x)] – Q(x)

f. *Q(x) + R(x) · Q(x)*

c. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), si tomamos P(x) como el polinomio dividendo y Q(x) como el polinomio divisor, entonces dividir P(x) entre Q(x) consistirá en buscar dos polinomios C(x) que será el polinomio cociente y R(x) que será el polinomio resto y que cumplan la condición:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) \quad donde\ el\ \ grado\ de\ R(x) < grado\, de\ Q(x)$$

Método para realizar la división de dos polinomios:

Sea $P(x) = 6x^3 + 2x^2 + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r|l}
6x^3 + 2x^2 + 3 & 2x^2 + x + 1 \\
\cline{2-2}
-6x^3 - 3x^2 - 3x & 3x - \frac{1}{2} \\
\cline{1-1}
-x^2 - 3x + 3 & \\
x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \\
\cline{1-1}
\frac{-5}{2}x + \frac{7}{2} &
\end{array}$$

Donde el polinomio **Cociente** es $C(x) = 3x - \frac{1}{2}$ y el polinomio **Resto** es $R(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{7}{2}$

Ejercicio:

18. Comprueba que la división anterior cumple: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

19. Realiza las siguientes divisiones y su correspondiente comprobación:

a. $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 5) \div (x - 2)$

b. $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) \div (x^2 + x - 1)$

c. $(4x^3 + 2x^2 - 4x + 3) \div (2x^2 - x + 1)$

d. $(8x^4 + 2x^3 - x + 7) \div (4x^2 + x)$

e. $(6x^5 - 4x^3 + 2x \;\; - 3) \div (2x^3 + x^2)$

f. $(12x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 2) \div (3x^2 + 2x)$

d. MÉTODO DE RUFFINI:

El método que vamos ver a continuación lo utilizaremos para dividir un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ entre un binomio de la forma $(x \pm a)$, y por tanto, al igual que cualquier otra división, consistirá en encontrar dos polinomios C(x) y R(x) que cumpla la condición $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

En el método de Ruffini, solamente trabajamos con los coeficientes ($a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$) procediendo de la siguiente manera:

División de un polinomio P(x) entre un monomio de la forma $x - a$
Efectúa la siguiente división: $(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1) : (x - 2)$

1 En la primera fila colocamos los coeficientes del dividendo ordenados según las potencias decrecientes.

4 Los números de la segunda fila se consiguen multiplicando el término independiente del divisor por el último número conseguido de la tercera fila:
$2 \cdot (-3) = -6$ $\quad 2 \cdot (-6) = -12$
$2 \cdot (-8) = -16$ $\quad 2 \cdot (-16) = -32$
$2 \cdot (-37) = -74$

	-3	0	4	0	-5	1
2		-6	-12	-16	-32	-74
	-3	-6	-8	-16	-37	$\boxed{-73}$

2 Término independient e del divisor cambiado de signo

3 Coeficiente principal del dividendo

5 Suma de los números superiores.

6 Suma de los números superiores.
Es el resto de la división.

7 Los coeficientes del polinomio cociente són los números de la tercera fila menos el último que es el resto. En este caso los coeficientes son: $(-3, -6, -8, -16, -37)$

Por tanto el cociente es $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$
El resto es $R = -73$

Ejercicio:

20. Realiza las siguientes divisiones empleando el método de Ruffini. Indica el Cociente y el Resto y realiza la comprobación en cada división:

    a. $(3x^3+2x^2-3x+7)\div(x+2)$

    b. $(-4x^5-3x^2+3)\div(x-3)$

    c. $(2x^3+4x^2-6)\div(x-1)$

PROPIEDADES:

Teorema del Resto:
El resto de dividir el polinomio P(x) entre el monomio $x-a$ es igual al valor numérico del polinomio para $x=a$, es decir P(a).

Teorema del factor.
Un polinomio P(x) es divisible por el monomio $x-a$ si y sólo si el valor numérico del polinomio para $x=a$, es cero $P(a)=0$

Teorema:
Si p(x) es un polinomio con coeficientes enteros y $x=a$ es **una raíz** entero del polinomio $x=a$, entonces $x=a$ divide al término independiente del polinomio p(x).

21. Calcula todas las raíces enteras de los siguientes polinomios:

    a. $P(x)=x^2+2x-8$

    b. $P(x)=x^3-6x^2-x+6$

22. Indica , sin realizar la división, el resto de las siguientes divisiones:

    a. $(x^3-6x^2-x+6)\div(x+1)$

    b. $(x^3-6x^2-x+6)\div(x-3)$

    c. $(x^3-6x^2-x+6)\div(x-6)$

    d. $(x^3-6x^2-x+6)\div(x+2)$

23. Indica, sin realizar la división, si el polinomio $P(x)=x^5-x^4-16x+16$ es divisible entre:

    a. x – 1

    b. x + 1

    c. x – 2

    d. x + 2

    e. x – 3

    f. x + 3

FACTOR COMÚN

Sacar factor común consiste en buscar un elemento común en los distintos términos de una expresión algebraica o polinomio y transformar una suma o resta en un producto:

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c) \qquad ó \qquad a\cdot b-a\cdot c=a\cdot(b-c)$$

Ejemplo: $30x^3y^2-3x^2y+9x^2y^5=3x^2y\cdot(10x\cdot y-1+3y^4)$

Ejercicio:

24. Extrae el factor común en los siguientes polinomios:

a. $5x^2+20x-30xy$

b. $12x+15y-3$

c. $4a^2bc^3-3ac^2+2abc$

d. $\dfrac{a^3.b^2}{8}+\dfrac{a^2b}{4}$

e. $\dfrac{3x^3y^2z^4}{2}+\dfrac{6x^2z}{4}+\dfrac{3xz}{2}$

f. $\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{3x^3y}{4}-\dfrac{x^2}{8}$

IDENTIDADES NOTABLES

Cuadrado de una suma:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b=a^2+2a\cdot b+b^2$$

Cuadrado de una diferencia:

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+-b\cdot a+b\cdot b=a^2-2a\cdot b+b^2$$

Suma por diferencia:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b=a^2-b^2$$

Ejercicio:

25. Desarrolla:

a. $(x+5)^2$

b. $(3x-5)^2$

c. $(2x^2+3x)^2$

d. $(-3x^3+2y)^2$

e. $(3x-2y)\cdot(3x+2y)$

f. $(2a^2b-3ab)$

g. $(x^3+2x)\cdot(x^3-2x)$

26. Expresa como un cuadrado de una suma o de una diferencia:

a. $x^2+8x+16$

b. $4x^2-12xy+9y^2$

c. $x^2+4xy+4y^2$

d. x^4+2x^2+1

27. Expresa como el producto de una suma por una diferencia:

a. x^2-36

b. a^2b^4-25

c. $25-4x^2$

d. $x^2y^6-9y^2$

28. Expresa en forma de un producto:

a. $4a^2-4a+1$

b. $9x^2-30xy+25y^2$

c. $100a^2-4b^6$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio consiste en ponerlo como producto del mayor número de polinomios de grado inferior al dado. Cuando un polinomio no se puede factorizar más se dice que es **irreducible**.

Ejemplo: $3x^2 - 3x - 6 = 3\cdot(x-2)\cdot(x+1)$

$$x^4 + x^3 - x - 1 = (x^2 + x + 1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)$$

Ejercicio:

29. Comprobar que se cumplen las igualdades anteriores

Método para factorizar polinomios:

a. En casos más sencillos, lo más rápido es utilizar las Identidades Notables y también la extracción del Factor Común.

Ejemplo: $3x^2 + 2x = x\cdot(3x+2)$

$$x^2 - 9 = (x-3)\cdot(x+3)$$

$$3x^3 - 27x = 3x\cdot(x^2-9) = 3x\cdot(x-3)\cdot(x+3)$$

$$(x^2 + 4x + 4) = (x+2)^2$$

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 = x^3\cdot(x^2 + 4x + 4) = x^3\cdot(x+2)^2$$

Ejercicio:

30. Factoriza los siguientes polinomios:

a. $2x^4 - 32x^2$

b. $8x^5 - 24x^4 + 18x^3$

iii. $9x^4 - 6x^2 + 4$

iv. $45x^5 - 30x^3 + 20$

b. En casos más complejos en los que no es evidente cuál es la factorización del polinomio nos ayudaremos del la Regla de Ruffini.

Para ello empezaremos calculando las posibles raíces del polinomio (recordar que son los divisores del término independiente) y luego usaremos las que son realmente raíces del polinomio para poder ir factorizando el polinomio.

Ejemplo: Factorizar $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

Posibles Raíces: {1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12}

	1	-3	-4	12
2		2	-2	-12
	1	-1	-6	0
-2		-2	6	
	1	-3	0	
3		3		
	1	0		

$$x^3-3x^2-4x+12=(x-2)\cdot\left(x^2-x-6\right)$$

$$x^2-x-6=(x+2)\cdot(x-3)$$

Por tanto:

$$x^3-3x^2-4x+12=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$$

Ejercicio:

31. Factoriza los siguientes polinomios:

   a. x^3-3x^2+4

   b. $2x^4+4x^3-16x^2-36x-18$

   c. $x^4-2x^3-11x^2-16x-20$

   d. $x^5+x^4-5x^3+3x^2$

FRACCIONES ALGEBRAICAS: SIMPLIFICACIÓN

Se llama fracción algebraica a una expresión algebraica que indica el cociente de dos polinomios.

Ejemplo: $\dfrac{2x^2-2}{3x+5}$; $\dfrac{3x^2y-2xy}{xy-xy^2}$

Simplificación de fracciones algebraicas:

Para simplificar una fracción algebraica dividimos el numerador y el denominador entre un factor común a ambos, por tanto cuando queremos simplificar una fracción algebraica tendremos que factorizar el numerador y el denominador y luego simplificamos los factores comunes.

