12 INICIACIÓN AO CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIÓNS

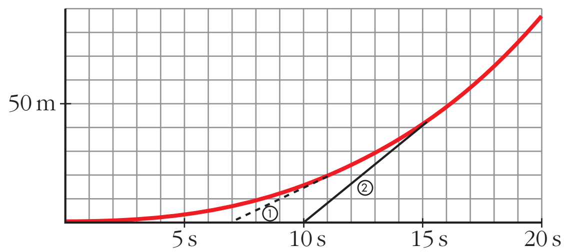
Páxina 301

REFLEXIONA E RESOLVE

Coller un autobús en marcha

Na gráfica seguinte, a liña vermella representa o movemento dun autobús que arranca da parada e vai, pouco a pouco, gañando velocidade.

① e ② corresponden a pasaxeiros que chegan tarde e corren para coller o autobús en marcha.



a) Ao viaxeiro ② achégano en bicicleta. Describe o movemento e calcula a velocidade á que corre.

b) Cal é a velocidade aproximada do autobús no momento que o alcanza o pasaxeiro ②?

Entra este pasaxeiro *suavemente* no autobús?

a) El pasajero 2 llega a la parada 10 s después de que saliera el autobús, y lo alcanza 5 s después, 40 m más allá.

Corrió, por tanto, a $\frac{40}{5}$ = 8 m/s. Es decir: 8 · 3,6 = 28,8 km/h

b) En el instante 14 s está a 35 m de la parada. En el instante 16 s está a 50 m de la parada.

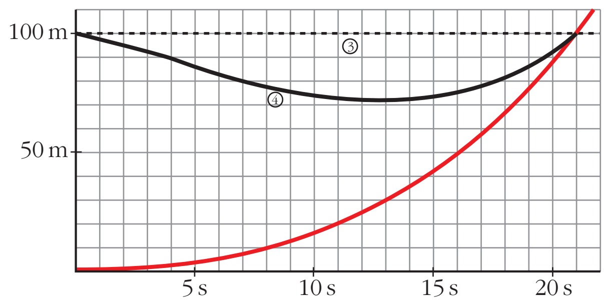
Velocidad media = $\frac{15 \text{ m}}{2 \text{ s}}$ = 7,5 m/s = 27 km/h

Las velocidades del pasajero 2 y del autobús son, aproximadamente, iguales en el momento en el que el pasajero accede al autobús; por tanto, accederá suavemente.

É preferible agardar ou correr tras o autobús?

Os viaxeiros ③ e ④, no momento da saída do autobús, estaban a 100 m da parada. O ③ decide agardalo e entrar nel cando pase por alí.

O ④ ten un estraño comportamento. Estraño?



a) Describe o movemento do pasaxeiro ④.

b) Explica por que o comportamento do pasaxeiro ④ é moito máis sensato có do ③, quen terá moi difícil a entrada no autobús.

a) Intenta alcanzar aproximadamente la velocidad que lleva el autobús para acceder a él suavemente.

b) El pasajero 4 accede suavemente al autobús (con la misma velocidad, aproximadamente); sin embargo, el 3 no.

Carreira de relevos

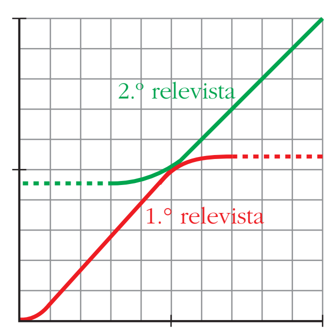
A seguinte gráfica reflicte o comportamento de dous atletas, do mesmo equipo, durante unha carreira de relevos:

a) Por que nas carreiras de relevos 4 × 100 m cada relevista empeza a correr antes de que chegue o seu compañeiro?

b) Que pasaría se agarda quieto a chegada do outro?

c) É razoable que as gráficas dos seus movementos sexan tanxentes?

Como son as súas velocidades no momento da entrega da "testemuña"?



a) Para que el "testigo" pase sin brusquedades del que llega al que se va.

b) El intercambio sería muy brusco y se perdería tiempo.

c) Sí, así llevarán los dos la misma velocidad, aproximadamente.

Páxina 303

1. Indica a T.V.M. da función $y = x^2 - 8x + 12$ nos seguintes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

$$\text{T.V.M. } [1,\ 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1,\ 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1,\ 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1,\ 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1,\ 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1,\ 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1,\ 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

2. Indica a T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ no intervalo variable [1, 1 + h]. Comproba, dándolle a h os valores axeitados, que se obteñen os resultados do exercicio anterior.

$$\text{T.V.M. } [1,\ 1 + \text{h}] = \frac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \frac{(1 + \text{h})^2 - 8(1 + \text{h}) + 12 - 5}{\text{h}} =$$

$$= \frac{\text{h}^2 - 6\text{h}}{\text{h}} = \frac{\text{h}(\text{h} - 6)}{\text{h}} = \text{h} - 6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Páxina 305

1. Determina a derivada de $y = 5x - x^2$ nos puntos de abscisas 4 e 5.

$$f'(4) = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{f(4 + \text{h}) - f(4)}{\text{h}} = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{5(4 + \text{h}) - (4 + \text{h})^2 - 4}{\text{h}} =$$

$$= \lim_{\text{h} \to 0} \frac{20 + 5\text{h} - 16 - \text{h}^2 - 8\text{h} - 4}{\text{h}} = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{-\text{h}^2 - 3\text{h}}{\text{h}} = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{\text{h}(-\text{h} - 3)}{\text{h}} =$$

$$= \lim_{\text{h} \to 0} (-\text{h} - 3) = -3$$

$$f'(5) = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{f(5 + \text{h}) - f(5)}{\text{h}} = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{5(5 + \text{h}) - (5 + \text{h})^2 - 0}{\text{h}} =$$

$$= \lim_{\text{h} \to 0} \frac{(5 + \text{h})(5 - 5 - \text{h})}{\text{h}} = \lim_{\text{h} \to 0} (-5 - \text{h}) = -5$$

2. **Determina a derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ nos puntos de abscisas 1, –1 e 5.**

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(1+h-2)] - (-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-1)] + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 3}{(h-1)h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(-1+h-2)] - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-3)] + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 3}{h(h-3)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(5+h-2)] - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h+3)] - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{h(h+3)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h+3} = -\frac{1}{3}$$

3. **Determina a derivada de $y = \frac{1}{x}$ nos puntos de abscisas –2, –1, 1 e 2.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[1/(-2+h)] - (-1/2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h/(-4-2h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = \frac{-1}{4}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[1/(-1+h)] - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h/(h-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-1} = -1$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[1/(1+h)] - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-1-h)}{h(1+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[1/(2+h)] - (1/2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-2-h)/2 \cdot (2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h \cdot (4+2h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{4+2h} = \frac{-1}{4}$$

4. **Determina a derivada de $y = x^2 - 2x$ nos puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3 e 4.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 - 4h + 4 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-6)}{h} = -6$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 - 2h + 2 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h} = -2$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 2 - 2h + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2(2+h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 6 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 2(4+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 8 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+6)}{h} = 6$$

Páxina 306

1. **Determina a derivada da función $f(x) = 5x - x^2$ e comproba que, a partir dela, se poden obter os valores concretos determinados no exercicio resolto 1 e mais no exercicio proposto 1 da páxina anterior.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - (x+h)^2 - (5x - x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - x^2 - h^2 - 2xh - 5x + x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2xh + 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-h - 2x + 5)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h - 2x + 5) = -2x + 5$$

Sustituyendo x por los valores indicados, obtenemos:

$f'(1) = 3$ $\quad f'(0) = 5$ $\quad f'(3) = -1$ $\quad f'(4) = -3$ $\quad f'(5) = -5$

2. Indica a derivada de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3x h^2 + 3x^2 h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h^2 + 3xh + 3x^2)}{h} = 3x^2$$

3. Indica a derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ e comproba que, a partir dela, se poden obter os valores concretos calculados no exercicio resolto 2 e no exercicio proposto 2 da páxina anterior.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3/(x + h - 2) - 3/(x - 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x - 2) - 3(x + h - 2)}{h(x - 2)(x + h - 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{3x - 6 - 3x - 3h + 6}{h(x - 2)(x + h - 2)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(x - 2)(x + h - 2)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x - 2)(x + h - 2)} = \frac{-3}{(x - 2)^2}$$

Sustituyendo x por los valores indicados, obtenemos:

$f'(4) = -\dfrac{3}{4}$ $\quad f'(1) = -3$ $\quad f'(-1) = -\dfrac{1}{3}$ $\quad f'(5) = -\dfrac{1}{3}$

4. Indica a función derivada de $y = x^3 + x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 + (x + h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - x^3 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x$$

Páxina 308

Indica a función derivada das seguintes funcións:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 6x - 6$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = sen\ x\ cos\ x$

$f'(x) = cos^2 x - sen^2 x$

6. $f(x) = tg\ x$

$$f'(x) = 1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x}$$

7. $f(x) = x\ e^x$

$f'(x) = e^x + x\ e^x = e^x(1 + x)$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot ln\ 2 = 2^x(1 + x\ ln\ 2)$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot log_2 x$

$$f'(x) = 2x\ log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 2} = 2x\ log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x\ ln\ 2}$$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\ 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)\,x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$$

12. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$$f'(x) = \frac{[1/(\ln 10)] - \log x}{x^2} = \frac{1 - \ln 10 \log x}{x^2 \ln 10}$$

Páxina 309

Indica a función derivada das seguintes funcións:

13. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 7)$

14. $f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$$

15. $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1)$

$f'(x) = 3\,[\cos^2(3x + 1) - \operatorname{sen}^2(3x + 1)]$

16. $f(x) = \dfrac{\log x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{2\log x}{x} \to f'(x) = \frac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

17. $f(x) = \cos(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\operatorname{sen}(3x - \infty)$

18. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$$

19. $f(x) = x\,e^{2x + 1}$

$f'(x) = e^{2x + 1} + x\,e^{2x + 1} \cdot 2 = e^{2x + 1}(1 + 2x)$

20. $f(x) = \dfrac{sen(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\; cos\,(x^2+1) + [x\; sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{2x\,(1-x^2)\; cos\,(x^2+1) + x\; sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Páxina 310

1. **Calcula a función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ e determina:**

a) As pendentes das rectas tanxentes nas abscisas –1, 1 e 3.

b) As ecuacións desas rectas tanxentes.

c) As abscisas dos posibles máximos e mínimos relativos.

d) É $f(x)$ crecente ou decrecente en $x = 2$?

