11 LÍMITES DE FUNCIÓNS. CONTINUIDADE E RAMAS INFINITAS

Páxina 273

REFLEXIONA E RESOLVE

Aproximacións sucesivas

- **Comproba que:**

  $f(4) = 6{,}5;\ f(4{,}9) = 6{,}95;\ f(4{,}99) = 6{,}995$

- **Calcula $f(4{,}999);\ f(4{,}9999);\ f(4{,}99999);\ \ldots$**

- **Á vista dos resultados anteriores, paréceche razoable afirmar que, cando x se aproxima a 5, o valor de $f(x)$ se aproxima a 7? Expresámolo así: $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$**

  Si $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$, entonces:

  $f(4{,}999) = 6{,}9995;\ f(4{,}9999) = 6{,}99995;\ f(4{,}99999) = 6{,}999995$

  $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 7$

- **Calcula, analogamente, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.**

  $f(2) = 5{,}5;\ f(2{,}9) = 5{,}95;\ f(2{,}99) = 5{,}995;\ f(2{,}999) = 5{,}9995;\ f(2{,}9999) = 5{,}99995$

  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$

Páxina 275

1. Cada unha das seguintes funcións ten un ou máis puntos onde non é continua. Indica cales son eses puntos e o tipo de descontinuidade que presenta:

a) $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ **d)** $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 4$.

2. **Explica por que son continuas as seguintes funcións e determina o intervalo no que están definidas:**

a) $y = x^2 - 5$ **b)** $y = \sqrt{5 - x}$

c) $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$ **d)** $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo $\mathbb{R}$. Es continua, también, en todo $\mathbb{R}$. El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$:

$$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto (3, 5). La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto (2, 2). Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: [0, 5).

Páxina 278

1. **Calcula o valor dos seguintes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x - 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0

2. **Calcula estes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$ b) –1

Páxina 279

3. **Calcula** k **para que a función** $y = f(x)$ **sexa continua en** $\mathbb{R}$**:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} \quad 21 + k = 7 \;\to\; k = -14$$

Páxina 281

4. **Calcula os límites das funcións seguintes nos puntos que se indican. Onde conveña, especifica o valor do límite á esquerda e á dereita do punto. Representa graficamente os resultados:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **en –2, 0 e 2** **b)** $f(x) = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$ **en 2, 0 e 3**

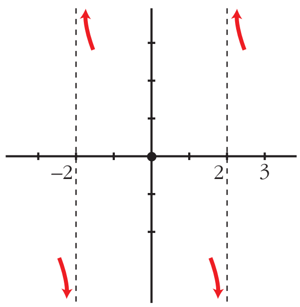
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ **en 1 e –3** **d)** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ **en 0 e –3**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f(x).$$

$$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to 2} f(x).$$

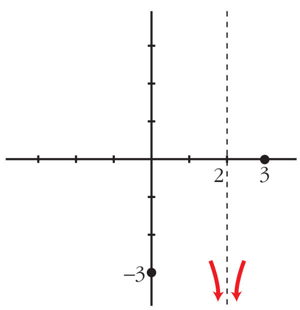


b) $f(x) = \dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$$

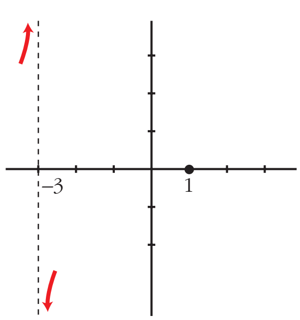
$$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$$



c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+3)}$

$$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$$

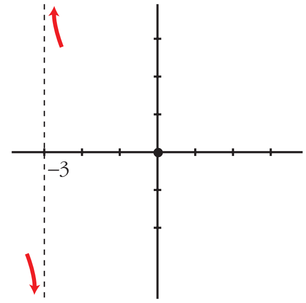
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x).$$



d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2(x+3)}$

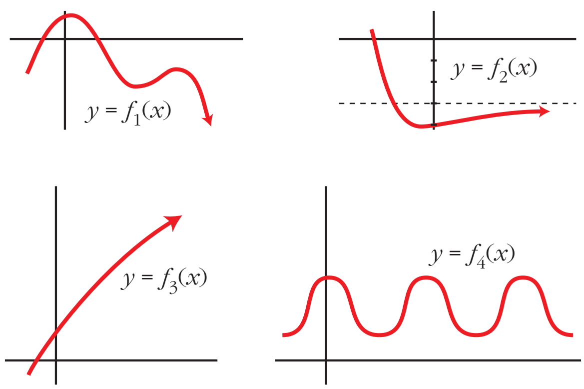
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim_{x \to -3} f(x).$$