Ejemplo:

I. $$\frac{x^2-2x}{2x}=\frac{x\cdot(x-2)}{2x}=\frac{x-2}{2}$$

II. $\dfrac{x^5+x^4-5x^3+3x^2}{x^2+2x-3}=\dfrac{x^2\cdot(x-1)^2\cdot(x+3)}{(x-1)\cdot(x+3)}=x^2\cdot(x-1)$

Ejercicio:

32. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{x^3}{xy}$

b. $\dfrac{3xy}{6x^2y}$

c. $\dfrac{x^2-9}{2x-6}$

d. $\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}$

e. $\dfrac{x^5-16x^3}{x^2+4x}$

f. $\dfrac{3x^2-48}{x^2+8x+16}$

g. $\dfrac{x+3}{x}$

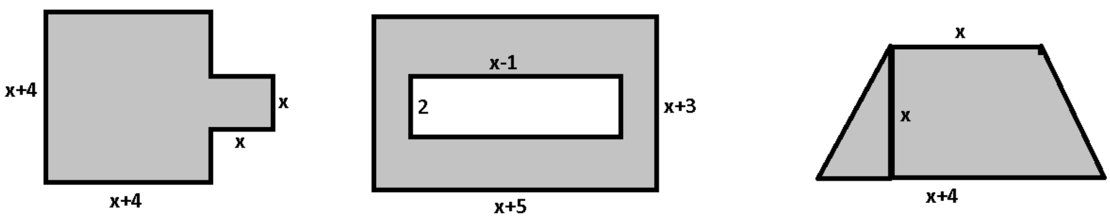
h. $\dfrac{x^2+1}{x}$

i. $\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x^4+4x^3-2x^2-12x+9}$

j. $\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$

k. $\dfrac{x^5-x^2}{x^3+x^2+x}$

33. Expresa el área de cada figura mediante un polinomio:



34. Dados los polinomios $P(x)=3x^4+2x^3-7x+1$ y $Q(x)=2x^2-2$, calcula:

a. P(x) : Q(x)

b. $Q(x)\cdot\left(2x^2+2\right)-P(x)$

c. $P(x)\cdot Q(x)-Q(x)^2$

d. P(-1)

e. Indica al menos una raíz de Q(x)

35. Realiza las siguientes divisiones por el método de Ruffini indicando el cociente y el resto y realizando la comprobación de la misma

a. $\left(2x^5-6x^2+3x-1\right)\div(x-2)$

b. $\left(2x^{10}+3x^7-2x^5+3\right)\div\left(3x^2-4\right)$

36. Sacar Factor común

a. $8x^2y^3-4xy^2+6y^5$

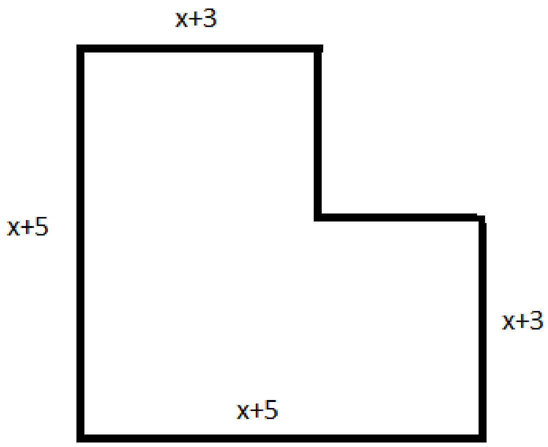
b. $7ab^2c+14a^2b-21b^2c$

37. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$

b. $\dfrac{x^2-16}{2x^3-8x^2}$

38. Indica mediante un polinomio el área de la siguiente figura:



39. Resuelve las siguientes cuestiones:

a. Indica un monomio semejante a $3x^2y$ cuyo coeficiente se igual a 5
b. Indica un monomio de grado 5 semejante al anterior

40. Dado $P(x)=ax^2+2x-3$, calcula "**a**" para que P(2)=9

41. Dados los polinomios $P(x)=6x^3-3x-3$; $Q(x)=2x+4$; $R(x)=3x^2-2x$, Realiza:

a. $P(x)\div Q(x)$

b. $P(x)-(R(x))^2$

c. $P(-2)$

d. $[R(x)\cdot(3x^2+2x)]\cdot 6x$

e. Indica una raíz de *Q(x)* y otra de *R(x)*

f. Aplica la regla de Ruffini e indica el cociente y resto de la división $P(x)\div(x-1)$

42. Sacar factor común:

a. $6x^2y^3z-9xy^2z+12x^2y^2+3xy^2=$

b. $(x+2)^2-3\cdot(x+2)+(x+2)\cdot(x-2)=$

43. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{x^3-4x}{x^3-4x^2+4x}=$

b. $\dfrac{3x^5-9x^4+x^3+9x^2+4}{x^2-x-2}$

c. $\dfrac{x^5-8x^2}{x^3-4x}$

d. $\dfrac{x^2-4x}{x\cdot(x^2-16)}=$

44. Realiza las siguientes cuestiones:
    a. Pon un ejemplo de un polinomio *P(x)*, cuyo valor numérico en x=2 sea 3, es decir *P(2)=3*.
    b. Dado el polinomio $P(x) = 3x^3 + ax^2 + x + a$, calcula el valor de "a" para que *P(2)=6*.
    c. Indica mediante un polinomio el área de un triángulo rectángulo isósceles, del que sabemos que uno de sus catetos mide 2x+4. Simplifica su expresión.
45. Factoriza los siguientes polinomios:
    a. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$
    b. $2x^5 - 5x^4 - 19x^3 - 27x^2 - 15x$

46. Indica un polinomio de grado 3 que sea divisible entre (x-2) y entre (x+3)

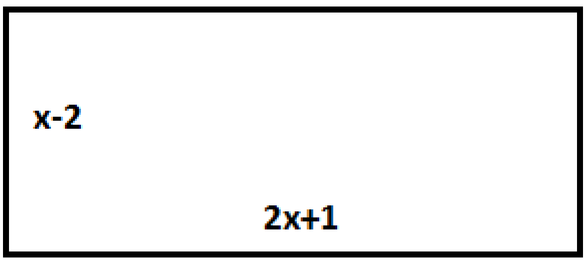
47. Indica un polinomio de grado 3 que tenga "x=1" como raíz y que P(2)=0

48. Dados los polinomios $P(x) = 7x^5 - 3x^4 + 6x - 5$ *y* $Q(x) = 3x^4 + 6x^3 - x$, calcula:
    a. P(x) : Q(x)
    b. $(2x-3)^2 \cdot Q(x) - P(x)$
    c. $(7x - 3x^2)\cdot(7x + 3x^2)$
    d. P(– 1)
49. Realiza la siguiente división por el método de Ruffini indicando el cociente y el resto:

$$(x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 5) \div (x+3)$$

50. Sacar factor común:
    a. $15a^3b^2 - 10a^2b^3 + 20a^2b^2$
    b. $\frac{5}{3}x^2y - \frac{10xy^2}{6} + \frac{1}{3}x^2y^2$
51. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:
    a. $\frac{7x^3 - 14x^2}{x^2 - 4}$
    b. $\frac{4x-4}{x^2 - 2x + 1}$

52. Expresa mediante un polinomio el área y el perímetro de la siguiente figura:



53. Resuelve las siguientes cuestiones:

   a. Indica un monomio de grado 3, coeficiente 2 y semejante a x^3y
   b. Sea $P(x)=3x^3+ax^2+2x+b$. Calcula "***a***" y "**b**" sabiendo que *P(0)* = -5 y que *P(1) = 0*
   c. Simplifica todo lo que puedas $\dfrac{3x^3+3x^2+3x+3}{3x^3+3x^2+3x}$

54. Dados los polinomios $P(x)=3x^3-3x+1$ y $Q(x)=x^5+3x^3-2x+2$, calcula:
   a. Q(x) : P(x)
   b. $(x+1)^2\cdot P(x)-Q(x)$
   c. $(3x^2-x)\cdot(3x^2+x)$
   d. P(− 1)

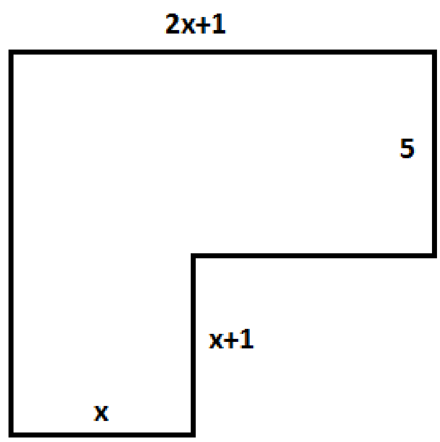
55. Realiza la siguiente división por el método de Ruffini indicando el cociente y el resto:

$$(3x^4+2x^3-4x-10)\div(x+2)$$

56. Sacar factor común:
   a. $3xy-6x^2y-9xy^3$
   b. $\dfrac{3}{2}a^2b^3+\dfrac{9a^3b}{2}-15a^5b^2$

57. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:
   a. $\dfrac{5x-15}{x^2-9}$
   b. $\dfrac{9x^2+6x+1}{3x^2+x}$

58. Expresa mediante un polinomio el área de la siguiente figura:



59. Resuelve las siguientes cuestiones:

   a. Indica un monomio de grado 5, semejante a x^2y
   b. Sea $P(x)=ax^2+5x-7$. Calcula "***a***" para que *P(1) = 0*
   c. Sea $P(x)=ax^5+bx^3+cx^2+dx+1$. Calcula *P(0)*
   d. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de $5a^2b^3$

2.6. ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

IDENTIDADE Y ECUACIONES:

Se dice que tenemos una **igualdad algebraica** cuando tenemos dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual "="

Las igualdades algebraicas pueden ser de dos tipos:

Identidad: es cierta para cualquier valor de las variables. Ejemplo: ***2x + 3x = 5x***

Ecuación: Solo es cierta para ciertos valores de las variables. Estos valores que cumplen la ecuación se denominan solución de la ecuación. Ejemplo: ***3x + 7 =5x + 1*** (solución: x=3)

Ejercicio:

1. Indica cuáles de las siguientes igualdades son identidades y cuáles son ecuaciones:
   a. $7x-3=4x-2+3x-1$
   b. $4\cdot(x+1)=9x-5x+4$
   c. $2x+3\cdot(x+1)=x+7$
   d. $-6\cdot(x-2)+5=-2\cdot(3x-3)+11$
   e. $6\cdot(x-1)+2x=3\cdot(x+1)+1$
2. Comprueba si son ciertas o no las siguientes igualdades en los valores correspondientes:
   a. $2x+3=3(x-2)+5 \quad en \quad x=4$
   b. $x^3-x^2+x=2x+2 \quad en \quad x=2$
   c. $2x^4-3x^3+2x=x+3 \quad en \quad x=-1$
3. Pon un ejemplo de dos ecuaciones que tengan como solución "x=2"
4. Pon un ejemplo de dos identidades
5. Pon un ejemplo de dos ecuaciones que tengan como solución "x=-1"

Elementos de una ecuación:

En toda ecuación debemos distinguir los siguientes elementos:

Miembros: Son cada una de las expresiones algebraicas separadas por el signo igual.

Términos: Son los sumandos de cada miembro. El término independiente es aquel que está formado por un solo número

Incógnitas : Son las letras cuyos valores desconocemos

Soluciones: Son los valores de la incógnita que hacen cierta la ecuación.