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

a) $f'(-1) = 11,\ f'(1) = -5,\ f'(3) = 3$

b) $y = 11(x+1) - 4;\quad y = -5(x-1) - 2;\quad y = 3(x-3) - 8$

c) $f'(x) = 0 \ \to\ 3x^2 - 8x = 0 \ \to\ x = 0,\ x = 8/3$

d) $f'(2) = -4 < 0 \ \to$ decreciente

Páxina 311

LINGUAXE MATEMÁTICA

1. **Na fórmula que serve para determinar a ecuación da recta tanxente a unha curva nun punto**

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di o papel que desempeña cada unha das letras que interveñen. O x é a variable independente, de que función?

f es el nombre de la función; a es la abscisa, el punto de la curva en el cual se traza la tangente; $f(a)$ es la ordenada de ese punto, y $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente, pues f' es el nombre de la función derivada.

Las variables x e y son la abscisa y la ordenada de un punto genérico (un punto cualquiera) de la recta tangente.

x es, pues, la variable independiente de la función lineal descrita por la recta tangente a f en el punto de abscisa a.

Páxina 313

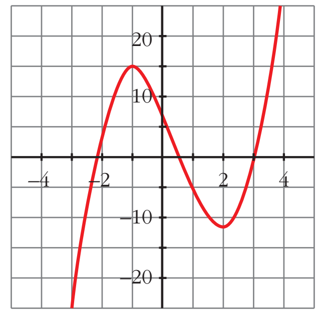
1. **Representa estas funcións:**

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 2$

Máximo en $(-1, 15)$.

Mínimo en $(2, -12)$.



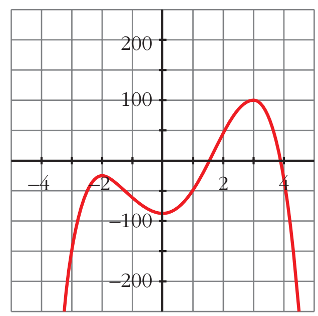
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en $(-2, -26)$ y en $(3, 99)$.

Mínimo en $(0, -90)$.



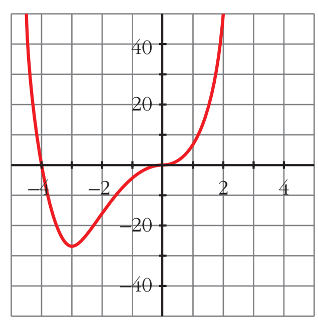
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en $(-3, -27)$.

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-4, 0)$



Páxina 315

1. **Representa as seguintes funcións racionais, seguindo os pasos da páxina anterior:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x-11}{(x+1)^2} =$

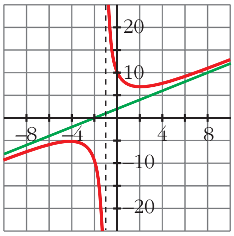
$= \dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 2,\; x_2 = -4$

Máximo en $(-4, -5)$.

Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x)}{(x+1)^2} =$

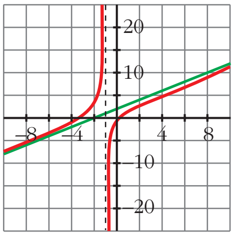
$= \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-3, 0)$

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

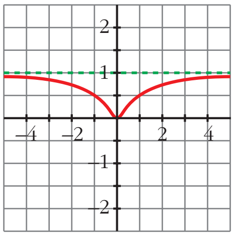


c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} =$

$= \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \;\rightarrow\; x = 0$

Mínimo en $(0, 0)$.

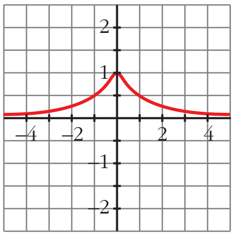
Asíntota horizontal: $y = 1$



d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \;\rightarrow\; x = 0$

Máximo en $(0, 1)$.

Asíntota horizontal: $y = 0$



e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

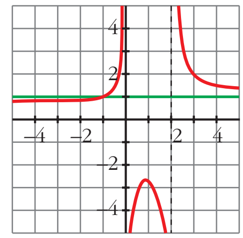
$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$

Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$



f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

$$y = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}; \quad y = 1 \text{ es asíntota horizontal}$$

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

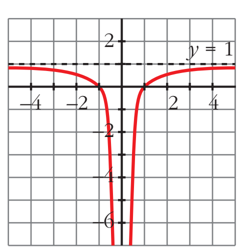
$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) \neq 0 \;\to\; f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$. Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).

• Gráfica:



Páxina 320

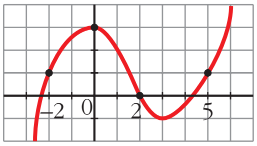
EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

Taxa de variación media

1 **Calcula a taxa de variación media desta función nos intervalos:**

a) [–2, 0] **b) [0, 2]** **c) [2, 5]**



a) T.V.M. $[-2, 0] = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$

b) T.V.M. $[0, 2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - 3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

c) T.V.M. $[2, 5] = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{1 - 0}{3} = \dfrac{1}{3}$

2 **Indica a taxa de variación media destas funcións no intervalo [1, 3] e indica se esas funcións crecen ou decrecen nese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$

b) $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

d) $f(x) = 2^x$

☛ ***Se a T.V.M. é positiva, a función crece.***

T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{f(3) - f(1)}{2}$

a) T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Decrece

b) T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow$ Decrece

c) T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

d) T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

3 **Dada a función $f(x) = x^2 - 1$, indica a taxa de variación media no intervalo $[2, 2 + h]$.**

$$\text{T.V.M. } [2,\ 2 + h] = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$$

4 **Comproba que a T.V.M. da función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ no intervalo $[1, 1 + h]$ é igual a $-h + 3$. Calcula a T.V.M. desa función nos intervalos $[1, 2]$, $[1; 1{,}5]$, utilizando a expresión anterior.**

$$\text{T.V.M. } [1,\ 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h^2 + 2h) + 5 + 5h - 3 - 1}{h} =$$

$$= 3 - h = -h + 3$$

T.V.M. $[1,\ 2] = 2$

T.V.M. $[1;\ 1{,}5] = 2{,}5$

5 **Compara a T.V.M. das funcións $f(x) = x^3$ e $g(x) = 3^x$ nos intervalos $[2, 3]$ e $[3, 4]$, e di cal das dúas crece máis en cada intervalo.**

Para $f(x)$: T.V.M. $[2,\ 3] = 19$

T.V.M. $[3,\ 4] = 37$

Para $g(x)$: T.V.M. $[2,\ 3] = 18$

T.V.M. $[3,\ 4] = 54$

En $[2, 3]$ crece más $f(x)$.

En $[3, 4]$ crece más $g(x)$.

Definición de derivada nun punto

6 **Aplicando a definición de derivada, calcula $f'(-2)$ e $f'(3)$, onde:**

$$f(x) = \frac{2x - 3}{5}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{\dfrac{2(-2 + h) - 3}{5} + \dfrac{7}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-4 + 2h - 3 + 7}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{\dfrac{2(3 + h) - 3}{5} - \dfrac{3}{5}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 2h - 3 - 3}{5h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

7 **Indica a derivada das seguintes funcións en $x = 1$, utilizando a definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1 + h)^2 - 1 - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h + 6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1 + h) + 1)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h + 3)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h + 12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1 + h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - 3 - 3h}{h(1 + h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1 + h + 2} - \dfrac{1}{3}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - h - 3}{3(h + 3)\,h} = -\dfrac{1}{9}$

8 **Indica o valor do crecemento de $f(x) = (x - 3)^2$ nos puntos $x = 1$ e $x = 3$, aplicando a definición de derivada.**

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1 + h - 3)^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h - 4) = -4$

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h - 3)^2 - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h = 0$

9 **Determina a pendente da tanxente á curva $y = x^2 - 5x + 1$ no punto de abscisa $x = -2$, utilizando a definición de derivada.**

$f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-2 + h)^2 - 5(-2 + h) + 1 - 15}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (h - 9) = -9$

10 **Determina a pendente da tanxente á curva $y = 4x - x^2$ no punto de abscisa $x = 2$, aplicando a definición de derivada.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(2 + h) - (2 + h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} (-h) = 0$$

11 **Comproba, utilizando a definición de derivada en cada caso:**

a) $f(x) = 5x \to f'(x) = 5$

b) $f(x) = 7x^2 \to f'(x) = 14x$

c) $f(x) = x^2 + x \to f'(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x} \to f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x + h) - 5x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 5x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = 5$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7(x + h)^2 - 7x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7h^2 + 14xh}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(7h + 14x)}{h} = 14x$$

c) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 + (x + h) - (x^2 + x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = 2x + 1$$

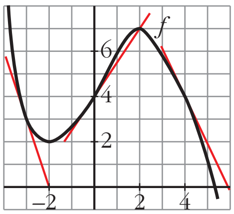
d) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{x + h} - \dfrac{3}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3x - 3(x + h)}{x(x + h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3x - 3x - 3h}{x(x + h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{-3h}{x(x + h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{hx(x + h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{x(x + h)} = \frac{-3}{x^2}$$

12 **Indica f' nos puntos de abscisas –3, 0 e 4.**

☛ ***Determina as pendentes das rectas tanxentes trazadas neses puntos.***



$f'(-3) = -3, \quad f'(0) = \frac{3}{2}, \quad f'(4) = -2$

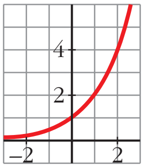
13 **Indica, na gráfica do exercicio anterior, os puntos nos que a derivada é cero. En $x = 1$, a derivada é positiva ou negativa? E en $x = 3$?**

$f'(x) = 0$ en (–2, 2) y en (2, 7).