Páxina 282

1. Di o valor do límite cando $x \to +\infty$ das seguintes funcións:



$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f_4(x) \text{ no existe.}$$

Páxina 283

1. Di o valor do límite cando $x \to +\infty$ das seguintes funcións:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

2. **Como** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, **di un valor de** x **para o cal sexa** $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3. **Como** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, **di un valor de** x **para o cal sexa:**

$$\frac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$$

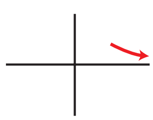
Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}000\overset{\frown}{001}$.

Páxina 284

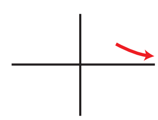
4. **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **e representa as súas ramas:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

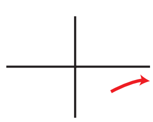
a) 0



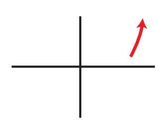
b) 0



c) 0



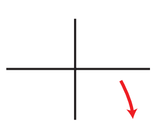
d) $+\infty$



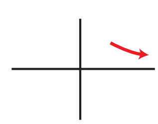
5. **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **e representa as súas ramas:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

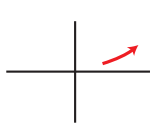
a) $-\infty$



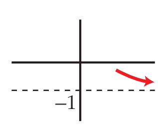
b) 0



c) $+\infty$



d) -1



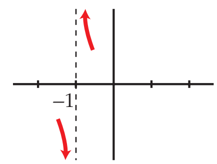
Páxina 285

1. Determina as asíntotas verticais e sitúa a curva respecto a elas:

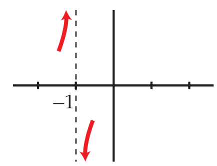
a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical.



b) $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= -\infty \end{aligned}\right\}$ $x = -1$ es asíntota vertical.

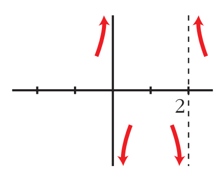


2. Determina as asíntotas verticais e sitúa a curva respecto a elas:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

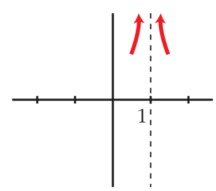
b) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= -\infty \end{aligned}\right\}$ $x = 0$ es asíntota vertical.



$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical.

b) $\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= +\infty \end{aligned}\right\}$ $x = 1$ es asíntota vertical.

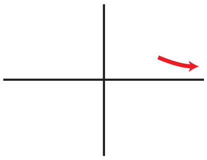


Páxina 287

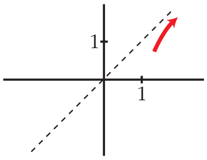
3. **Determina as ramas infinitas, $x \to +\infty$, destas funcións. Sitúa a curva respecto da asíntota:**

a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **b)** $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal.



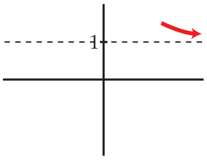
b) $y = x + \dfrac{-x}{1 + x^2} \;\to\; y = x$ es asíntota oblicua.



4. **Determina as ramas infinitas, $x \to +\infty$, destas funcións. Sitúa a curva respecto ás asíntotas, se as hai:**

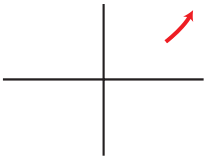
a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.



b) *grado de* P – *grado de* $Q \geq 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\to\;$ rama parabólica hacia arriba.

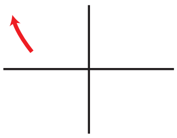


Páxina 288

1. **Determina $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e representa a rama correspondente:**

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 7x^4 = +\infty$

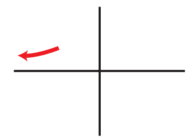


2. **Determina** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **e traza as ramas correspondentes:**

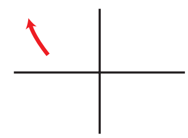
a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$



Páxina 289

3. **Determina as ramas infinitas,** $x \to -\infty$, **destas funcións, e sitúa a curva respecto ás asíntotas:**

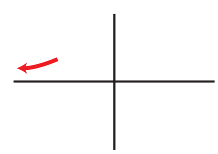
a) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

b) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

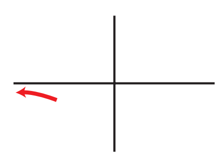
c) $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

d) $y = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$

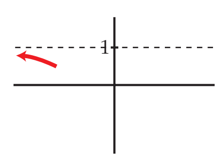
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal.