Dos **ecuaciones son equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones

Resolver una ecuación consiste en encontrar las soluciones de dicha ecuación. Para resolver una ecuación iremos transformando la misma en otra equivalente pero más sencilla.

Ejercicio:

6. Escribe dos ecuaciones que tengan:
   a. Dos soluciones
   b. Ninguna Solución

ECUACIONES DE PRIMER GRADO:

Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella ecuación que es equivalente a una ecuación de la forma ***ax + b = 0***. Las ecuaciones de primer grado siempre tienen una solución única.

Ejercicio:

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:
    a. $5x - 7 = 3x + 3$
    b. $6x + 9 - 3x - 2 = 10x - 5 - x$
    c. $6 - 2x + 4x = 9x - 13$
    d. $4x + 3 - x = 1 + 3x + 2$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:
    a. $3\cdot(x+1) - 3 = x + 2$
    b. $10 - 2\cdot(x - 2) = 6\cdot(x - 3)$
    c. $2x - 3\cdot(x+3) + 5 = 2\cdot(x - 6) - 7$
    d. $3\cdot(x+3) - 2\cdot(x - 3) = 6 - 2\cdot[3 - 4\cdot(x+1)]$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado con paréntesis:
    a. $7\cdot(x-2)+\frac{2x-4}{2}=x+5$
    b. $\frac{x+3}{2}+\frac{9-x}{4}=5-\frac{x+1}{2}$
    c. $\frac{3\cdot(x+3)}{8}-\frac{2\cdot(x-1)}{4}=5-\frac{2\cdot(x+1)}{3}$
    d. $\frac{x+3}{3}=\frac{2x+3}{5}$
    e. $\frac{4\cdot(2x-3)}{2}=\frac{6\cdot(x+1)}{3}$

PROBLEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO:

10. Calcula el valor de un número sabiendo que el triple de dicho número menos su doble es igual a 5.
11. Calcula el valor de un número del que sabemos que la mitad de dicho número menos su tercera parte es igual a 5.
12. Calcula las edades de Ana y Luis sabiendo que Ana tiene 4 años más que Luis y que entre los dos suman 46 años.
13. En un garaje hay 40 vehículos entre coches y motos. Si las motos son la cuarta parte que los coches, indica cuántas motos y cuántos coches hay en el garaje.
14. En una clase de 3ºESO, la mitad de los alumnos son de Cee, la cuarta parte son de Corcubión y 7 son de Dumbria. ¿Cuántos alumnos hay en total en la clase?

15. Calcula las medidas de un rectángulo del que se sabe que mide de largo tres metros más que el doble del ancho y que tiene un perímetro de 48 metros.

16. ***<u>FRUTERÍA MATEMÁTICA</u>***

Como me gusta mucho la fruta he ido de compras al mercado, el frutero me dice que la cuenta son 6´60 € pero no sé cuánto cuesta cada fruta, porque el dueño del puesto, que es aficionado a las matemáticas y muy guasón, tiene colocados unos carteles de la forma siguiente:

FRUTERÍA MATEMÁTICA.

- **1 K. de aguacates…………………………Mismo precio que los kiwis**
- **1 k. de peras ………………………………La tercera parte que los kiwis**
- **1 k. de melones ……………………………Mismo precio que la sandía**

- **1 k. de manzanas …………………………La mitad que los kiwis**
- **1 k. de higos………………………………..La cuarta parte de la sandía**

- **1k. de naranjas……………………………La mitad de los kiwis**
- **1 k. de plátanos ……………………………Dos tercios del precio de la sandía**
- **1 k. de albaricoques ……………………Precio de los plátanos + 0.25 €**
- **1 k. de piña ………………………………..Precio de los kiwis – 0.60 €**
- **Frutas tropicales ………………..……….Mismo precio que la piña**

a) Si yo he comprado naranjas, peras y kiwis, un kilo de cada una, ¿Cuánto me ha costado cada fruta?

b) Como la fruta que compré estaba muy buena también ha ido mi amigo Luís. El ha comprado 1 k. de sandía, 2 k. de plátanos, un melón que pesaba 500 gr., 1k. de higos, 1 k. de albaricoques, 1k. de piña y 2 k. de mango. Si la cuenta fue de 18 € ¿Cuánto gastó Luís en cada fruta?

c) La madre de Luís le manda a comprar fresas y un kilo de kiwis porque no le gusta ninguna de la fruta que ha comprado. Si en otro cartel aparece el kilo de fresas a cuatro quintos del precio de los kiwis más 1€ y Luís vuelve a la frutería y gasta 11´36€. ¿Cuántos kilos de fresas le compró a su madre?

a) 1k   b) 2k   c) 3k   d) 0´5 k

17. Disponemos de dos tipos de café, uno de Venezuela que cuesta 5,20€/kg y otro de Colombia que cuesta 6,20€/kg. Si queremos obtener un café que cueste 6€/kg, ¿cuántos kilos de café debemos mezclar de cada tipo?

18. Miguel tiene 4 años más que su hermana Ana y, dentro de 3 años, entre los dos sumarán 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

19. ¿Qué edad tengo ahora si dentro de 12 años tendré el triple de la edad que tenía hace 6 años?

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO:

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita es aquella ecuación que es equivalente a una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$, $donde\, a,b,c\, son\, números\, reales\; y\; a\neq 0$

Si b o c es igual a cero decimos que la ecuación es **incompleta**. En caso contrario es **completa**.

Resolución de ecuaciones de segundo grado completas.

Aplicamos la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

De la fórmula anterior se deduce que puede haber una, dos o ninguna solución de la ecuación, en función de que el radicando de la raíz sea cero, positivo o negativo.

Nota: La representación gráfica de la función $y=ax^2+bx+c$ corresponde a una parábola, y la solución de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ corresponde a los puntos donde la parábola corta a la recta "y=0".

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2+2x-3=0$

Sean a=1, b=2 y c = –3 entonces:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-(4\cdot 1\cdot(-3))}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{-2+4}{2}=1 \quad y \quad x_2=\frac{-2-4}{2}=-3$$

Por tanto esta ecuación tiene dos soluciones, es decir la parábola corta en dos puntos al eje OX

También vemos que 1 y –3 son raíces del polinomio $P(x)=x^2+2x-3$ y por tanto podemos factorizarlo, es decir: $x^2+2x-3=1\cdot(x-1)\cdot(x+3)$.

Ejercicio:

20. Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado y factorizarlas:
    a. $3x^2+3x-6=0$
    b. $3x^2+2x-5=0$
    c. $x^2-6x+9=0$
    d. $3x^2-2x+9=0$
    e. $3\cdot(x-1)\cdot(x+1)-4x=3x-5$
    f. $\dfrac{(x-2)^2}{3}-\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x}{5}$

Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas:

Las ecuaciones de segundo grado incompletas, al igual que las completas, se pueden resolver utilizando la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, pero se resuelven de manera mucho más fácil y rápida utilizando otros procedimientos.

i. **Si b=0**, es decir, ecuaciones del tipo $ax^2+c=0$

En este caso, simplemente procedemos a despejar la "x"

$$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ejemplo:

$$3x^2-12=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=\frac{12}{3}=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x_1=2 \ \ y \ \ x_2=-2$$

ii. **Si c=0,** es decir, ecuaciones del tipo $ax^2+bx=0$

En este caso comenzamos sacando factor común:

$$ax^2+bx=0 \Rightarrow x\cdot(ax+b)=0 \Rightarrow x_1=0 \ \ y \ \ x_2=\frac{-b}{a}$$

Ejemplo:

$$3x^2+6x=0 \Rightarrow x\cdot(3x+6)=0 \Rightarrow x_1=0 \ \ y \ \ x_2=\frac{-6}{3}=-2$$

iii. **Si b=0 y c=0,** es decir, ecuaciones del tipo $ax^2=0$

En este caso hay una única solución: **x=0**

Ejercicio:

21. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a. $x^2-16=0$

b. $5x^2+15x=0$

c. $-8x^2=0$

d. $3x^2+27=0$

e. $(x-2)\cdot(x+3)=x-5$

f. $2\cdot(x^2+3)=4x+6$

g. $(x-1)\cdot(x+1)-(x-3)^2=x^2-2$

h. $x\cdot(x-2)=-4$

i. $\dfrac{3x^2+1}{4}+\dfrac{3x-1}{2}=5x-3$

j. $4x^2+3x+7=0$

22. Completa el siguiente texto relativo al número de soluciones de una ecuación de segundo grado:

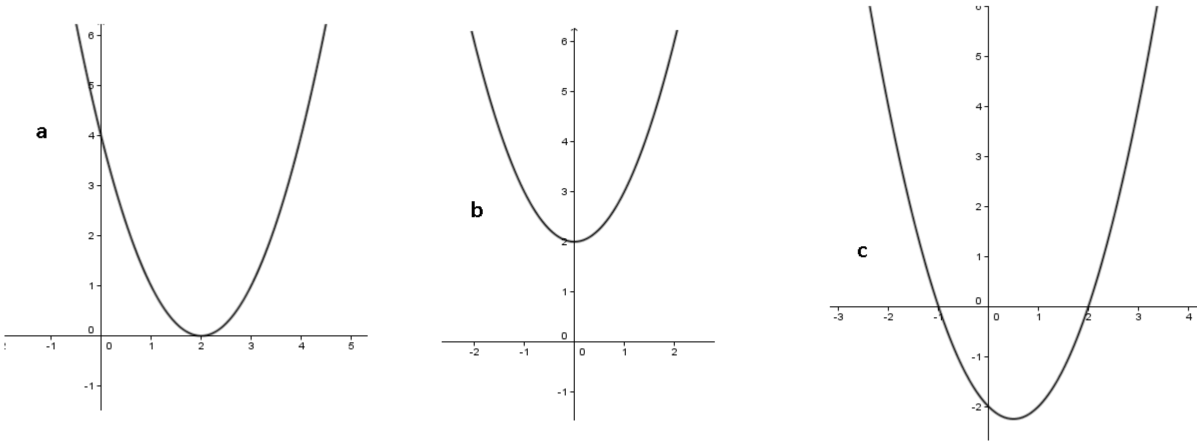
"Al número b^2-4ac se le denomina discriminante y se representa por Δ. Como ya sabes el número de soluciones de la ecuación dependerá del signo del discriminante.

i. Si $\Delta=b^2-4ac>0$, entonces la ecuación tiene _____ soluciones distintas.

ii. Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene ______ solución. Esta solución se llama solución doble.

iii. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación ______ tiene solución