En $x = 1$ la derivada es positiva. En $x = 3$ es negativa.

14 **Existe algún punto nesta función no que a derivada sexa negativa?**

Ordena de menor a maior os valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ e $f'(0)$.



No, pues es creciente.

$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$

Regras de derivación

Indica a función derivada destas funcións e calcula o seu valor nos puntos que se indican:

15 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6; \quad x = 1$

$f'(x) = 6x^2 + 6x; \quad f'(1) = 12$

16 $f(x) = \cos(2x + \pi); \quad x = 0$

$f'(x) = -2 \, sen(2x + \pi); \quad f'(0) = 0$

17 $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2}; \quad x = -\frac{17}{3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}; \quad f'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$

18 $f(x) = \frac{1}{7x + 1}; \quad x = 0$

$f'(x) = \frac{-7}{(7x + 1)^2}; \quad f'(0) = -7$

19 $\boldsymbol{f(x) = sen\,\frac{x}{2} + cos\,\frac{x}{2};\ \ x = \pi}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(cos\,\frac{x}{2} - sen\,\frac{x}{2}\right);\ \ f'(\pi) = -\frac{1}{2}$

20 $\boldsymbol{f(x) = \frac{2}{(x+3)^3};\ \ x = -1}$

$f(x) = 2(x+3)^{-3} \rightarrow f'(x) = -6(x+3)^{-4} = \frac{-6}{(x+3)^4}$

$f'(-1) = \frac{-6}{16} = \frac{-3}{8}$

21 $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2};\ \ x = 2}$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2};\ \ f'(2) = \frac{23}{2}$

Páxina 321

22 $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}};\ \ x = 8}$

$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}};\ \ f'(8) = -\frac{1}{16}$

23 $\boldsymbol{f(x) = x\,sen(\pi - x);\ \ x = \frac{\pi}{2}}$

$f'(x) = sen(\pi - x) + x\,cos(\pi - x)\cdot(-1) = sen(\pi - x) - x\,cos(\pi - x)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

24 $\boldsymbol{f(x) = (5x-2)^3;\ \ x = \frac{1}{5}}$

$f'(x) = 15(5x-2)^2;\ \ f'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$

25 $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+5}{x-5};\ \ x = 3}$

$f'(x) = \frac{-10}{(x-5)^2};\ \ f'(3) = -\frac{5}{2}$

Indica a función derivada destas funcións:

26 **a)** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ **b)** $f(x) = (x^2 - 3)^3$

a) $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $f'(x) = 6x(x^2 - 3)^2$

27 **a)** $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $f'(x) = 1$ (si $x \neq 0$) b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28 **a)** $f(x) = \sqrt[3]{(x + 6)^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{sen\ x}$

a) $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x + 6)}}$ b) $f'(x) = \dfrac{cos\ x}{2\sqrt{sen\ x}}$

29 **a)** $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1 - x^2}}$ **b)** $f(x) = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$

a) $f(x) = -3(1 - x^2)^{-1/2}$; $f'(x) = \dfrac{3}{2}(1 - x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

b) $f'(x) = 7^{x+1} \cdot ln\ 7 \cdot e^{-x} + 7^{x+1} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 7^{x+1} \cdot e^{-x}(ln\ 7 - 1)$

30 **a)** $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}$ **b)** $f(x) = ln\ 3x + e^{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1}{3x^2} + \dfrac{1}{3}$ b) $f'(x) = \dfrac{3}{3x} + e^{\sqrt{x}}\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

31 **a)** $f(x) = \left(\dfrac{x}{1 + x^2}\right)^2$ **b)** $f(x) = e^{2x} \cdot tg\ x$

a) $f'(x) = 2\left(\dfrac{x}{1 + x^2}\right) \cdot \dfrac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2x}{(1 + x^2)} \cdot \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^3}$

b) $f'(x) = 2e^{2x}\ tg\ x + e^{2x}(1 + tg^2\ x) = e^{2x}(2\ tg\ x + 1 + tg^2\ x) = e^{2x}(1 + tg\ x)^2$

32 **a)** $f(x) = \dfrac{x^3}{(x - 1)^2}$ **b)** $f(x) = cos^2\ x + e^{sen\ x}$

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x - 1)^2 - x^3 \cdot 2(x - 1)}{(x - 1)^4} = \dfrac{3x^2(x - 1) - 2x^3}{(x - 1)^3} = \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x - 1)^3} =$

$= \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x - 1)^3}$

b) $f'(x) = 2\ cos\ x(-sen\ x) + e^{sen\ x} \cdot cos\ x = cos\ x(-2\ sen\ x + e^{sen\ x})$

33 **a)** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{1-x}}$

a) $f(x) = \left(\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)^{1/2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)^{-1/2} \cdot \dfrac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^3}\right)^{1/2} \cdot \dfrac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot \dfrac{x^4 - 12x^2}{\sqrt{(x^2-4)^3}} =$

$= \dfrac{x^4 - 12x^2}{2\sqrt{x^3(x^2-4)}}$

b) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \dfrac{1}{2} \cdot e^{1-x} + \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = \dfrac{3}{8}x^2 e^{1-x} - \dfrac{1}{8}x^3 e^{1-x} =$

$= \dfrac{x^2}{8} e^{1-x}(3-x) = \dfrac{x^2(3-x)\, e^{1-x}}{8}$

34 **a)** $\boldsymbol{f(x) = sen\ \dfrac{3\pi}{2}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = log\ \dfrac{x^2}{3-x}}$

a) $f'(x) = 0$

b) $f(x) = log\ x^2 - log\,(3-x) = 2\ log\ x - log\,(3-x)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x\ ln\ 10} + \dfrac{1}{(3-x)\ ln\ 10}$

35 **a)** $\boldsymbol{f(x) = tg^3\ x^2}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{ln\ x}}$

a) $f'(x) = 3\ tg^2\ x^2 (1 + tg^2\ x^2) \cdot 2x = 6x\ tg^2\ x^2\ (1 + tg^2\ x^2)$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{ln\ x}}$

36 **a)** $\boldsymbol{f(x) = arc\ sen\ \dfrac{x^2}{3}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = arc\ tg\,(x^2+1)}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2/3)^2}} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2x/3}{\sqrt{1-x^4/9}} = \dfrac{2x}{\sqrt{9-x^4}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

37 **a)** $\boldsymbol{f(x) = arc\ cos\ \dfrac{1}{x}}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = arc\ tg\ \dfrac{\sqrt{x}}{2}}$

a) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(1/x)^2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\sqrt{x}/2\right)^2} \cdot \dfrac{1}{4\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4\sqrt{x}\,(1+(x/4))} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(4+x)}$

38 **a)** $f(x) = \sqrt{arc\ tg\ x}$ **b)** $f(x) = arc\ cos\ e^{-x}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{arc\ tg\ x}} \cdot \dfrac{1}{(1 + x^2)} = \dfrac{1}{2(1 + x^2)\sqrt{arc\ tg\ x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$

39 **a)** $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = arc\ tg\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(\dfrac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}\right) =$

$= \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x(x + \sqrt{x})}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + [(1 - x)/(1 + x)]^2} \cdot \dfrac{-1(1 + x) - (1 - x)}{(1 + x)^2} =$

$= \dfrac{1}{1 + [(1 - x)^2/(1 + x)^2]} \cdot \dfrac{-1 - x - 1 + x}{(1 + x)^2} =$

$= \dfrac{(1 + x)^2}{(1 + x)^2 + (1 - x)^2} \cdot \dfrac{-2}{(1 + x)^2} = \dfrac{-2}{(1 + x)^2 + (1 - x)^2} =$

$= \dfrac{-2}{1 + x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x} = \dfrac{-2}{2x^2 + 2} = \dfrac{-2}{2(x^2 + 1)} = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

Puntos nos que a derivada vale *k*

40 **Determina os puntos nos que a derivada é igual a 0 nas seguintes funcións:**

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$

b) $y = x^3 - 3x$

a) $f'(x) = 6x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{3}$. Punto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 1$. Puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$

41 **Obtén os puntos onde $f'(x) = 1$ nos seguintes casos:**

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **b)** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 5}$

a) $f'(x) = 2x - 3;\; 2x - 3 = 1 \;\rightarrow\; x = 2;\; f(2) = 0 \;\rightarrow\; P(2, 0)$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+5)^2}$; $\dfrac{4}{(x+5)^2} = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow (x+5)^2 = 4 \begin{cases} x = -3;\ f(-3) = -1 \rightarrow P(-3, -1) \\ x = -7;\ f(-7) = 3 \rightarrow Q(-7, 3) \end{cases}$$

42 **Indica os puntos nos que a derivada de cada unha das seguintes funcións é igual a 2:**

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = \ln(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2;\ f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2} \rightarrow \dfrac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow (x+2)^2 = 1 \begin{cases} x = -1;\ f(-1) = -1 \rightarrow P(-1, -1) \\ x = -3;\ f(-3) = 3 \rightarrow Q(-3, 3) \end{cases}$$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} \rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2;$

$f(-2) = 4 \rightarrow P(-2, 4)$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1} \rightarrow \dfrac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow x = \dfrac{3}{4};\ f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \ln 2 \rightarrow P\left(\dfrac{3}{4}, \ln 2\right)$

43 **Indica os puntos nos que a derivada vale 0 en cada un dos seguintes casos:**

a) $y = 2x^2 - 8x + 5$

b) $y = -x^2 + 5x$

c) $y = x^4 - 4x^2$

d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

a) $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2;\ f(2) = -3 \rightarrow P(2, -3)$

b) $f'(x) = -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2};\ f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{4} \rightarrow P\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{25}{4}\right)$

$$\text{c) } f'(x) = 4x^3 - 8x \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0) \\ x = \sqrt{2};\ f(\sqrt{2}) = -4 \rightarrow Q(\sqrt{2}, -4) \\ x = -\sqrt{2};\ f(-\sqrt{2}) = -4 \rightarrow R(-\sqrt{2}, -4) \end{cases}$$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0;\ f(0) = 1 \rightarrow P(0, 1)$

Recta tanxente

44 **Indica a ecuación da recta tanxente á curva $y = x^2 - 5x + 6$ no punto de abscisa $x = 2$.**

$f'(x) = 2x - 5;\quad m = f'(2) = -1,\ f(2) = 0$

La recta es $y = -(x - 2) = 2 - x$.