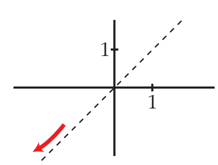
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal.



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.



d) $y = x + \dfrac{-x}{1 + x^2} \;\to\; y = x$ es asíntota oblicua.



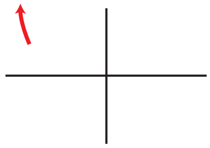
4. **Determina as ramas infinitas, cando $x \to -\infty$, e se teñen asíntotas, sitúa a curva respecto a elas:**

a) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

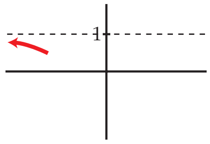
c) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x}$

a) *grado P – grado Q* ≥ 2

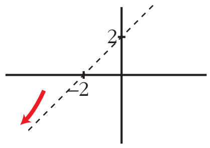
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \;\to\;$ rama parabólica.



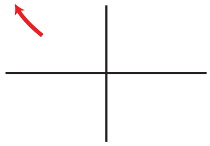
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.



c) $y = x + 2 + \dfrac{-2}{x+1} \;\to\; y = x + 2$ es asíntota oblicua.



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$



Páxina 295

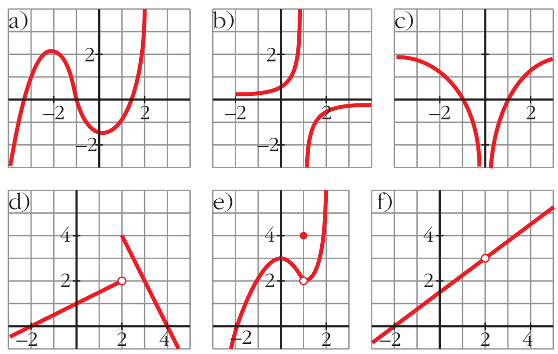
EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

Descontinuidades e continuidade

1 **a) Cal das seguintes gráficas corresponde a unha función continua?**

b) Sinala, en cada unha das outras cinco, a razón da súa descontinuidade.



a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

2 **Determina os puntos de descontinuidade, se os hai, das seguintes funcións:**

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \dfrac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2}$

a) Continua.

b) 2

c) $-\dfrac{1}{2}$

d) Continua.

e) 0 y 5

f) Continua.

3 **Comproba se as seguintes funcións son continuas en $x = 0$ e en $x = -2$:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ **d)** $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) No es continua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.

b) Sí es continua en $x = 0$, no en $x = -2$.

c) No es continua en $x = 0$, sí en $x = -2$.

d) Continua en $x = 0$ y en $x = -2$.

4 **Indica para que valores de $\mathbb{R}$ son continuas as seguintes funcións:**

a) $y = 5 - \dfrac{x}{2}$ **b)** $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \dfrac{1}{x}$ **d)** $y = \sqrt{-3x}$

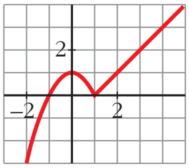
e) $y = \sqrt{5 - 2x}$ **f)** $y = x^2 - x$

a) $\mathbb{R}$ b) $[3, +\infty)$ c) $\mathbb{R} - \{0\}$

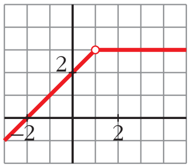
d) $(-\infty, 0]$ e) $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right]$ f) $\mathbb{R}$

5 **Comproba que as gráficas destas funcións corresponden á expresión analítica dada e di se son continuas ou descontinuas en $x = 1$.**

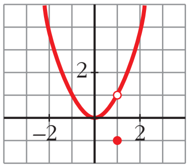
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \le 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \ne 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$



a) Continua.

b) Discontinua.

c) Discontinua.