23. Identifica cada uno de los siguientes gráficos con una situación del ejercicio anterior:



24. Dada la ecuación de segundo grado $x^2 - 2ax + 16 = 0$, determina el valor de "a" para que la ecuación tenga una única solución

<u>Resolución de ecuaciones de grado 2 o superior que se pueden expresar como producto de ecuaciones de grado 1 ó grado 2 igualadas a cero</u>:

Ejemplo: Resolver $(x-3)\cdot(x^2+2x-3)\cdot(3x-5)=0$

Para resolver este tipo de ecuación, resolvemos cada factor del producto por separado, ya que para que el producto sea cero, tendrá que ser cero al menos uno de los factores:

$$(x-3)=0 \quad \Rightarrow x_1 = 3$$
$$(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow x_2 = 1 \quad y \quad x_3 = -3$$
$$(3x-5)=0 \quad \Rightarrow \; x_4 = \tfrac{5}{3}$$

25. Resolver las siguientes ecuaciones:

a. $(3x^2+8x)\cdot(x^2+5)\cdot(2x-7)=0$
b. $(x-2)\cdot(x+3)=0$
c. $(x-1)\cdot(x+2)=18$
d. $x^3-2x^2-5x+6=0$
e. $x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$
f. $(2x+1)\cdot(6-2x)=12$

26. Calcula las medidas de una finca rectangular sabiendo que mide tres metros más de largo que de ancho y que posee una superficie de 270 metros cuadrados.
27. La diagonal de un rectángulo mide 10 cm. Halla sus dimensiones sabiendo que mide 2 centímetros menos de ancho que de largo.
28. Para embaldosar un salón de 8 de largo por 6 metros de ancho se han utilizado 300 baldosas cuadradas. ¿Cuánto mide el lado de cada baldosa?
29. Se quiere hacer una caja de 50 cm3 de volumen con una cartulina cuadrada. Para hacerla se cortan en las esquinas cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuánto mide el lado de la cartulina cuadrada? (**NOTA**: Volumen de la caja = Área de la base x Altura).
30. Determina los lados de un rectángulo, sabiendo que su perímetro es 50m y su área es 150m2
31. Un rectángulo mide 15 cm de largo y 8 cm de ancho. ¿En cuántos centímetros habría que disminuir, simultáneamente, el largo y el ancho para que la diagonal sea 4 cm menor?
32. Calcula la altura y la base de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm y la altura es 2 cm más larga que la base
33. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m². (Solución: 3m)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO:

34. **Resolver las siguientes ecuaciones**:

a) $\frac{2\cdot(x+5)}{4}+2x=\frac{10x+6}{3}-\frac{15-x}{6}$

b). $2\cdot(x-5)\cdot(x+5)-(x-4)^2=2x+6$

c) $(4x^2-16)\cdot(6x^2-5x)=0$

d) $\frac{3\cdot(2x-8)}{2}-\frac{x+4}{5}=2\cdot(x-1)-\frac{4x-6}{3}$

e) $(4x^2-16)\cdot(6x^2-5x)=0$

f) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)+(x-1)^2=2x-\frac{5}{4}$

35. En una bodega familiar se almacena vino de 2€ el litro y de 6€ el litro. La bodega está gestionada por un matrimonio y su hijo.
    a. Sabiendo que actualmente el padre tiene 21 años más que su hijo, y que hace 13 años el padre tenía el doble de la edad de su hijo, calcula la edad del padre y del hijo.
    b. Si quieren conseguir 200 litros de vino de 5€ el litro mezclando los dos tipos de vino que poseen, ¿cuántos litros tienen que mezclar de cada precio?
36. Calcula las dimensiones de los dos catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que un cateto mide 3 metros más que el otro, y que el área del triángulo es de 54 metros cuadrados y que su hipotenusa mide 15 metros.
37. Calcula el valor de "b" para que x=3 sea solución de la ecuación $2x^2+bx=0$
38. En un pequeño taller de carpintería metálica trabaja un padre con su hijo. La empresa fue inaugurada por el padre hace 15 años cuando tenía el triple de la edad de su hijo. Hace 5 años, cuando el padre tenía el doble de la edad del hijo, su hijo empezó a trabajar con él.
    En estos momentos están construyendo un marco rectangular metálico para un cartel publicitario. En su construcción emplean un listón metálico de 42 metros de longitud.

a. Calcula las dimensiones del marco del cartel publicitario, sabiendo que la diagonal de dicho cartel mide 15 metros.
b. Calcula las edades actuales del padre y del hijo.
c. La semana pasada el taller tuvo unos ingresos de 484€. El lunes ingresaron 40€ menos que el martes, el miércoles la tercera parte del martes, el jueves ganaron 100€ más que el miércoles, y el viernes el doble del miércoles. Indica lo que ingresaron cada día.
d. El mes pasado gastaron una gran cantidad de kilos de metal. La 1ª semana gastaron la tercera parte del total mensual, la 2ª semana la cuarta parte del total, la 3ª semana 30kg menos que la primera, y la última semana gastaron 100kg. Calcula cuánto gastaron cada semana.

39. Resolver las siguientes ecuaciones:
a. $(x-1)\cdot(x+1)-2x=x^2-7$
b. $\frac{2\cdot(x+1)}{3}-\frac{x-1}{2}=3\cdot(x-4)-\frac{x}{5}$
c. $(2x-5)^2-6=x-1$
d. $(x^2-16)\cdot(x^2+7x)=0$

40. Calcula el valor de "***b***" para que la ecuación $3x^2-bx+12=0$ tenga una única solución. Indica también cuál sería esa solución única.

41. Una empresa dedicada al envasado de vino dispone de una gran cantidad de viñedos, con los que elabora dos tipos de vino, uno que vende a 20€/litro y otro más barato que venden a 4€/litro.

a. Si están pensando en sacar al mercado 900 litros de un nuevo tipo de vino que conseguirán mezclando los dos anteriores y que quieren vender a 10€/litro, ¿Cuántos litros deben mezclar de cada tipo?

b. Esta empresa realiza la vendimia durante las 4 semanas del mes de septiembre, mes en el que recogen un total de 12.000 kilos de uva. Si sabemos que durante la segunda semana recogen 1000 kilos más que durante la primera, que en la tercera semana recogen el doble que durante la primera, y que en la última semana recogen la quinta parte de lo recogido en la tercera, calcula cuántos kilos recogieron cada semana.

c. La empresa tiene una bodega que mide 8 metros más de largo que de ancho. Debido al aumento de su producción quieren aumentar también el tamaño de su bodega, y han decidido aumentar en 8 metros el ancho de la bodega, lo que supone aumentar en 144 metros cuadrados la superficie total de la bodega. Indica cuáles son las medidas (largo y ancho) iniciales de la bodega.

42. Una caja mide 5 cm de altura y de ancho, cinco cm más que de largo. Su volumen es 1500cm3. Calcular la longitud y la anchura.

2.7. SISTEMAS DE ECUACIONES

ECUACIONES LINEALES:

Una ecuación de primer grado se denomina ecuación lineal

Una **ecuación lineal con dos incógnitas** es una ecuación que se puede expresar de la forma $ax+by=c$, donde ***x*** e ***y*** son las incógnitas, y ***a***, ***b***, y ***c*** son números reales. A "***a***" y "***b***" se le denominan **coeficientes** y a "***c***" **término independiente.**

Una **solución de una ecuación lineal** con dos incógnitas es un **PAR de valores** (uno por cada incógnita) que hacen cierta la igualdad. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y su **representación gráfica es una recta**:

Ejemplo:

Sea la ecuación lineal con dos incógnitas $x+2y=3$

Entre las infinitas soluciones que posee podemos citar algunas como:

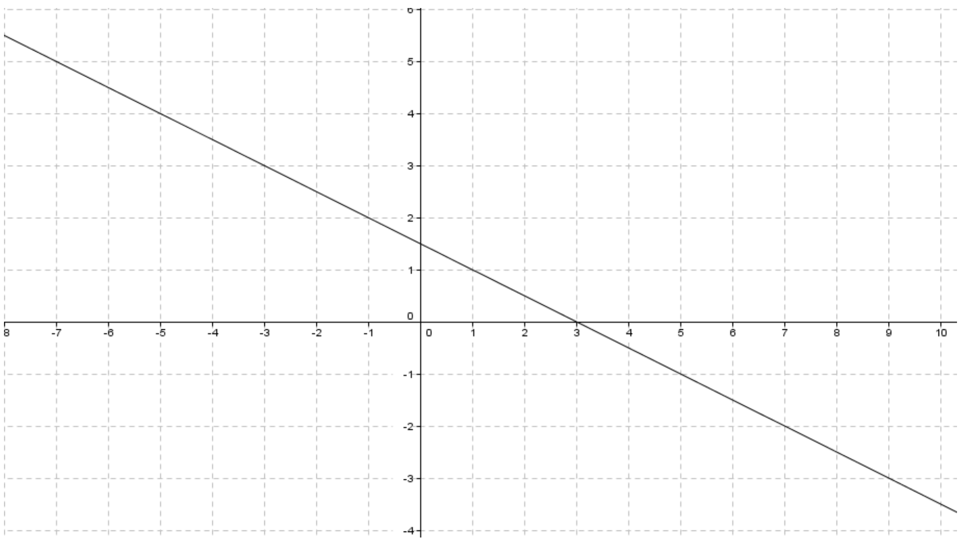
(x,y)=(1, 1) ; (x,y)=(2, ½) ; (x,y)=(3, 0) ; (x,y)=(5, -1) ; (x,y)=(6, -3/2) ; ………

Para calcular una solución, se suele primeramente despejar una incógnita (generalmente la "y") y luego dar valores a la otra (generalmente la "x". Ejemplo $y=\dfrac{3-x}{2}$

Todas estas soluciones se suelen indicar mediante una tabla de valores:

x	1	2	3	5	6
y	1	1/2	0	−1	−3/2

Si ahora representamos estas soluciones obtendremos una línea recta:



Ejercicio:

1. Indica al menos tres soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones lineales con dos incógnitas y luego representa la recta que le corresponde a cada ecuación:
    a. x + y = 4
    b. 2x – y = 1
    c. x – 2y = 5
    d. 2x + 3y = 7
2. Indica dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tenga como solución (x,y)=(1,1)
3. Representa gráficamente las dos ecuaciones anteriores. ¿Se cortan en algún punto?, ¿En cuál?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:

Un sistema de ecuaciones lineales está formado por dos ecuaciones lineales de las que se busca una solución común. Es de la forma: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Una solución del sistema es cualquier par de números que verifica las dos ecuaciones a la vez. Resolver un sistema es encontrar la solución o soluciones del sistema.