45 **Escribe a ecuación da recta tanxente a $y = -x^2 + 2x + 5$ no punto de abscisa $x = -1$.**

$f'(x) = -2x + 2;\quad m = f'(-1) = 4,\ f(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$.

46 **Escribe a ecuación da recta tanxente a $y = x^2 + 4x + 1$ cuxa pendente sexa igual a 2.**

$f'(x) = 2x + 4 = 2 \ \to\ x = -1;\ f(-1) = -2$

La recta es $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$.

47 **Indica a ecuación da recta tanxente á curva $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.**

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}};\quad m = f'(0) = \dfrac{1}{2},\ f(0) = 1$

La recta es $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Puntos singulares

48 **Obtén os puntos singulares das seguintes funcións:**

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$ **d)** $y = x^3 - 12x$

a) $f'(x) = 6x - 2 \ \to\ 6x - 2 = 0 \ \to\ x = \dfrac{1}{3};\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{14}{3} \ \to\ P\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x \ \to\ 6x^2 - 6x = 0 \ \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 1 \ \to\ P(0, 1) \\ x = 1;\ f(1) = 0 \ \to\ Q(1, 0) \end{cases}$

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \ \to\ 4x^3 - 12x^2 = 0 \ \begin{cases} x = 0;\ f(0) = 0 \ \to\ P(0, 0) \\ x = 3;\ f(3) = -27 \ \to\ Q(3, -27) \end{cases}$

d) $f'(x) = 3x^2 - 12 \ \to\ 3x^2 - 12 = 0 \ \begin{cases} x = 2;\ f(2) = -16 \ \to\ P(2, -16) \\ x = -2;\ f(-2) = 16 \ \to\ Q(-2, 16) \end{cases}$

49 **Indica os puntos singulares das seguintes funcións:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 1;\ f(1) = 2 \rightarrow P(1, 2) \\ x = -1;\ f(-1) = -2 \rightarrow Q(-1, -2) \end{array} \right.$$

b) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0;\ f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$

Páxina 322

50 **Comproba que as seguintes funcións non teñen puntos singulares:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución.

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \rightarrow \dfrac{-1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución.

Crecemento e decrecemento

51 **Observa os resultados obtidos nos exercicios 15 ao 25 e di se cada unha das funcións dadas é crecente ou decrecente no punto que se indica.**

15) Creciente. 16) Ni crece ni decrece. 17) Creciente. 18) Decreciente.

19) Decreciente. 20) Decreciente. 21) Creciente. 22) Decreciente.

23) Creciente. 24) Creciente. 25) Decreciente.

52 **Obtén os intervalos de crecemento e de decrecemento de cada unha das seguintes funcións:**

a) $y = \dfrac{3x + 1}{2}$ **b)** $y = 5 - 2x$ **c)** $y = x^2 - 3x + 2$

d) $y = 2x - x^2$ **e)** $y = x^3$ **f)** $y = x^3 - 3x$

a) $f'(x) = \dfrac{3}{2} \;\to\;$ Creciente en $(-\infty, +\infty)$.

b) $f'(x) = -2 \;\to\;$ Decreciente en $(-\infty, +\infty)$

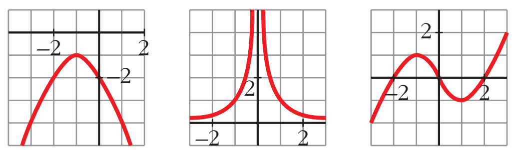
c) $f'(x) = 2x - 3 \;\to\;$ Crece en $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right)$.

d) $f'(x) = 2 - 2x \;\to\;$ Crece en $(-\infty, 1)$. Decrece en $(1, +\infty)$.

e) $f'(x) = 3x^2 \;\to\;$ Creciente en $(-\infty, +\infty)$.

f) $f'(x) = 3x^2 - 3 \;\to\;$ Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.

53 **Indica en cada unha destas funcións os valores de x nos que f' é positiva e nos que f' é negativa.**



☛ ***Observa o seu crecemento e decrecemento. A primeira crece se $x < -1$.***

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

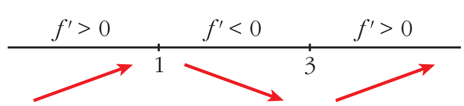
c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

54 **Dada a función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén a súa función derivada e estuda o seu signo.**

Cales son os intervalos de crecemento e de decrecemento de f? Ten f máximo ou mínimo?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \;\to\; 3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$



Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Decrece en $(1, 3)$.

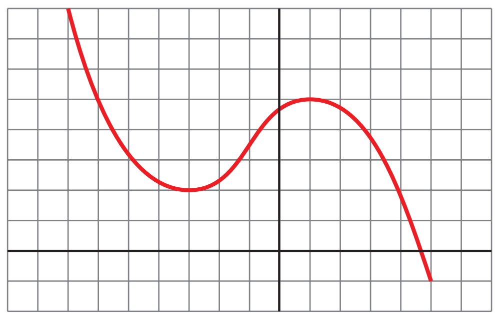
Máximo en $x = 1$. Mínimo en $x = 3$.

Gráficas de funcións polinómicas e racionais

55 **Representa unha función $y = f(x)$ da que sabemos:**

- **É continua.**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Ten tanxente horizontal en (–3, 2) e en (1, 5).**

Indica se os puntos de tanxente horizontal son máximos ou mínimos.



(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.

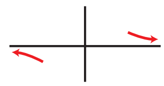
56 **Dunha función polinómica sabemos que:**

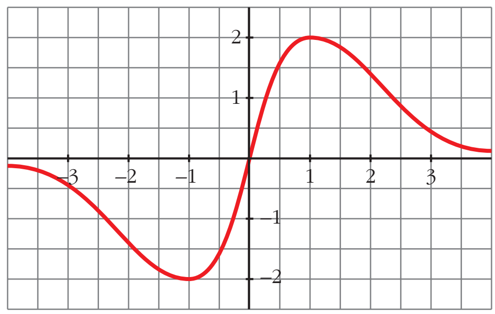
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **A súa derivada é igual a 0 en (–2, 2) e en (2, –1).**
- **Corta os eixes en (0, 0) e en (4, 0).**

Represéntaa graficamente.

57 **Representa a función continua $y = f(x)$ da que sabemos:**

- **Nos puntos (–1, –2) e (1, 2) a tanxente é horizontal.**
- **As súas ramas infinitas son así:**





58 **Comproba que a función $y = (x - 1)^3$ pasa polos puntos (0, –1), (1, 0) e (2, 1). A súa derivada anúlase no punto (1, 0). Pode ser un máximo ou un mínimo ese punto?**

$f'(x) = 3(x - 1)^2$: $f(0) = -1 \rightarrow$ pasa por $(0, -1)$

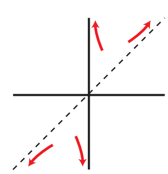
$f(1) = 0 \rightarrow$ pasa por $(1, 0)$

$f(2) = 1 \rightarrow$ pasa por $(2, 1)$

$f'(1) = 0$

El punto (1, 0) no es ni máximo ni mínimo.

59 **Comproba que a función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ ten dous puntos de tanxente horizontal, (–1, –2) e (1, 2); as súas asíntotas son $x = 0$ e mais $y = x$ e a posición da curva respecto das asíntotas é a que se indica na ilustración da dereita. Represéntaa.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

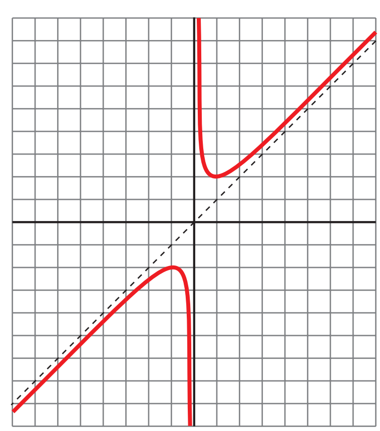
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$



60 **Comproba que a función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$:**

- **Ten derivada nula en (0, 0).**
- **A recta $y = 2$ é unha asíntota horizontal.**
- **Posición da curva respecto á asíntota:**

  Se $x \to -\infty$, $y < 2$

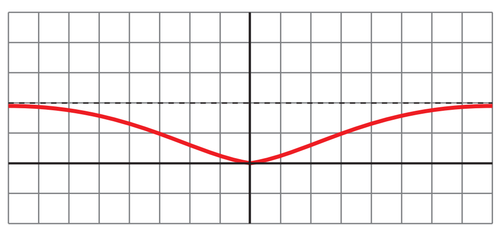
  Se $x \to +\infty$, $y < 2$

Represéntaa.

- $f'(x) = \dfrac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $f'(0) = 0;\ f(0) = 0$

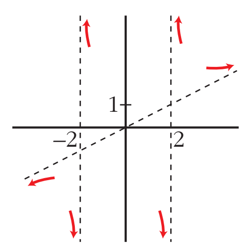
- $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$

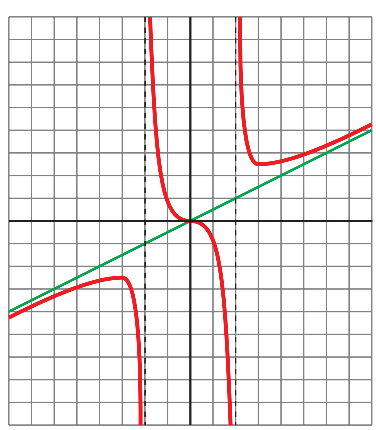


61 **Completa a gráfica dunha función da que sabemos que ten tres puntos singulares:**

$\left(-3, -\dfrac{5}{2}\right)$, (0, 0) e $\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$

e cuxas ramas infinitas son as representadas.