6 **Comproba se a función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é continua en $x = 0$.**

☛ ***Lembra que para que f sexa continua en $x = 0$, debe verificarse que:***

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

7 **Comproba se as seguintes funcións son continuas nos puntos que se indican:**

a) $f(x) = \begin{cases} (3 - x)/2 & \text{se } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$ **en** $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$ **en** $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 1 \\ x + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ **en** $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

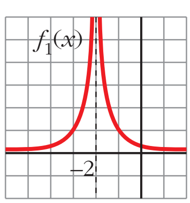
b) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

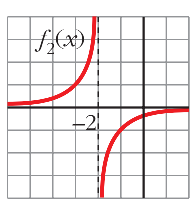
c) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

Páxina 296

Visión gráfica do límite

8





Estas son, respectivamente, as gráficas das funcións:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

Cal é o límite de cada unha destas funcións cando $x \to -2$?

☛ ***Observa a función cando $x \to -2$ pola esquerda e pola dereita.***

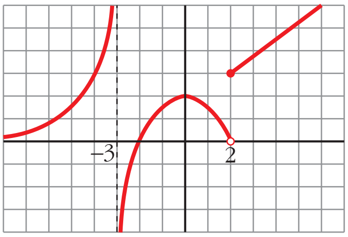
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_1(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f_2(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -2} f_2(x).$$

9 **Sobre a gráfica da función $f(x)$, indica:**

a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **h)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$



a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2 d) 0

e) 0 f) 3 g) $+\infty$ h) 0

Límite nun punto

10 **Calcula os seguintes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \dfrac{x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1-x}{x-2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ **h)** $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

a) 5 b) 0 c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

11 **Dada a función** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, **indica:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

☛ ***Para que exista límite no punto de ruptura, teñen que ser iguais os límites laterais.***

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

12 **Calcula os seguintes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x^2 - 2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3h^3 - 2h^2}{h}$ **d)** $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 - 7h}{4h}$

☛ ***Saca factor común e simplifica cada fracción.***

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{x(x-2)} = -2$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x} = 3$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2(3h-2)}{h} = 0$ d) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h-7)}{4h} = -\dfrac{7}{4}$

13 **Resolve os seguintes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4}$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2 - 1} = 2$

14 **Calcula o límite da función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ e $x = -1$.**

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Límite cando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$

15 **Calcula os seguintes límites e representa a información que obteñas:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right)$

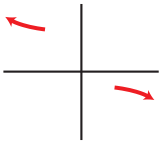
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - x)^2$

☛ ***Dálle a x “valores grandes” e saca conclusións.***

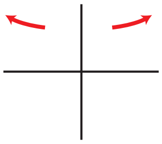
16 **Calcula o límite das funcións do exercicio anterior cando $x \to -\infty$ e representa a información que obteñas.**

Resolución de los ejercicios 15 y 16:

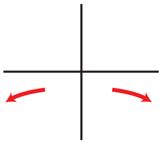
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



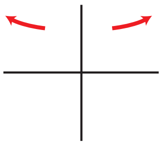
b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{-x^4}{3} + \dfrac{x}{2} - 17\right) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



17 **Comproba, dándolles valores grandes a x, que as seguintes funcións tenden a 0 cando $x \to +\infty$.**

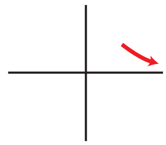
a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10}$

b) $f(x) = \dfrac{100}{3x^2}$

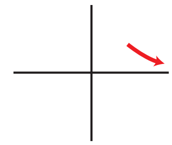
c) $f(x) = \dfrac{-7}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{10x^2 - x^3}$

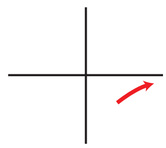
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



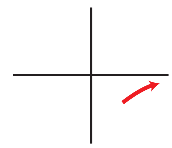
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



18 **Calcula o límite cando $x \to +\infty$ e cando $x \to -\infty$ de cada unha das seguintes funcións. Representa os resultados que obteñas.**

a) $f(x) = x^3 - 10x$

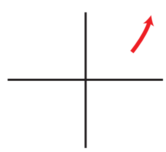
b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \dfrac{3 - x}{2}$

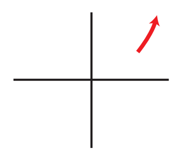
d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{-3}$

Cando $x \to +\infty$:

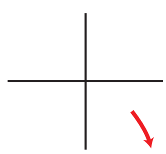
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



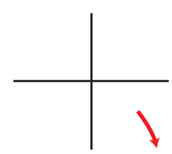
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

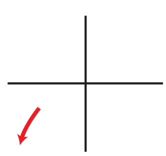


d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

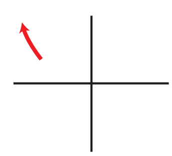


Cando $x \to -\infty$:

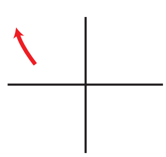
a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



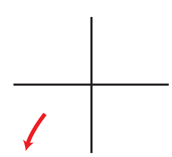
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



Páxina 297

19 **Calcula os seguintes límites e representa as ramas que obteñas:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

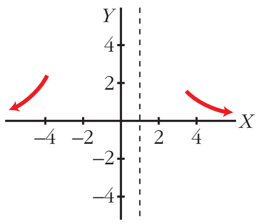
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

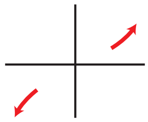
20 **Calcula o límite de todas as funcións do exercicio anterior cando $x \to -\infty$.**

Resolución de los ejercicios 19 y 20:

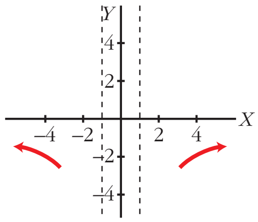
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



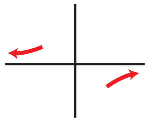
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



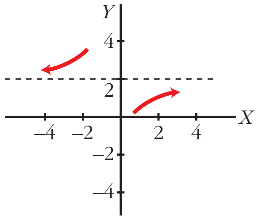
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{x^2-1} = 0$



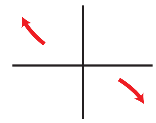
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3} = 0$



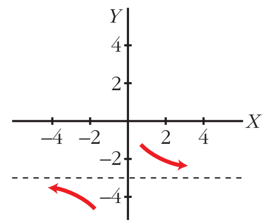
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



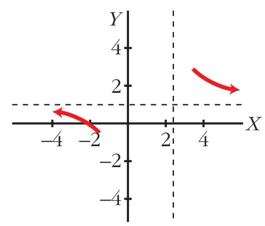
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



21 **Resolve os seguintes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} 1-(x-2)^2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{5x}$

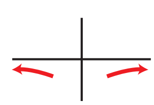
a) 3 b) $-\infty$ c) 0 d) $+\infty$

22 **Calcula o límite cando $x \to +\infty$ e cando $x \to -\infty$ das seguintes funcións e representa as ramas que obteñas:**

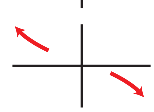
a) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ **b)** $f(x) = 10x - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

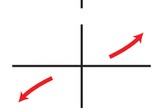
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$



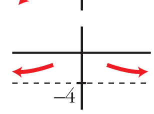
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -4; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$



Asíntotas

23 **Determina as asíntotas das seguintes funcións e sitúa a curva respecto a cada unha delas:**

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$

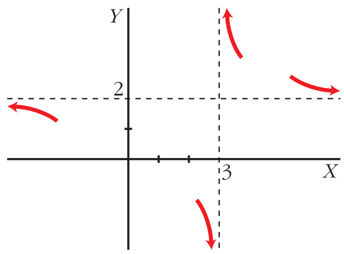
b) $y = \dfrac{x-1}{x+3}$

c) $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$

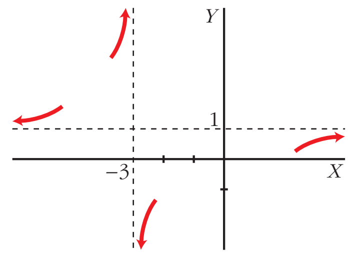
a) Asíntotas:

$x = 3; \ \ y = 2$



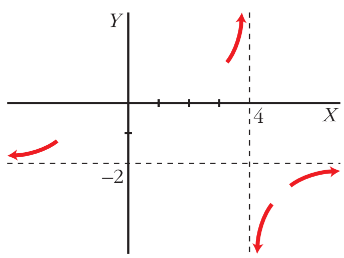
b) Asíntotas:

$x = -3; \ \ y = 1$



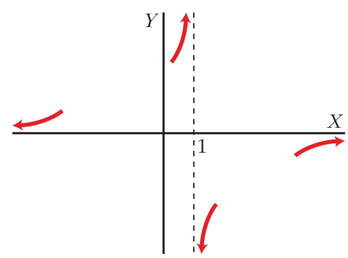
c) Asíntotas:

$x = 4; \ \ y = -2$



d) Asíntotas:

$x = 1; \ \ y = 0$



24 **Determina as asíntotas das seguintes funcións e sitúa a curva respecto a elas:**

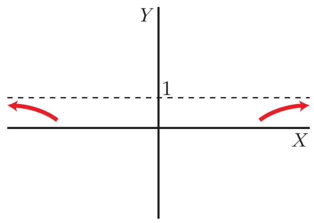
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

b) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

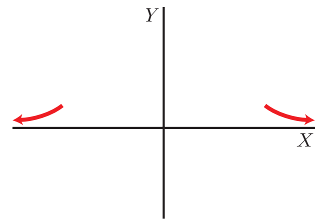
c) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

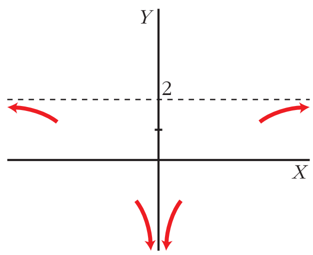
a) Asíntota: $y = 1$



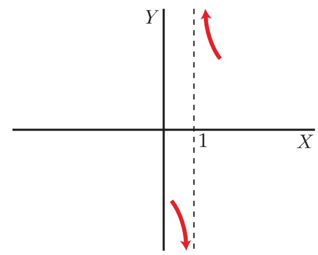
b) Asíntota: $y = 0$



c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



d) Asíntota: $x = 1$



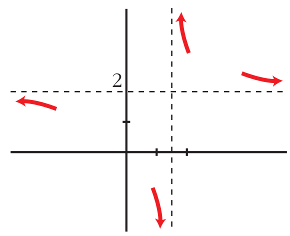
25 **Determina as asíntotas das seguintes funcións e sitúa a curva respecto a elas:**

a) $f(x) = \dfrac{4x + 1}{2x - 3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x}{2x - 5}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 9}$ **e)** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-1}{(x + 2)^2}$

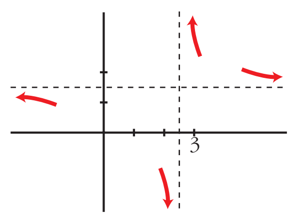
a) Asíntota vertical: $x = \dfrac{3}{2}$

Asíntota horizontal: $y = 2$



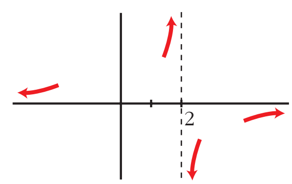
b) Asíntota vertical: $x = \dfrac{5}{2}$

Asíntota horizontal: $y = \dfrac{3}{2}$



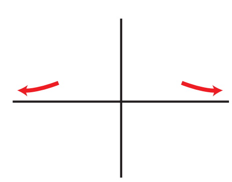
c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



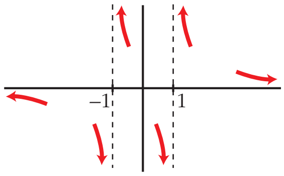
d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.



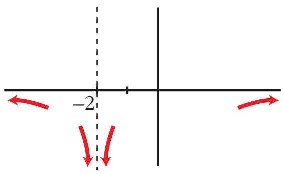
e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$



f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



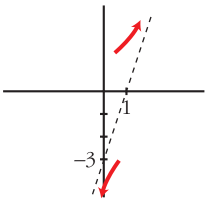
26 **Cada unha das seguintes funcións ten unha asíntota oblicua. Determínaa e estuda a posición da curva respecto a ela:**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

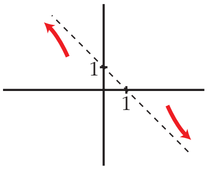
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



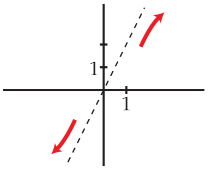
b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



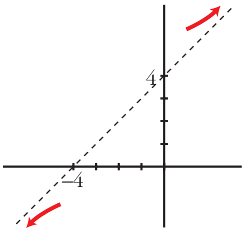
c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



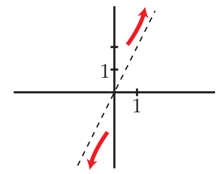
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



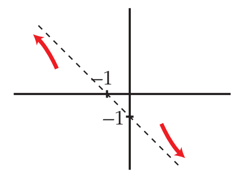
e) $\dfrac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \dfrac{1}{2x - 2}$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