Métodos de resolución de sistemas:

i. **Método Gráfico**: Consiste en representar gráficamente mediante la recta correspondiente cada una de las dos ecuaciones lineales y la solución será el punto donde se cortan las dos rectas.

Ejemplo:

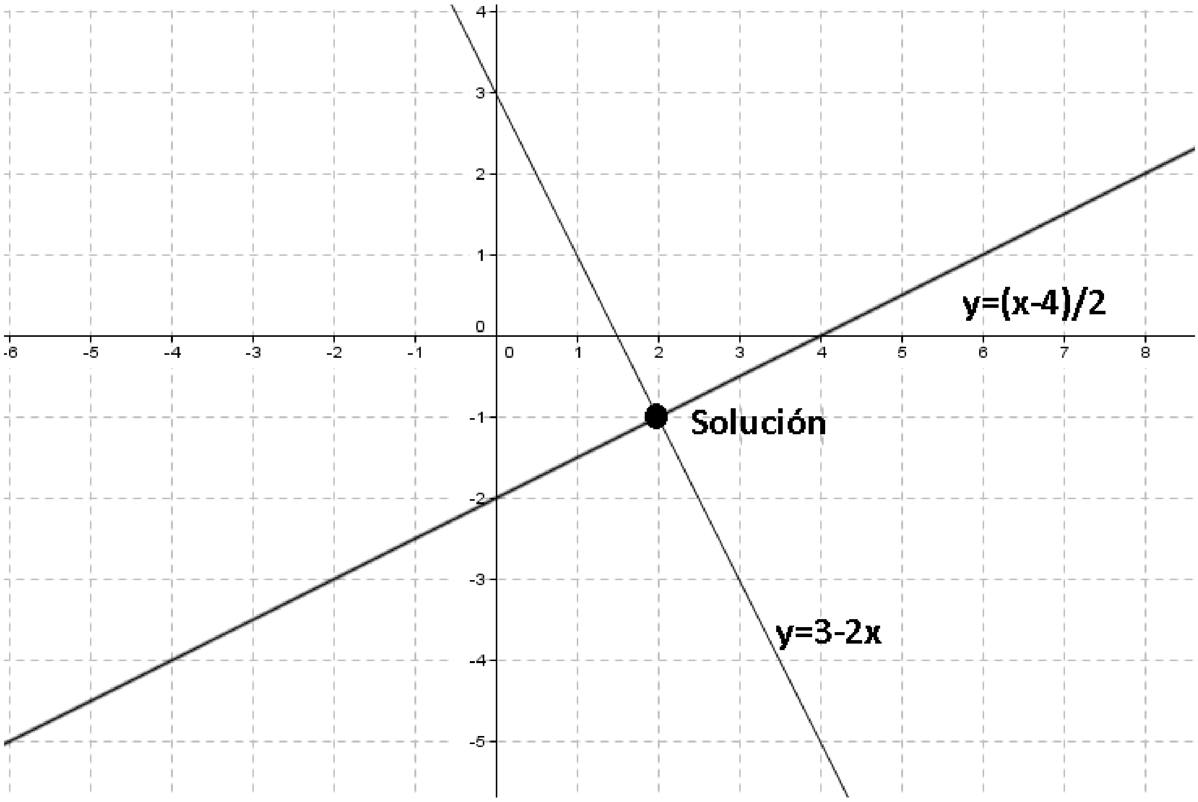
Sea el sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$

Sea $2x+y=3 \Rightarrow y=3-2x$ y sea $x-2y=4 \Rightarrow y=\dfrac{x-4}{2}$

x	*y=3-2x*
0	3
1	1
2	–1
–1	5

x	*y = (x-4)/2*
0	–2
1	–3/2
2	–1
–2	–3

Y ahora representamos las dos ecuaciones:



Y como podemos ver el punto donde se cortan las dos rectas es el punto (x,y)=(2, –1) y por tanto esa es la solución del sistema.

Ejercicio:

4. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-3y=5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

ii. **Método de sustitución**.

Consiste en despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en la otra.

Ejemplo: Sea el sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=4 \end{cases}$

Despejamos la incógnita "y" en la primera ecuación: ***y=3 – 2x***

Ahora sustituimos en la segunda: ***x – 2 (3 – 2x) = 4***

Y finalmente resolvemos la ecuación: ***x – 6 + 4x = 4 → 5x = 10 → x=2***

Para terminar sustituimos el valor de "x" en la expresión de "y":

y=3 – 2·2=– 1

Solución (x,y)=(2, – 1)

Ejercicio:

5. Resuelve por el método de sustitución los sistemas del ejercicio 4.

iii. Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualarlas:

Ejemplo: Sea el sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{3-y}{2} \quad ; \quad x = 4 + 2y$$

Igualamos : $\frac{3-y}{2} = 4 + 2y$ y ahora resolvemos esta ecuación

3 – y = 2 · (4 + 2y) → 3 – y = 8 + 4y → 5y = –5 → y = –1

Para terminar sustituimos el valor de "y" en una de las expresiones de "x":

x = 4 + 2 ·(–1)→ x= 2

Solución (x,y)=(2, – 1)

Ejercicio:

6. Resuelve por el método de igualación los sistemas del ejercicio 4.

iv. Método de reducción

Consiste en sustituir una ecuación por otra equivalente (es decir con las mismas soluciones) y en la que el coeficiente de una de las incógnitas sea el opuesto del coeficiente de la misma incógnita de la otra ecuación, para posteriormente sumar las dos ecuaciones.

NOTA: Para obtener una ecuación equivalente a otra se multiplica (o divide) los dos miembros de la ecuación por un mismo número.

Ejemplo: Sea el sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 & \qquad 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 & \xrightarrow{\cdot(-2)} -2x + 4y = -8 \end{cases}$

y ahora sumamos las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rcrcr} 2x + & & y & = & 3 \\ -2x + & & 4y & = & -8 \\ \hline 0 & + & 5y & = & -5 \end{array}$$

→ 5y = – 5 → y = – 1

Para obtener el valor de la incógnita "x" podemos proceder de dos formas:

a. Volvemos a aplicar reducción para eliminar la "y"

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \xrightarrow{\cdot(2)} & 4x + 2y = 6 \\ x - 2y = 4 & x - 2y = 4 \end{cases}$$

y ahora sumamos las dos ecuaciones

$$\begin{array}{rrcr} 4x+ & 2y & = & 6 \\ x- & 2y & = & 4 \\ \hline 5x & & = & 10 \end{array}$$ → 5x = 10 → x = 2

b. Sustituimos el valor de y=1 en una de las ecuaciones,

2x +(-1) = 3 → 2x = 4 → x = 2

Ejercicio:

7. Resuelve por el método de reducción los sistemas del ejercicio 4.

8. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método que prefieras:

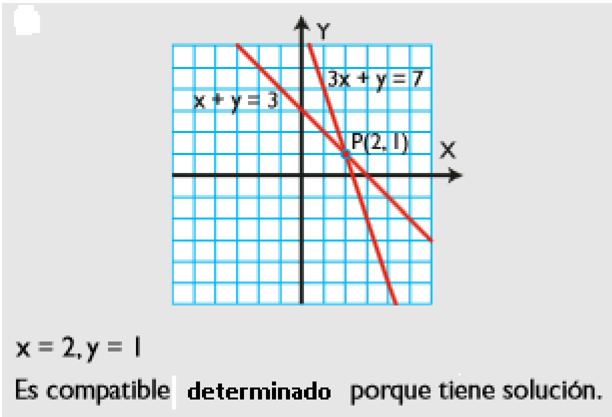
a. $\begin{cases} \dfrac{3\cdot(x+2y)}{6} + \dfrac{3x-2y}{4} = x+1 \\ 2x - 3\cdot(x-y) = 3x-5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{2x-2}{3} + \dfrac{x+y}{5} = x-1 \\ \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{y+1}{4} = 3 \end{cases}$

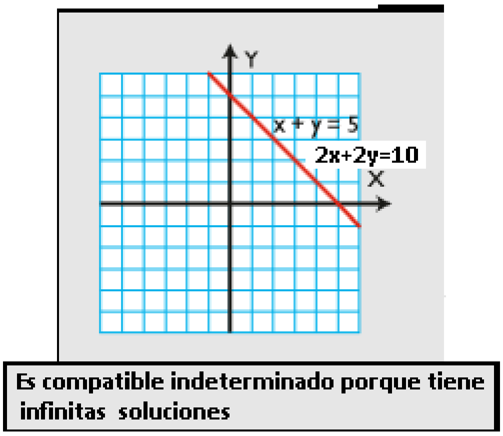
Número de soluciones de un sistema de ecuaciones:

Los sistemas de ecuaciones, según su número de soluciones, se pueden clasificar en:

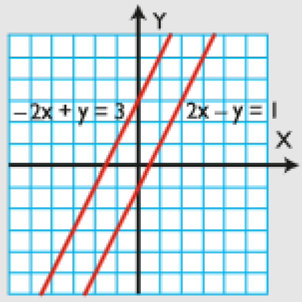
a. **Sistema compatible determinado**. Tienen una única solución y su representación gráfica se corresponde con dos rectas que se cortan en un punto.



b. **Sistema compatible indeterminado**. Tienen infinitas soluciones y su representación gráfica corresponde con dos rectas coincidentes



c. **Sistema incompatible**: No tiene solución. Su representación gráfica corresponde con dos rectas paralelas



Es incompatible porque no tiene solución.

Ejercicio:

9. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones y clasifícalos según su número de soluciones:

a. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 3x+6y=9 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x+3y=4 \\ -2x+y=-2 \end{cases}$

10. Analiza el resultado del ejercicio anterior y busca una relación entre los coeficientes de las ecuaciones según el número de soluciones del sistema.

11. Pon un ejemplo de un sistema compatible determinado, otro de un sistema compatible indeterminado y otro de un sistema incompatible.

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES:

12. La suma de dos números es 20, y el doble del primero más el triple del segundo es 45. Halla el valor de ambos números.

13. A las 9 de la mañana, Raúl sale de Coruña en dirección a Madrid, distantes entre sí 660 km, a una velocidad de 75 km/h. A la misma hora Ana sale de Madrid hacia Coruña por la misma carretera y a una velocidad de 60km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A qué distancia estarán de Coruña?

14. Laura viaja de Coruña a Barcelona en su coche. Sale a las 10:00 de la mañana y lleva una velocidad constante de 90 Km/h. A la misma hora y a 110 km de Coruña y en el mismo sentido de la dirección que Laura, sale Pedro en su moto a una velocidad de 70 km/h. ¿A qué hora se encuentran los dos? ¿Qué distancia a recorrido cada uno?