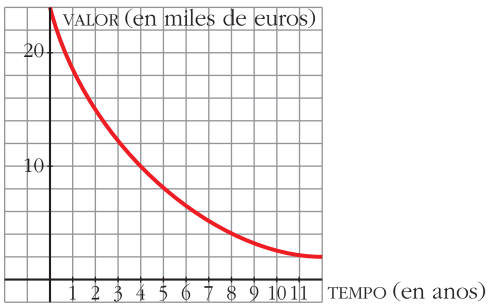




Páxina 323

PARA RESOLVER

62



Os coches, unha vez que se compran, empezan a perder valor: un 20% cada ano, aproximadamente. Esta gráfica mostra o valor dun coche desde que se comprou ata 12 anos máis tarde.

Calcula o que se deprecia o coche nos dous primeiros anos, entre os anos 4 e 6, e entre os anos 8 e 10. É constante a depreciación?

Depreciación: $[0, 2] \to 9\,000$ €

$[4, 6] \to 3\,500$ €

$[8, 10] \to 1\,500$ €

La depreciación no es constante.

63 **Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á curva $y = x^3 - 3x$ que sexan paralelas á recta $6x - y + 10 = 0$.**

☛ ***A pendente da recta é o coeficiente de x cando y está despexado.***

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 6 \to x = -\sqrt{3},\ x = \sqrt{3}$. Puntos: $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}, 0\right)$

Rectas: $y = 6\left(x + \sqrt{3}\right),\ y = 6\left(x - \sqrt{3}\right)$

64 **Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á función $y = 4 - x^2$ nos puntos de corte co eixe de abscisas.**

Puntos de corte con el eje de abscisas: $4 - x^2 = 0 \to x = 2,\ x = -2$

Puntos: (2, 0) y (–2, 0)

$$f'(x) = -2x,\quad f'(2) = -4,\quad f'(-2) = 4$$

Las rectas son:
- En $x = -2,\ y = 4x + 8$
- En $x = 2,\ y = -4x + 8$

65 **a) Cal é a derivada de $y = 2x + 8$ en calquera punto?**

b) Canto ten que valer x para que a derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sexa igual a 2?

c) En que punto a recta tanxente á gráfica da función $y = x^2 - 6x + 5$ é paralela á recta $y = 2x + 8$?

a) $f'(x) = 2$

b) $f'(x) = 2x - 6 = 2 \rightarrow x = 4$

c) En el punto $(4, -3)$.

66 **En que puntos a recta tanxente a $y = x^3 - 4x$ ten a pendente igual a 8?**

$f'(x) = 3x^2 - 4 = 8 \rightarrow x = -2, \; x = 2$

Puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

67 **Escribe as ecuacións das rectas tanxentes á curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas á recta $2x + y = 0$.**

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x = 0, \; x = 2$$

En $(0, 0)$, $y = -2x$

En $(2, 4)$, $y = -2(x - 2) + 4 = -2x + 8$

68 **Indica os puntos de tanxente horizontal da función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.**

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1, \; x = 3.$

Puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

69 **En que puntos de $y = 1/x$ a recta tanxente é paralela á bisectriz do segundo cuadrante?**

Existe algún punto de tanxente horizontal nesa función?

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = -1, \; x = 1.$ Puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

No existe ningún punto de tangente horizontal, pues $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

70 **A ecuación da recta tanxente a unha función $f(x)$ no punto de abscisa $x = 2$ é $4x - 3y + 1 = 0$. Cal é o valor de $f'(2)$? E o de $f(2)$?**

☛ ***Indica a pendente desa recta e ten en conta a súa relación coa derivada.***

La recta tangente es $y = \dfrac{4x + 1}{3}$; su pendiente es $\dfrac{4}{3} = f'(2)$

$f(2) = 3$

71 **Aplica as propiedades dos logaritmos para derivar as seguintes funcións:**

a) $f(x) = ln\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = ln\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ **c)** $f(x) = ln\,x\,e^{-x}$

d) $f(x) = log\,\dfrac{(3x-5)^3}{x}$ **e)** $f(x) = log\,(tg\,x)^2$ **f)** $f(x) = ln\,x^x$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,[ln\,x - ln\,(x^2+1)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

c) $f(x) = ln\,x + ln\,e^{-x} = ln\,x - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

d) $f(x) = 3\,log\,(3x-5) - log\,x$

$$f'(x) = 3\cdot\frac{3}{3x-5}\cdot\frac{1}{ln\,10} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{ln\,10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\,10}\cdot\frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\,10\,(3x^2-5x)}$$

e) $f(x) = 2\,log\,(tg\,x)$

$$f'(x) = 2\cdot\frac{1+tg^2\,x}{tg\,x}\cdot\frac{1}{ln\,10} = \frac{2(1+tg^2\,x)}{tg\,x\cdot ln\,10}$$

f) $f(x) = x\,ln\,x$

$$f'(x) = ln\,x + x\cdot\frac{1}{x} = ln\,x + 1$$

72 **En cada unha das seguintes funcións, determina os puntos singulares e, con axuda das ramas infinitas, decide se son máximos ou mínimos. Represéntaas:**

a) $y = x^3 - 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x + 2$

c) $y = x^4 + 4x^3$ **d)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e) $y = 12x - x^3$ **f)** $y = -x^4 + x^2$

g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **h)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

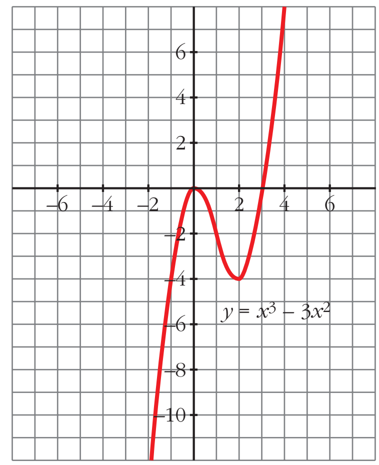
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -4 \rightarrow (2, -4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$



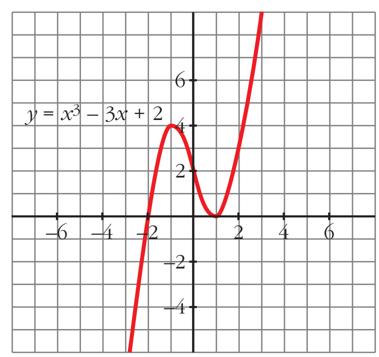
b) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$



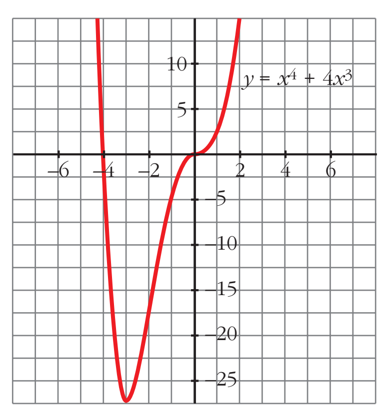
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3, -27) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$$



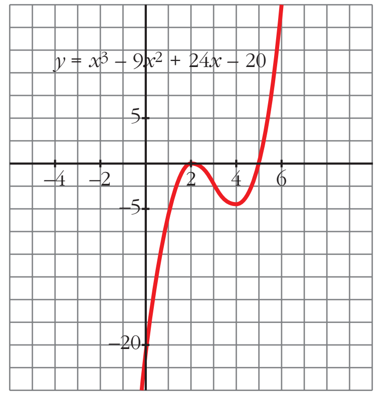
d) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24; \quad f'(x) = 0 \iff$

$$\iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$

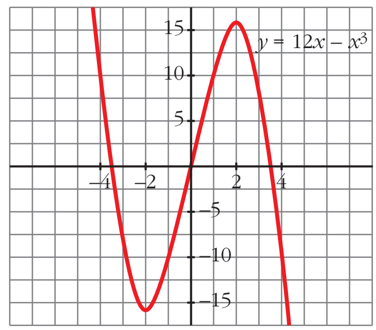


e) $f'(x) = 12 - 3x^2; \quad f'(x) = 0 \iff x = \pm 2$

$$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2, 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16) \end{cases}$$

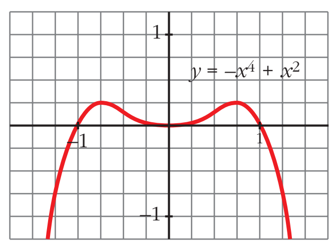
$$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$



f) $f'(x) = -4x^3 + 2x; \quad f'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \rightarrow \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$



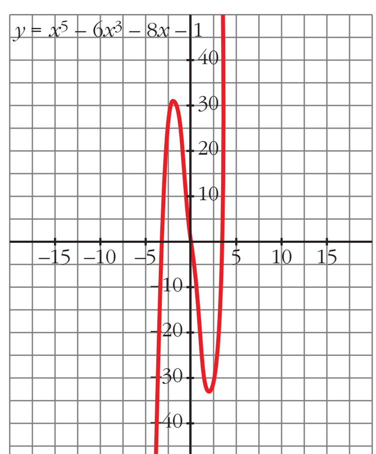
$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$

g) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8; \quad f'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

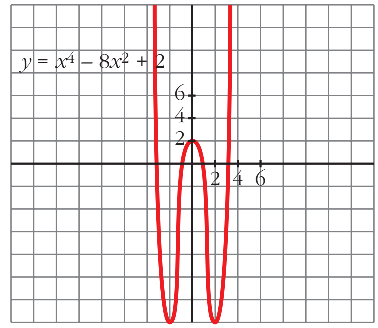


h) $f'(x) = 4x^3 - 16x; \quad f'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 2 \;\rightarrow\; (0,\ 2) \\ x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -14 \;\rightarrow\; (2,\ -14) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = -14 \;\rightarrow\; (-2,\ -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$



73 **Representa as seguintes funcións determinando os puntos singulares e estudando as súas ramas infinitas:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$

b) $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x}{(x + 5)^2}$

f) $y = \dfrac{2x^2}{x + 2}$

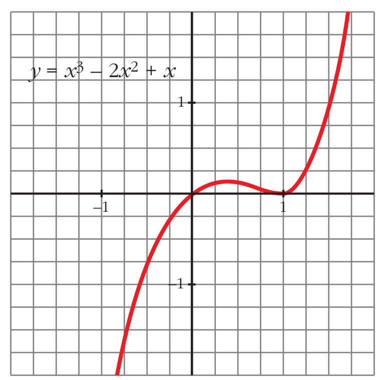
a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{3}, \quad x = 1$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{27}\right),\ (1,\ 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$



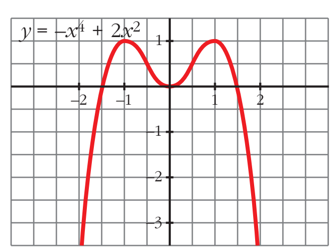
b) $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = 0 \;\rightarrow\; x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$

Puntos de tangente horizontal:

$(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$ y $(1,\ 1)$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

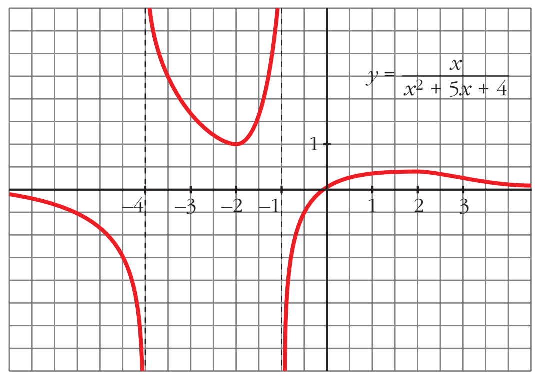


c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 4 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 2, \; x = -2$

Puntos de tangente horizontal: $(-2, 1)$, $\left(2, \dfrac{1}{9}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$



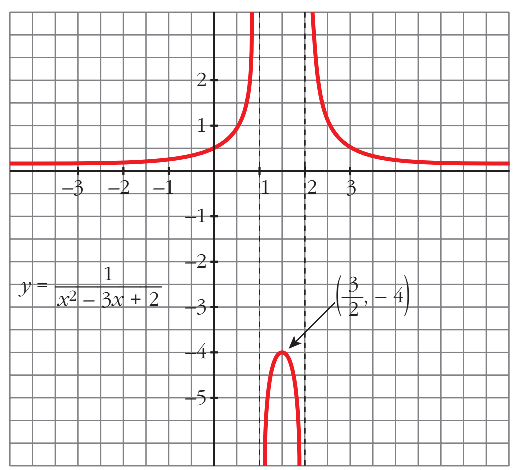
d) $f'(x) = \dfrac{-(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Punto de tangente horizontal:

$$\left(\frac{3}{2}, -4\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$



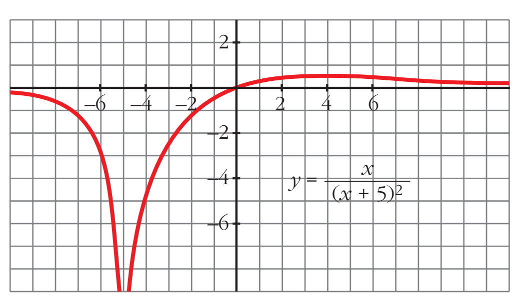
e) $f'(x) = \dfrac{(x + 5)^2 - x \cdot 2(x + 5)}{(x + 5)^4} = \dfrac{5 - x}{(x + 5)^3} = 0 \rightarrow x = 5$

Punto de tangente horizontal:

$$\left(5, \frac{1}{20}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x + 5)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x + 5)^2} = 0$$



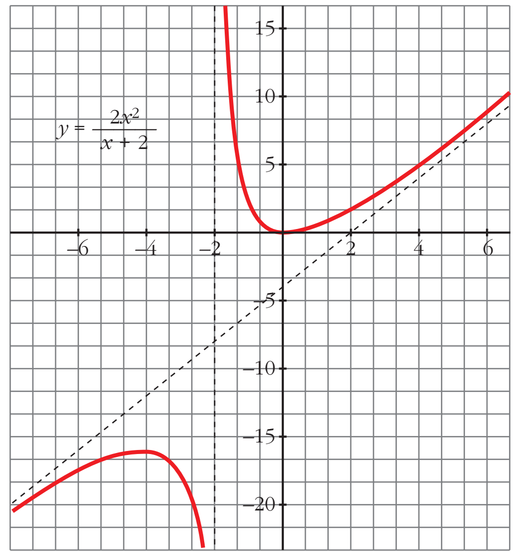
f) $f'(x) = \dfrac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\;\; x = -4$

Puntos de tangente horizontal:

$(-4, -16), (0, 0)$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 2x - 4$

(asíntota oblicua)



Páxina 324

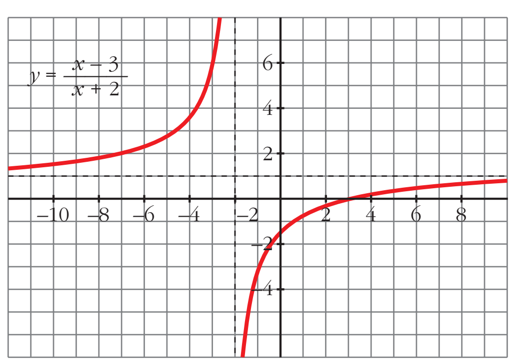
74 **Comproba que estas funcións non teñen puntos de tanxente horizontal. Represéntaas e estuda as súas ramas infinitas e os puntos de corte cos eixes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son:

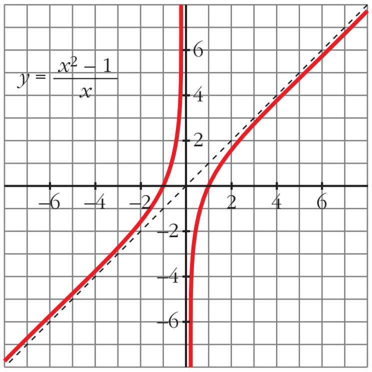
$\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$



b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

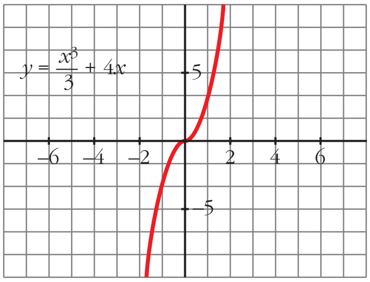
Los puntos de corte son:

(1, 0), (–1, 0)



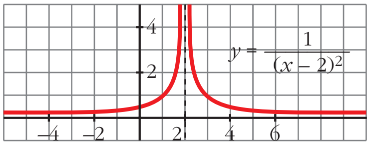
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es: (0, 0)



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$



75 **Estuda e representa as seguintes funcións:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2-16}$

b) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$

d) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$

f) $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

g) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$

h) $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

i) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

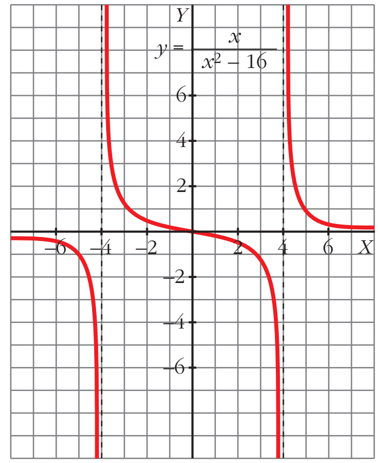
j) $y = \dfrac{x^2-5}{2x-4}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4, \ x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

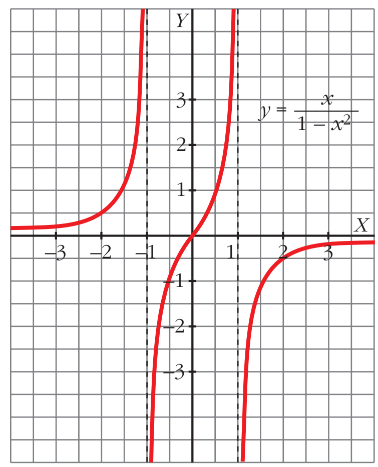


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1, \ x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

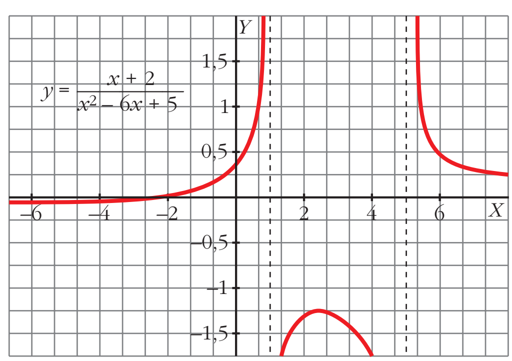
Asíntotas verticales: $x = 5, \ x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-6{,}58; -0{,}052), \ (2{,}58; -1{,}197)$



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

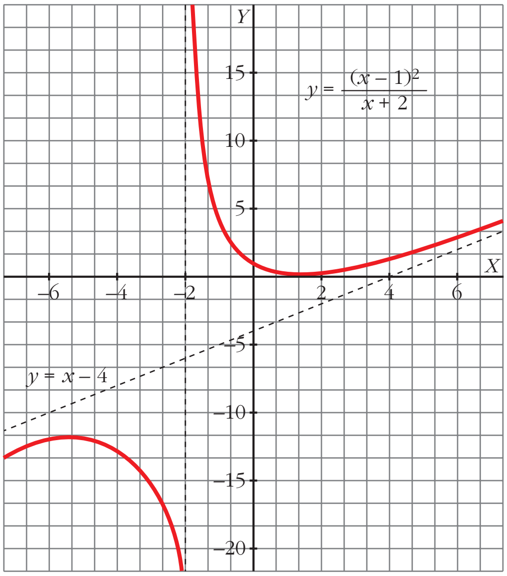
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0), (-5, 12)$