15. Hoy la edad de Miguel es el doble de la edad de María. Dentro de 10 años la suma de sus edades será 65.¿Cuántos años tiene actualmente cada uno?

16. En una tienda 5 bocadillos de jamón y dos refrescos de cola cuestan 17 €, y 3 bocadillos de jamón y 7 refrescos de cola, 16 €. ¿Cuánto cuesta cada bocadillo de jamón y cada refresco de cola?

17. En un corral hay 80 animales entre gallinas y conejos. El número de patas que hay en total es 220. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?

18. Hoy la edad de Ana es el triple de la de su hija, y hace 5 años era cinco veces mayor. ¿Cuántos años tiene actualmente cada una?

19. Un ángulo de un romboide es el doble del ángulo consecutivo. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de dicho romboide?

20. En el aparcamiento de un centro escolar hay 50 vehículos entre coches y bicicletas. El número total de ruedas, sin contar las de repuesto, es 140. ¿Cuántos coches y cuántas bicicletas hay en el aparcamiento?

21. En el aparcamiento de un centro escolar hay 50 vehículos entre coches y bicicletas. El número total de ruedas, sin contar las de repuesto, es 140. ¿Cuántos coches y cuántas bicicletas hay en el aparcamiento?

22. Halla una fracción equivalente a 3/4 en la que la suma del numerador y del denominador valga 14

23. Luis tiene el doble de dinero que Silvia. Si Luis le da 15 € a Silvia, entonces tienen lo mismo. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS:

24. Indica Razonadamente si es verdadero o falso:
    a. Si un sistema lineal tiene 2 soluciones distintas, podemos decir que es un Sistema Compatible Indeterminado.
    b. Dos rectas con la misma pendiente y sin ningún punto en común, corresponden a un Sistema Compatible Determinado.
    c. La solución de un Sistema de ecuaciones lineales compatible determinado siempre coincide con el punto de corte de las dos rectas que representan a cada ecuación
25. En la localidad de Cee se ha creado un equipo femenino de fútbol, que disputará esta temporada los 22 partidos de la liga nacional de fútbol. (**5 PTOS**)
    a. Las porterías del campo de fútbol fueron construidas empleando un tubo de metal que mide un total de 10 metros de largo. Sabiendo que la medida del larguero supera en 3,25 metros a la altura de cada poste, indica las medidas del larguero y del poste de la portería.
    b. El Presidente del club les promete una prima de 15 euros por cada partido ganado, y 5 euros por cada partido empatado. Sabiendo que de los 22 partidos jugados esta temporada solo han perdido 3, y que cada jugadora ganó 205 euros en primas, indica cuántos partidos ganaron y cuántos partidos empataron.

c. En el primer partido de la temporada, el equipo debe desplazarse a Madrid. El autobús con las jugadoras sale de Cee a las 8:00 de la mañana a una velocidad media de 60 km/h. A las 10:00 de la mañana y 30 km más adelante en la misma dirección y sentido que el autobús, sale la entrenadora del equipo en su coche y a una velocidad media de 90 Km/h. ¿A qué hora y a qué distancia de Cee se encuentran?

d. Del total de goles marcados a lo largo de toda la temporada, las jugadoras de la delantera han marcado 3/5 del total, las jugadoras de medio campo han marcado 1/3 del total y las jugadoras de la defensa han marcado 3 goles. Indica el número de goles que ha marcado el equipo esta temporada.

e. Si sabemos que el área del campo de fútbol mide 704 metros cuadrados y que en ancho del área es 10 metros menos que el largo, ¿cuáles son las medidas del área?

26. Indica razonadamente si son verdadero o falso las siguientes afirmaciones:

a. Un sistema de ecuaciones lineales puede tener dos y sólo dos soluciones.

b. El punto (x,y)=(2,4) es el punto donde se cortan las dos rectas que representan el siguiente sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=-2 \end{cases}$

c. El sistema $\begin{cases} 2x-4y=3 \\ 4x-8y=9 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones

27. Luis sale desde Gijón hacía Bilbao a las 13:00 en su motocicleta y a una velocidad de 90 km/h. De un pueblo situado 30 km más adelante de Gijón en sentido Bilbao salió Ana a las 12:00 y a una velocidad de 60 km/h también hacia Bilbao. ¿A qué distancia de Gijón se encontrarán Ana y Luis?

28. En una granja hay un total de 27 animales entre cerdos y gallinas. El lunes se vendieron 8 animales de la granja y se recaudaron 180€.

a. Si en la granja hay un total de 78 patas, calcula cuántos cerdos y gallinas hay en la granja.

b. Sabiendo que los cerdos se venden a 60€ cada uno y las gallinas a 10€ cada una, calcula cuántos cerdos y gallinas se vendieron el lunes.

c. Del total de pienso que gastan cada día en alimentar a los animales de la granja, se sabe que por la mañana gastan 3/5 partes del total, y por la tarde gastan 16 kilos menos que por la mañana. ¿Cuántos kilos de pienso gastan en total a lo largo del día?

29. <u>Resuelve los siguientes sistemas (por los 4 métodos):</u>

a. $\left.\begin{array}{l} x-6\cdot(y-2)=-6 \\ 3\cdot(x-1)+2y=23 \end{array}\right\}(6,4)$

b. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=x-\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{x}{5}=\dfrac{x+y+4}{15} \end{array}\right\}(1,2)$

c. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-y}{2}-\dfrac{x+y}{10}=\dfrac{3}{5} \\ 3x-\dfrac{5y-4}{2}=\dfrac{25}{2} \end{array}\right\}(6,3)$

d. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3\cdot(x-5)}{2}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{y}{6}+3 \\ -3\cdot(x-y-4)-10=y-1 \end{array}\right\}(9,12$

30. ¿Qué fracción es igual a $\frac{1}{3}$ cuando se suma 1 al numerador e igual a $\frac{1}{4}$ cuando se suma 1 al denominador?

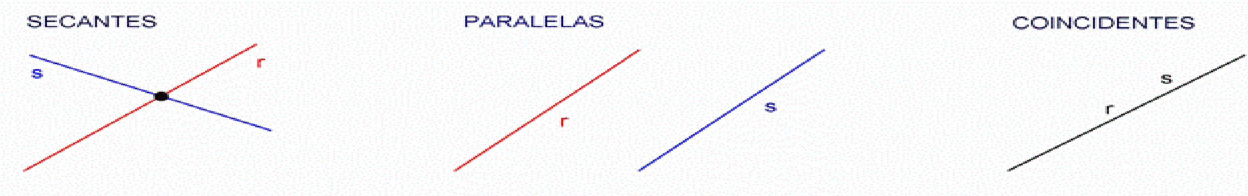
31. Al pagar la compra de una bufanda y un abrigo con un billete de 100 € le devuelven 19 €. Sabiendo que la sexta parte de lo que cuesta el abrigo excede en 10 € a la novena parte del coste de la bufanda, ¿cuánto paga por cada prenda? (Solución: 12,6€ bufanda y 68,4€ abrigo)

32. El cociente de una división es 3 y el resto 5. Si el divisor disminuye en 2 unidades, el cociente aumenta en 1 unidad y el nuevo resto es 1. Obtén el dividendo y el divisor.(Solución: Dividendo 41 y Divisor 12)

33. En una fiesta juvenil hay chicos y chicas. Quince chicas abandonan la fiesta, quedando dos chicos por cada chica. Entonces 45 chicos se van y quedan 5 chicas para cada chico. ¿Cuántas chicas había inicialmente en el grupo? ¿Y chicos? (Solución: 50 chicos y 40 chicas)

34. Asocia de forma razonada y sin resolverlos, cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con la situación gráfica que le corresponde.

a. $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 6x-y=9 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+y=3 \\ 4x+4y=12 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x-4y=3 \\ 4x-8y=9 \end{cases}$



35. Clasifica según el número de soluciones y sin resolverlos, los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} 2x+5y=18 \\ 3x-7y=9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -3x+y=-1 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x-8y=6 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x-8y=6 \\ 6x-12y=9 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x+y=-6 \\ x-2y=4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \text{`}x+y=3 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$

36. Resuelve:

a. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{5\cdot(x+1)}{7}-\dfrac{2\cdot(y+2)}{3}=-2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\cdot(x-1)}{3}-\dfrac{y+2}{6}=-1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{3y-4}{10}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{5\cdot(x+1)}{7}-y+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{8}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{2x}{4}=2 \\ 3y+5x=-1 \end{cases}$

37. TAREA DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES:

HOTEL “COSTA DA MORTE”

El siguiente cartel muestra los precios que ofrece el Hotel "Costa da Morte"

PRECIOS HABITACIONES:	**RESTAURANTE** (Buffet Libre):	**EN TEMPORADA BAJA**
• Individual → 40 euros/noche • Doble → 60 euros/noche • Suite → 100 euros/noche • Cama Extra → 15 euros/noche	• Desayuno → 4 € • Almuerzo → 10 € • Cena → 8 € (con bebidas incluidas)	**(*Febrero, Marzo, Mayo y Octubre*)** **nuestras habitaciones tienen un DESCUENTO DEL 15%** 

a. Un grupo de 12 amigos deciden pasar un día de agosto en el hotel y 8 de ellos se alojan en habitaciones dobles y 4 en habitaciones individuales
   i. ¿Cuántas habitaciones usaron?
   ii. ¿Cuánto pagaron en total?
   iii. ¿Cuánto pagarían si se hubiesen alojado un día de Octubre?

b. Otro fin de semana se alojaron en el hotel un grupo de 16 personas. Las personas que se alojaron en habitación doble son el triple que los que se alojaron en habitación individual. Además las personas que se alojaron en la suite fue una más que en habitación individual. Calcula cuántas personas se alojaron en cada habitación.

c. Otro grupo de 9 amigos se alojaron un día de Mayo en habitaciones dobles e individuales y pagaron en total 255€. ¿Cuántas personas se alojaron en habitaciones dobles y cuántas en individuales?

d. El hotel dispone de una cancha de fútbol sala de 390 metros cuadrados. Sabiendo que el largo de la cancha supera en 4 metros al doble del ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la cancha?

e. El hotel también dispone de una cancha de tenis con una valla de protección de 48 metros de longitud. Si el ancho de la cancha mide un tercio del largo, indica sus dimensiones.