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

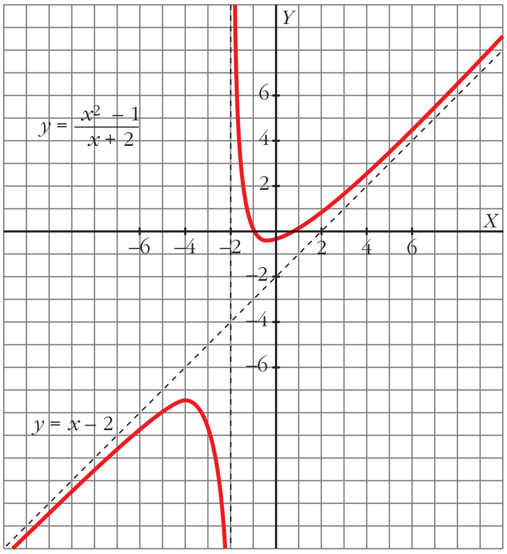
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-0{,}26; -0{,}54), (-3{,}73; -7{,}46)$



f) $y' = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

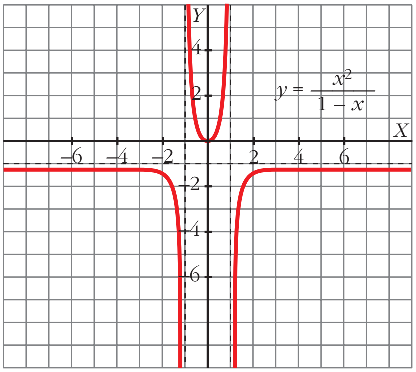
Asíntotas verticales: $x = 1, \ x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Su punto de tangente horizontal es:

$(0, 0)$



g) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

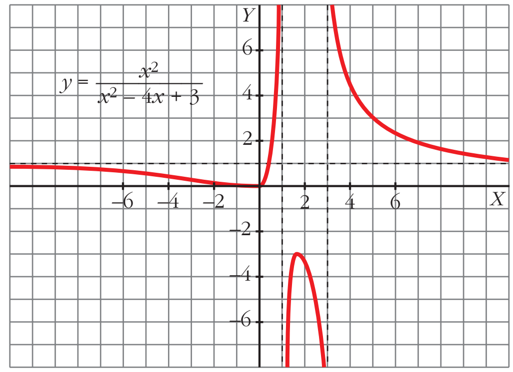
Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$(0, 0), \quad \left(\frac{3}{2}, -3\right)$$



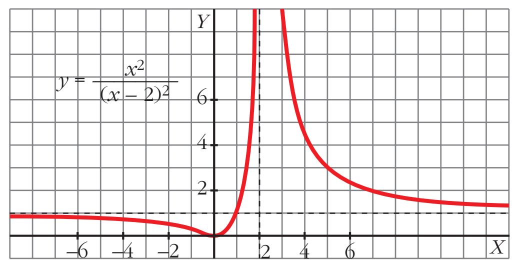
h) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x - 2)^3}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Su punto de tangente horizontal es: $(0, 0)$



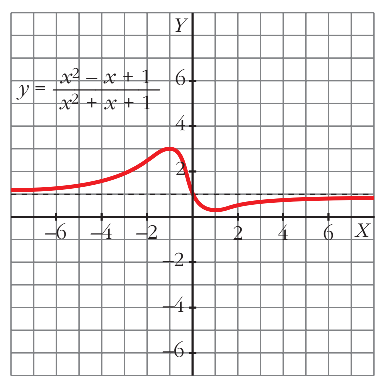
i) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), \quad (-1, 3)$$

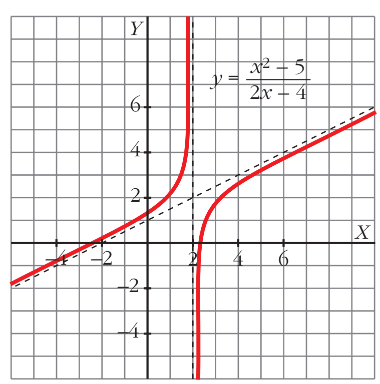


j) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



76 **Indica unha función de segundo grao se sabes que pasa por (0, 1) e que a pendente da recta tanxente no punto (2, –1) vale 0.**

Chámalle á función $f(x) = ax^2 + bx + c$ e ten en conta que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ e $f'(2) = 0$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \;\to\; 1 = c \\ f(2) = -1 \;\to\; -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \;\to\; 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

77 **Indica o vértice da parábola $y = x^2 + 6x + 11$ tendo en conta que nese punto a tanxente é horizontal.**

$f'(x) = 2x + 6 = 0 \;\to\; x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

78 **Determina a parábola $y = ax^2 + bx + c$ que é tanxente á recta $y = 2x - 3$ no punto $A(2, 1)$ e que pasa polo punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \;\to\; 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \;\to\; 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \;\to\; 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

79 **Determina o valor de x para o que as tanxentes ás curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sexan paralelas e escribe as ecuacións desas tanxentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \;\to\; f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \;\to\; g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} \; 6x - 2 = 2x + 6 \;\to\; x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x - 2) + 13 \;\to\; y = 10x - 7$$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$$y = 10(x - 2) + 16 \;\to\; y = 10x - 4$$

80 **Indica a, b e c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que a gráfica de f teña tanxente horizontal en $x = -4$ e en $x = 0$ e que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \ \rightarrow \ 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 0 \ \rightarrow \ b = 0 \\ f(1) = 1 \ \rightarrow \ 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

81 **Calcula o valor de k para que a tanxente á gráfica da función:**

$$y = x^2 - 5x + k$$

en $x = 1$ pase pola orixe de ordenadas.

- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \ \rightarrow \ f'(1) = -3$

- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \ \rightarrow \ (1, -4 + k)$
- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$

- Para que pase por (0, 0), debe verificarse:

  $0 = -4 + k + 3 \ \rightarrow \ k = 1$

CUESTIÓNS TEÓRICAS

82 **Calcula a T.V.M. de $f(x) = 3x - 2$ nos intervalos [–1, 2], [1, 3] e [–3, 4]. Xustifica por que obtés o mesmo resultado.**

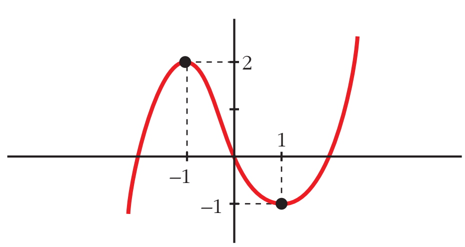
T.V.M. $[-1, 2] = \dfrac{4 + 5}{3} = 3$

T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{7 - 1}{2} = 3$

T.V.M. $[-3, 4] = \dfrac{10 + 11}{7} = 3$

T.V.M. = 3 para todos. La función es una recta de pendiente 3.

83 **Debuxa unha función que teña derivada nula en $x = 1$ e en $x = -1$, derivada negativa no intervalo [–1, 1] e positiva para calquera outro valor de x.**

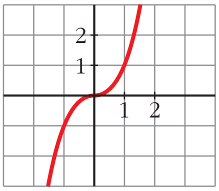


84 **Pon exemplos de funcións f cuxa derivada sexa $f'(x) = 2x$. Cantas existen?**

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

85 **Esta é a gráfica da función $y = x^3$.**

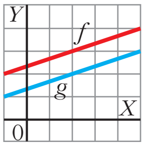


Por que podemos asegurar que o eixe de abscisas é a tanxente desa curva en (0, 0)?

Ecuación de la tangente en (0, 0):

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow y = 0 + 0(x - 9) \rightarrow y = 0$ es el eje de abscisas.

86



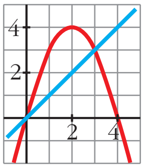
Que relación existe entre f e g?

E entre f' e g'?

$$\left.\begin{array}{l} f = g + 1 \\ f' = g' \end{array}\right\} \text{Son rectas paralelas (de igual pendiente).}$$

87 **Existe algún punto da función $y = 4x - x^2$ en que a tanxente sexa paralela á recta que pasa polos puntos (0, 0) e (3, 3)?**

En caso afirmativo, indícao.



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} 4 - 2x = 1 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

88 **Demostra, utilizando a derivada, que a abscisa do vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \frac{-b}{2a}$.**

$f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

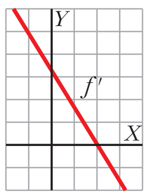
89 **Se $f'(2) = 0$, cal das seguintes afirmacións é correcta?**

a) A función f ten máximo ou mínimo en $x = 2$.

b) A recta tanxente en $x = 2$ é horizontal.

c) A función pasa polo punto (2, 0).

La correcta es la b).

90 

Esta é a gráfica de f', a función derivada de f.

a) Ten f algún punto de tanxente horizontal?

b) É f crecente ou decrecente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$

b) Si $x < 2$ es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$ es decreciente, pues $f' > 0$.

Páxina 325

PARA AFONDAR

91 **Indica a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no punto de abscisa 2 aplicando a definición.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

92 **Indica a ecuación da recta tanxente á curva $y = \ln x$ que é paralela á recta $y = 3x - 2$.**

$$f'(x) = \frac{1}{x} = 3 \to x = \frac{1}{3}; \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

La recta es $y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) - \ln 3 = 3x - 1 - \ln 3$

93 **Cales son os puntos singulares das funcións $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ no intervalo $[0, 2\pi]$?**

$$f(x) = sen\ x \ \rightarrow\ f'(x) = cos\ x = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{\pi}{2},\ \ x = \frac{3\pi}{2}$$

Máximo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y mínimo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

$$g(x) = cos\ x \ \rightarrow\ g'(x) = -sen\ x = 0 \ \rightarrow\ x = 0,\ \ x = \pi$$

Máximo en $(0, 1)$ y mínimo en $(\pi, -1)$.

94 **Ten algún punto de tanxente horizontal a función $y = tg\ x$?**

No, puesto que $f'(x) = \dfrac{1}{cos^2 x} \neq 0$ para todo x.

95 **Estuda e representa as seguintes funcións:**

a) $y = \dfrac{4 - 2x^2}{x}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{3(x+1)}$

c) $y = \dfrac{4 + 2x^2 - x^3}{x^2}$ **d)** $y = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$

a) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 - 4 + 2x^2}{x^2} = \dfrac{-2x^2 - 4}{x^2} \neq 0$

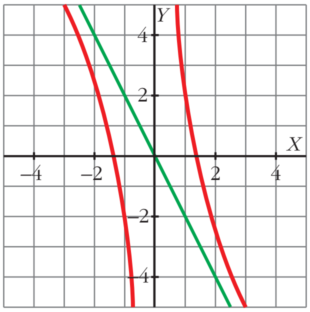
No hay puntos de tangente horizontal.

Puntos de corte con los ejes: $\left(\sqrt{2}, 0\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right)$

Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = -2x$



b) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot 3(x+1) - x^3 \cdot 3}{9(x+1)^2} = \dfrac{9x^3 + 9x^2 - 3x^3}{9(x+1)^2} = \dfrac{6x^3 + 9x^2}{9(x+1)^2} = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{3(x+1)^2} =$

$$= \frac{x^2(2x+3)}{3(x+1)^2} = 0 \ \rightarrow\ x = 0,\ \ x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

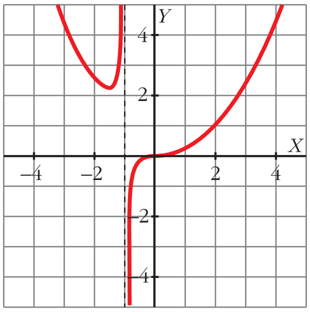
Mínimo en (–1,5; 2,25).

Punto de inflexión en (0, 0).

Puntos de corte con los ejes: (0, 0).

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Asíntota vertical: $x = -1$



c) $f'(x) = \dfrac{(4x - 3x^2)x^2 - (4 + 2x^2 - x^3)2x}{x^4} = \dfrac{(4x - 3x^2)x - (4 + 2x^2 - x^3)2}{x^3} =$

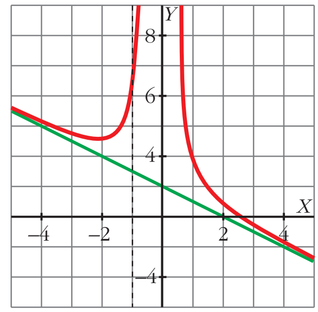
$= \dfrac{4x^2 - 3x^3 - 8 - 4x^2 + 2x^3}{x^3} = \dfrac{-x^3 - 8}{x^3} = 0 \rightarrow x = -2$

Mínimo en (–2, 5).

Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = 2 - x$



d) $f'(x) = \dfrac{(4x^3 - 4x)(x^2 - 1) - (x^4 - 2x^2)2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{4x(x^2 - 1)^2 - 2x(x^4 - 2x^2)}{(x^2 - 1)^2} =$

$= \dfrac{2x[2x^4 + 2 - 4x^2 - x^4 + 2x^2]}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{2x(x^4 - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

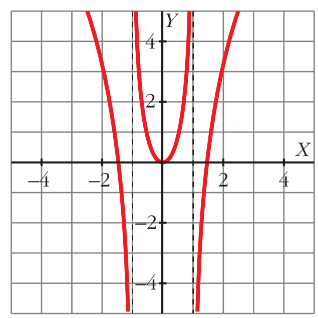
Mínimo en (0, 0).

Puntos de corte con los ejes:

$(0, 0), \left(\sqrt{2}, 0\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right)$

Dominio = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$



96 **O custo total (en dólares) de fabricación de q unidades de certo artigo é:**

$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$. O custo medio por unidade é: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

a) Cantas unidades se deben fabricar para que o custo medio por unidade sexa mínimo?

b) Calcula $C(q)$ e $M(q)$ para o valor de q que indicaches na epígrafe a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$M'(q) = \dfrac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \dfrac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} =$

$= \dfrac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \rightarrow q^2 = 25 \rightarrow q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

97 **A función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2 + 9}$ indica os beneficios obtidos por unha empresa desde que comezou a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en anos).**

a) Represéntaa graficamente.

b) Ao cabo de canto tempo obtén a empresa o beneficio máximo? Cal é ese beneficio?

c) Perderá diñeiro a empresa nalgún momento?

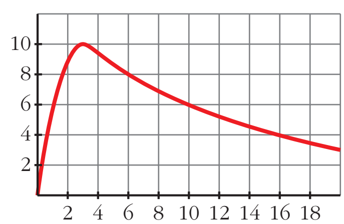
a) $f'(x) = \dfrac{60(x^2+9) - 60x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2 + 540}{(x^2+9)^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio)

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \rightarrow$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:



b) Beneficio máximo en $x = 3 \rightarrow$ A los 3 años.

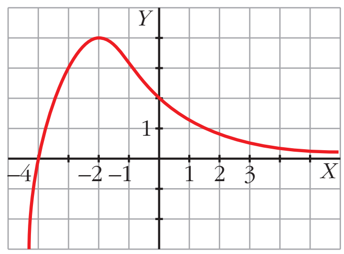
El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

Páxina 325

AUTOAVALIACIÓN

1. **Observa a gráfica da función $y = f(x)$ e responde.**



a) Cal é a T.V.M. nos intervalos [0, 3] e [–4, –2]?

b) Ten algún punto de tanxente horizontal?

c) Para que valores de x é $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que a tanxente no punto de abscisa $x = 0$ é paralela á bisectriz do segundo cuadrante. Canto vale $f'(0)$?

a) $\text{T.V.M. } [0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2. **Dada $f(x) = x^2 - 3x$, proba que $f'(-2) = -7$ aplicando a definición de derivada.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$\dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \dfrac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$

$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3. **Indica a derivada das seguintes funcións:**

a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}$ **c)** $y = \cos^2 \pi x$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^3$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{3}e^{-x} + \dfrac{x}{3}(-1)e^{-x} = e^{-x}\left(\dfrac{1-x}{3}\right)$

c) $f'(x) = 2\pi \cos \pi x(-\mathrm{sen}\ \pi x) = -2\pi \cos \pi x \cdot \mathrm{sen}\ \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x-2)^2} \cdot \dfrac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2-4x)}{(x-2)^4}$

4. **Escribe a ecuación da tanxente á curva $y = \ln x^2$ no punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1$, $y = \ln 1^2 = 0 \ \rightarrow\ P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \ \rightarrow\ f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x-1) \ \rightarrow\ y = 2x - 2$

5. **Determina os puntos singulares da función $y = 2 + (1-x)^3$. Ten máximo ou mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1-x)^3 \ \rightarrow\ f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$

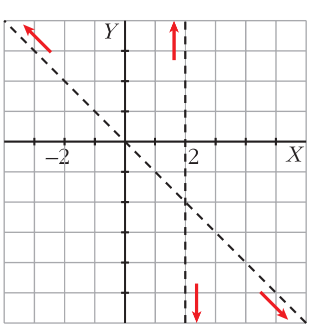
$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ -3(1-x)^2 = 0 \ \rightarrow\ 1 - x = 0 \ \rightarrow\ x = 1$

$f(1) = 2 + (1-1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2)

Como $f'(x) = -3(1-x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6. **Determina os puntos singulares de $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$ da cal coñecemos as súas asíntotas e a posición da curva con respecto a elas. Represéntaa.**



$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$$

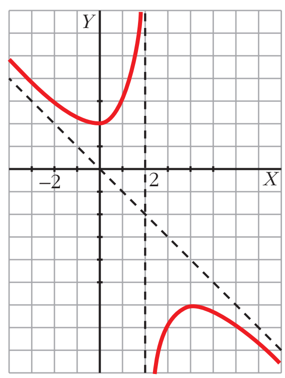
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4)(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{(4x - 2x^2 - 4 + 2x) + (x^2 - 2x - 4)}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \;\to\; -x^2 + 4x = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 4}{2 - 0} = 2; \;\; f(4) = \frac{4^2 - 2 \cdot 4 + 4}{2 - 4} = -6$$

Los puntos singulares son (0, 2) y (4, –6). El primero es un mínimo y el segundo, un máximo.



7. **Representa a función** $\boldsymbol{y = x^3 - 12x + 16}$**.**

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

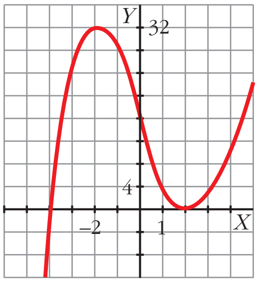
$$f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 12 = 0 \;\left\langle\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \;\to\; (2, 0)$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \;\to\; (-2, 32)$$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).

Esta es su gráfica:



8. **Estuda e representa** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$; $y = 1$. Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$

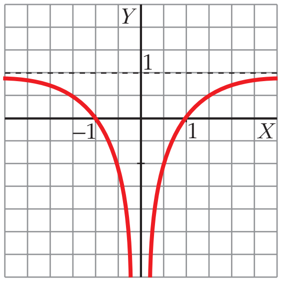
Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x\,x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2)^2} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{2}{x^3} = 0$. No tiene solución.

No tiene puntos singulares.

Esta es su gráfica:



9. **Determina os intervalos de crecemento e de decrecemento de:**

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Buscamos los valores de x para los que $f'(x) > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 > 0$

$$\begin{array}{ccccc} f'(x) > 0 & & f'(x) < 0 & & f'(x) > 0 \\ \hline \nearrow & -1 & \searrow & 3 & \nearrow \end{array}$$

Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.