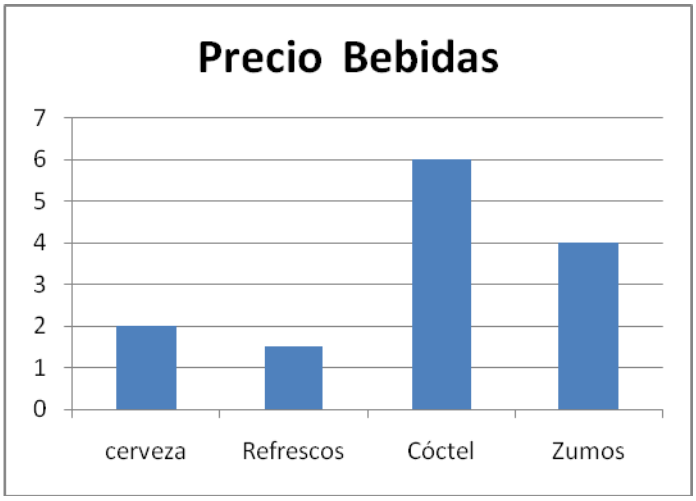
f. Un grupo de amigos de un equipo de baloncesto se ha alojado un par de veces al año en dicho hotel (un día de cada vez), la primera vez en temporada alta pagaron 420€ y la segunda en temporada baja pagaron 357€.Sabiendo que les gusta estar solos en sus habitaciones y que algunos de ellos prefieren la amplitud de la habitación doble, calcula cuántos amigos forman este grupo y cuántos se alojaron en cada habitación.(indica al menos una solución válida)

g.El hotel también dispone de un Bar en la Piscina con los precios que se muestran en el gráfico:

i. Un día se vendieron 200 bebidas en este bar. Sabiendo que se vendieron la mitad de cócteles que de zumos, el triple de refrescos que de zumos y 20 cervezas más que refrescos. Calcula cuántas bebidas se vendieron de cada tipo.

ii. Un grupo de amigos tomó 20 bebidas entre refrescos y cervezas pagando un total de 34€. ¿Cuántos refrescos tomó? ¿y cervezas?

iii. En una familia, por la mañana los adultos han tomado una cerveza y los niños un zumo y han pagado 28€. Por la tarde los adultos han tomado un cóctel y los niños un refresco y han pagado 52,5€. ¿Cuántos miembros forman esta familia y cuántos son niños?



2.8. SUCESIONES Y PROGRESIONES

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$

A cada uno de los números de la sucesión se le llama **término** de la sucesión, y se designa por a_i, donde "**i**" indica el lugar que ocupa el término en la sucesión.

Ejercicio:

1. Dada la sucesión: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25,…..
   a. Indica cuál es el tercer término de la sucesión. ¿y el décimo?
   b. Indica el valor de los términos a_2 , a_6 y a_9

<u>REGLA DE FORMACIÓN</u>:
Existen sucesiones en las que podemos determinar cualquiera de sus términos a partir de un cierto criterio; a este criterio se le denomina regla de formación.
Veamos dos tipos de reglas de formación:

<u>Término general</u>:
Es una expresión algebraica que nos permite calcular cualquier término de la sucesión en función del lugar "n" que ocupa y se designa por a_n

<u>Ejemplo</u>: el término general de la sucesión del ejercicio anterior es $a_n = 2n - 1$

Ejercicio:

2. Dada la sucesión cuyo término general es $a_n = 2^{n-1}$, indica el valor de a_{20}, a_{50} y a_{300}
3. Indica el término general de la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,… e indica el valor de a_{20}, a_{50} y a_{300}
4. Indica el término general de las sucesiones siguientes:
   a. 3, 6, 9, 12, 15, 18,……
   b. 5, 8, 11, 14, 17, 20, …
   c. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …
   d. 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, …
   e. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10} \ldots$
   f. $4, 2, \frac{12}{9}, 1, \frac{20}{25}, \frac{24}{36}, \frac{28}{49} \ldots$

5. Indica el término que ocupa la vigésima posición en cada uno de los casos anteriores

<u>Sucesiones Recurrentes</u>:
Una sucesión es recurrente cuando la regla de formación de la sucesión se basa en que cada término se obtiene a partir de los anteriores.

<u>Ejemplo</u>: la sucesión del ejercicio 1 se puede definir: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \end{cases}$

6. Dada la regla de formación de la conocida sucesión de Fibonacci, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$ indica el valor de los 10 primeros términos de dicha sucesión.

7. Indica los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:
   a. $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$
   b. $a_n = 4n + 1$
   c. $a_n = n^2 - 20n$
   d. $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 10 \end{cases}$
   e. $a_n = -5 + n$
   f. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \\ a_n = 2 \cdot a_n + a_{n-1}^2 \end{cases}$

8. Indica la regla de formación de las siguientes sucesiones:
   a. 8, 18, 28, 38, 48, 58,………
   b. 10, 100, 1000, 10.000, 100.000, ….
   c. 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, …

9. Imagina que cierto día se presenta en vuestra casa un señor con apariencia de hombre de negocios y os propone el siguiente <u>trato durante un mes</u>:

   Él os entregará 1000€ el primer día, 2000€ el segundo día, 3000€ el segundo día,…, es decir cada día os entregará 1000€ más que el día anterior.

   A cambio, vosotros entregareis 0'01€ el primer día, 0'02€ el segundo día, 0'04€ el tercer día, 0'08 el cuarto día, es decir cada día el doble del anterior.

   a. Indica la regla de formación de las dos sucesiones anteriores.
   b. ¿Aceptaríais el trato que os propone?

PROGRESIONES ARITMÉTICAS:

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole una cantidad fija llamada **diferencia** "***d***".

Ejemplo: 6, 2, –2, –6, –10, … donde d= – 4

3, 10, 17, 24, 31, … donde d = 7

Ejercicio

10. Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas:
    a. 3, 5, 6, 2, 5, 7, …
    b. –8, –3, 2, 7, 12, 17, …
    c. 25, 21, 17, 13, 9, 5, …
    d. 100, 90, 70, 40, …
    e. $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2},\ldots$

11. En una progresión aritmética conocemos $a_3 = 9 \;\; y \; a_4 = 10{,}5$.
    a. ¿Cuál es la diferencia "d" de esta progresión?
    b. Indica el valor de los 8 primeros términos de la progresión.

12. En una progresión aritmética conocemos $a_3 = 21 \;\; y \; a_6 = 33$. Indica los 10 primeros términos de la progresión.

Término general de una progresión aritmética:

El término general de toda progresión aritmética es de la forma $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

Propiedad: Dados los términos, $a_p \;\; y \; a_q$ de una progresión aritmética (p<q), se cumple que:

$$a_q = a_p + (q-p)\cdot d$$

Ejercicio:

13. Indica el término general de las siguientes progresiones aritméticas:
    a. 3, 12, 21, 30, 39, 48, …
    b. –4, 1, 6, 11, 16, …
    c. 2, 4, 8, 16, 32, …
    d. 16, 13, 10, 7, 4, 1, …
    e. $\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},6,\ldots$
    f. 0'7 ; 1'95 ; 3'2 ; 4'45 …

14. En una progresión aritmética conocemos $a_4 = 24 \;\; y \;\; a_9 = 14$
    a. Calcula la diferencia "d" e indica el término general de la progresión aritmética
    b. Indica los 10 primeros términos de la progresión.

15. En una progresión aritmética $a_7 = 25$ y *d=4*. Averigua el valor de a_{108}

16. En una progresión aritmética $a_2 = 9$ y *d=3*. Averigua el lugar que ocupa un término que vale 102
17. En una progresión aritmética $a_5 = -5$ y *d=–4* . Averigua el lugar que ocupa el término que vale –163

Suma de "n" términos de una progresión aritmética:

Intenta sumar de una manera rápida los 100 primeros números naturales. Como pista te diré que $a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = a_3 + a_{98} = ... = 101$. Por tanto vemos que la suma de los 100 primeros números naturales es 101 · 50 = 5050

De manera análoga la suma, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ de los "n" primeros términos de una progresión aritmética es: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Ejercicio:

18. Calcula la suma de los 20 primeros términos de las siguientes sucesiones:
    a. 4, 14, 24, 34, ….
    b. $a_n = 4 + 3n$
    c. $\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \end{cases}$
19. De una progresión aritmética conocemos $a_5 = 8$ y ***d=-6***. Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión.

20. Calcula la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética de la que conocemos $a_{12} = 27 \quad y \quad a_{18} = 51$.

21. Pedro tiene un puesto ambulante de bocadillos. Si el primer día ganó 20€ y luego fue ganando 12€ más cada día:
    a. ¿Cuánto dinero ganó el décimo día?
    b. ¿Cuánto dinero ganó los 30 primeros días?

22. Ana necesita comprar unos cuántos tornillos para hacer una obra en casa. En la ferretería le venden un tornillo por 40 céntimos y por cada tornillo siguiente le quitan un céntimo.
    a. ¿Cuánto pagará por el 8º tornillo?
    b. Si ha comprado 20 tornillos, ¿cuánto ha pagado por todos ellos?
23. Un taxista cobra 2€ por la bajada de bandera y luego 0,5€ por cada km recorrido.
    a. Indica el término general de la sucesión que nos indica el precio del taxi en función de los km recorridos.
    b. ¿Cuántos km recorrió en el taxi una persona que pagó 50€?

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS:

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo "*r*" al que llamaremos ***razón de la progresión***.

Ejemplo: 2, 4, 8, 16, 32, 64, … donde r=2
486, 162, 54, 18, 6, … donde r=1/3

Nota: En toda progresión geométrica se cumple que: $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\ldots=r$

Ejercicio:

24. Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas, e indica su razón:
    a. 5, 15, 45, 135, 405, …
    b. 10, 50, 250, 1000, 3000, …
    c. 8, 4, 2, 1, 0'5 , 0'25, …
    d. 10, –20, 40, –80, 160, …

25. En una progresión geométrica conocemos $a_4=9 \quad y \quad a_5=3$
    a. Indica la razón de la progresión
    b. Indica los ocho primeros términos de la progresión

Término general de una progresión geométrica

El término general de una progresión geométrica es: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}$

Propiedad: Dados los términos $a_p \quad y \quad a_q$ de una progresión geométrica (p<q) se cumple que: $a_q=a_p\cdot r^{q-p}$

Ejercicio:

26. Indica el término general de las siguientes progresiones geométricas:
    a. 4, 20, 100, 500, 2500, …
    b. $5\sqrt{2},\,10,\,10\sqrt{2},\,20,\,20\sqrt{2},\ldots$
    c. $6,\,3,\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{4},\,\frac{3}{8},\ldots$
    d. 1024 , –256 , 64 , –16 , 4 , …
    e. 3, 6, 18, 72, 360, …

27. En una progresión geométrica conocemos $a_3=80 \quad y \quad a_5=320$
    a. Indica la razón de la progresión
    b. Indica el primer término de la progresión
    c. Indica el término general de la progresión
    d. Indica los ocho primeros términos de la progresión

28. En una progresión geométrica conocemos $a_5 = 9 \;\; y \;\; a_8 = 243$,
    a. Indica la razón de la progresión y su término general
    b. Indica los diez primeros términos de la progresión.

29. En una progresión geométrica conocemos $a_6 = 25 \;\; y \;\; r = 5$,
    a. Indica el valor de a_1 , $a_3, a_{10} \;\; y \; a_{100}$
    b. Indica los valores anteriores en forma de potencia
    c. Indica el término general

30. En una progresión geométrica conocemos $a_3 = \frac{2}{27} \;\; y \;\; r = \frac{1}{3}$. Averigua el lugar que ocupa el término que vale $\frac{2}{2187}$

Suma de "n" términos de una progresión geométrica:

La suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ de los "n" primeros término de una progresión geométrica es $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$

<u>**Demostración**</u>:

Sea $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ y multiplicamos los dos miembros por la razón: $S_n \cdot r = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot r$ y ahora restamos las dos expresiones:

$$S_n \cdot r - S_n = a_n \cdot r - a_1 = (a_1 \cdot r^{n-1}) \cdot r - a_1 = a_1 \cdot r^n - a_1 \Rightarrow S_n \cdot (r-1) = a_1 \cdot (r^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejercicio:

31. Calcula la suma de los 20 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:
    a. 8, 40, 200, 1000, …
    b. $a_n = -10 \cdot 3^{n-1}$
    c. Progresión geométrica de la que conocemos $a_4 = \frac{-1}{2} \;\; y \;\; a_7 = 4$

32. Una ameba se reproduce por bipartición cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá al cabo de 10 horas?

33. Juan ha abierto un fructífero negocio que le proporcionó 10€ de beneficio el primer año y cada año siguiente multiplicó por tres los beneficios del año anterior. Si actualmente lleva un total acumulado de 71.744.530€ de beneficios desde la apertura de su negocio:
    a. ¿Cuántos años lleva el negocio abierto?
    b. ¿Cuáles han sido los beneficios de Juan el último año?

Suma de todos los términos de una progresión geométrica con $|r|<1$

Si en una progresión geométrica su razón cumple $|r|\geq 1$, entonces la suma de sus términos crecerá sin ningún tipo de límite y por tanto no se puede calcular su suma.

En caso de que $-1 < r < 1$, entonces sí podremos calcular la suma de todos los términos de la progresión y esta suma será: $S=\dfrac{a_1}{1-r}$

Ejercicio:

34. Demostración:
    a. Si $-1< r <1$ ¿Qué le ocurre a la expresión r^n cuándo aumentamos "***n***"?
    b. ¿Qué le ocurre a la expresión $S_n=\dfrac{a_1\cdot\left(r^n-1\right)}{r-1}$ si ***n*** crece constantemente y $|r|<1$**?**

35. Calcula la suma de todos los términos de las siguientes progresiones geométricas:
    a. 27, 9, 3, 1, …
    b. $a_1=-7 \quad y \quad r=\dfrac{1}{4}$
    c. $a_3=100 \quad y \quad a_5=4$
    d. $a_3=4 \quad y \quad a_5=100$

36. Calcula la razón de una progresión geométrica en la que S=20 y $a_1=5$

EJERCICIOS DE SUCESIONES Y PROGRESIONES:

37. Interpola tres términos entre 1 y 9 para que formen un progresión aritmética

38. Una importante empresa petrolera posee dos estaciones de servicio en los kilómetros 120 y 520 de una importante carretera nacional. Si desea instalar 4 estaciones entre esas dos de manera que los kilómetros en los que se sitúen formen una progresión aritmética, ¿en qué kilómetros tendrán que poner dichas estaciones?

39. Sabiendo que estas sucesiones son progresiones aritméticas, completa los términos que faltan:
    a. $\_\_\_, \dfrac{1}{2}, \_\_\_, \dfrac{5}{6}, \_\_\_, \_\_\_$
    b. $\_\_\_, 1'5, \_\_\_, 2'5, \_\_\_, \_\_\_$
    c. $\_\_\_, \_\_\_, \_\_\_, \dfrac{5}{3}, \_\_\_, \dfrac{8}{3}$
    d. $\_\_\_, \dfrac{1}{4}, \_\_\_, \_\_\_, \dfrac{1}{2}, \_\_\_$

40. Sea $a_n=4n+1$ el término general de una progresión aritmética. Calcula a_{25} y la suma de los 20 primeros términos de la progresión

41. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 2916?

42. Halla los términos que faltan en las siguientes progresiones geométricas:

a. $1\,,\,0\grave{}1,\,\_\_\_\_,0\grave{}001,\,\_\_\_\_$

b. $\_\_\_,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\_\_\_,\frac{1}{54},\_\_\_$

c. $\_\_\_,\frac{1}{3},\_\_\_,\frac{1}{12},\_\_\_$

d. $\_\_\_,\frac{3}{2},\_\_\_,\_\_\_,\frac{81}{4}$

43. En una progresión geométrica $a_3 = 10 \;\; y \;\; a_6 = 10.000$

a. Calcula "r" y los 10 primeros términos de la progresión
b. Calcula la suma de los 8 primeros términos de la progresión
c. Calcula la suma de todos los términos de la progresión

44. La suma de todos los términos de una progresión geométrica es $\frac{15}{4}$ y la razón es $\frac{1}{5}$. Indica los 5 primeros términos de la progresión.

45. Dejamos caer una pelota desde una altura de 1 metro, y en cada bote que da sube a una altura igual que la mitad del bote anterior.

a. ¿Qué tipo de progresión forma la altura de los botes de la pelota?
b. Indica su término general
c. ¿Qué altura alcanzará en el quinto bote?
d. Calcula la suma de todos los botes que da la pelota.

46. Halla la profundidad de un pozo si por la excavación del primer metro se ha pagado 20€, y por la de cada uno de los restantes se pagan 5€ más que por el anterior, siendo el coste total de 1350€

47. Una rana está al borde de una charca circular de 7 metros de radio y quiere llegar al centro saltando. Da un primer salto de 3 metros y, después avanza en cada salto siguiente la mitad del salto anterior. ¿Logrará llegar al centro?

48. Calcula el perímetro de un hexágono sabiendo que las medidas de sus lados forman una progresión geométrica donde el lado más pequeño vale 2cm y el más grande 4cm.

49. EJERCICIOS DE INTERÉS COMPUESTO:

a. Depositamos en el banco 6000€ al 5% de interés compuesto anual. ¿Qué cantidad de dinero tendremos al cabo de 5 años?
b. Juan ha empezado a trabajar este año. Su jefe le da un sueldo de 900€, pero promete subirle un 3% cada año. ¿Cuál será el sueldo de Juan dentro de 10 años?
c. Ana acaba de dar a luz un bebé que mide 50cm. Si durante el primer año crecerá un 2% cada mes, ¿cuánto medirá al final del año?
d. La familia Pérez posee una tienda de ropas que en el año 2008 tuvo unos beneficios de 60.000€. Debido a la crisis ha estado perdiendo un 10% de beneficios cada año. Indica cuáles serán sus beneficios en este año 2015.

50. Indica el término general de las siguientes sucesiones:

    a. 6, 9, 12, 15, 18,….
    b. 1, 3, 9, 27, 81, …..
    c. 20, 16, 12, 8, 4,…
    d. 1600, 400, 100, 25,….

51. Indica el término que ocupa el lugar 100 en cada una de las sucesiones anteriores.

52. En una progresión aritmética conocemos $a_4 = 68 \quad y \quad a_{12} = 116$,

    a. Calcula la diferencia “d” y el primer término de la progresión a_1
    b. Calcula la suma de los 50 primeros términos de la progresión.

53. Una planta ha crecido 108 cm el primer año. Si sabemos que cada año crece una tercera parte de lo que crece el año anterior, Indica cuál será la altura máxima a la que se acercará esta planta en su crecimiento.

54. Una empresa obtuvo unos beneficios de 1200€ el primer año. Posteriormente ha obtenido 900€ más de beneficios cada año. Si el año pasado tuvo unos beneficios de 99.300€, ¿En qué año se fundó la empresa?

54. Si Juan ha depositado 5000€ en el banco durante 10 años, a un interés compuesto y con un rédito del 2%, ¿de cuánto dinero dispondrá dentro de 10 años?

55. ¿Cuántos múltiplos de 5 consecutivos (positivos y empezando en el 5) debemos tomar para que su suma sea 64.400?

56. Obtén los 5 primeros términos de las sucesiones siguientes:

a) $\left\{a_n = \dfrac{2n-4}{n^2}\right\}$

b) $\begin{cases} b_1 = -2 \\ b_n = (b_{n-1})^2 - 5 \end{cases}$

57. Indica en cada caso, si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas o geométricas y halla también el término general de cada una

a) $\{8, 2, 1/2, 1/8, ...\}$

b) $\{25, 22, 19, 16, ...\}$

c) $\{-5, 10, -20, 40, ...\}$

58. Calcula el término general de la sucesión $\{a_n\} = \left\{\dfrac{5}{3}; \dfrac{7}{6}; \dfrac{9}{12}; \dfrac{11}{24}; ....\right\}$

59. Escribe los 5 primeros términos de la sucesión formada por los múltiplos de 3 que sean mayores que 10. Calcula también la suma de los 100 primeros términos de dicha sucesión.

60. En una progresión Aritmética se sabe que $a_3 = 70 \quad y \quad a_8 = -5$.

a. Calcula el primer término y la diferencia
b. Calcula la suma de los 10 primeros términos

61. Dada la progresión geométrica $\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{4};\frac{5}{8};....\right\}$

   a. Calcula la razón y el término general
   b. Calcula la suma de todos los términos de la progresión

62. Raúl ha decidido empezar a hacer deporte. Es por ello que ha decidido ir a la piscina, hacer el primer día 10 largos, y el siguiente día que acuda a la piscina hacer 2 largos más que el día anterior. Si en este primer mes ha hecho un total de 220 largos, ¿cuántos días ha ido a la piscina este mes? (**1,5 puntos**)

63. Juan ha empezado a trabajar como comercial y para ello ha comprado un coche nuevo que le ha costado 30.000€. A Juan el trabajo le va muy bien y cada año está ganando un 8% más que el anterior. Si inicialmente empezó ganando 20.000€ anuales:
   a. ¿Cuánto dinero habrá ganado a lo largo del décimo año?
   b. Si después de estos 10 años decide vender su coche para comprar uno nuevo, ¿en cuánto se valorará el vehículo, sabiendo que un coche pierde un 10% de su valor cada año?