PARA RESOLVER

27 **Calcula os límites das seguintes funcións nos puntos que anulan o seu denominador:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x + 4}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 2x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ **d)** $f(t) = \dfrac{t^3 - 2t^2}{t^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x(x - 2)}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = \dfrac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

d) $f(t) = \dfrac{t^2(t - 2)}{t^2}$; $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = -2$

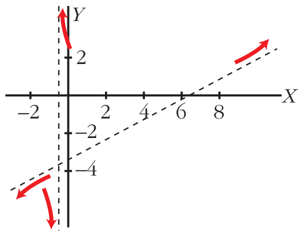
28 **Determina as asíntotas das seguintes funcións e sitúa a curva respecto a cada unha delas:**

a) $y = \dfrac{(3 - x)^2}{2x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{5x - 2}{2x - 7}$ **c)** $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 1}$

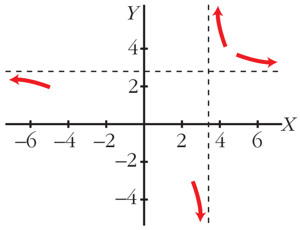
d) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ **f)** $y = \dfrac{3x^2}{x + 2}$

a) $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{49/4}{2x+1}$

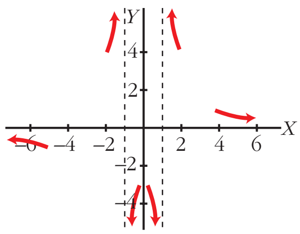
Asíntotas: $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$



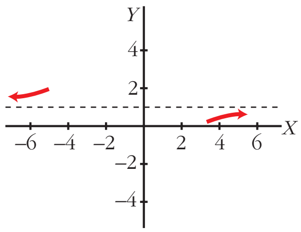
b) Asíntotas: $y = \frac{5}{2}$; $x = \frac{7}{2}$



c) Asíntotas: $y = 0$; $x = \pm 1$

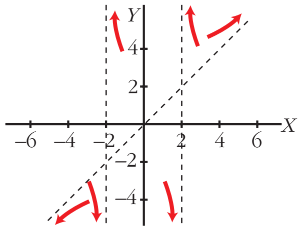


d) Asíntotas: $y = 1$

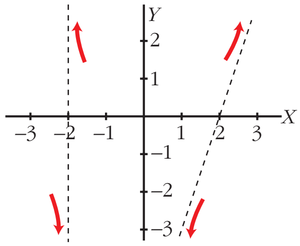


e) $y = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}$

Asíntotas: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



f) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$



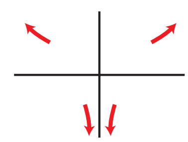
29 **Determina as ramas infinitas destas funcións. Cando teñan asíntotas, sitúa a curva:**

a) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2}$ **b)** $y = \dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{9 - x^2}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{2x^2}{x + 3}$ **f)** $y = \dfrac{x^3}{2x - 5}$

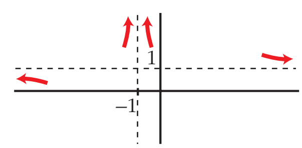
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = 0$



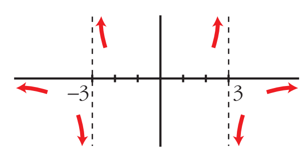
b) Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

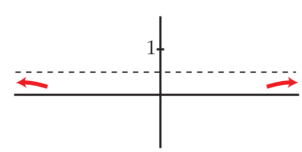


c) Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

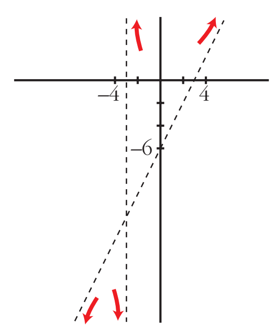


d) Asíntota horizontal: $y = \dfrac{1}{2}$



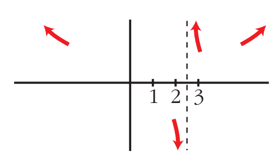
e) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 6$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = \dfrac{5}{2}$



Páxina 298

30 **Proba que a función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ só ten unha asíntota vertical e outra horizontal.**

☛ ***Ao calcular $\lim_{x \to 2} f(x)$ verás que non é ∞.***

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

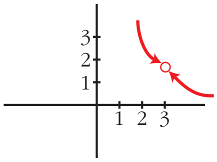
Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horizontal: $y = 1$

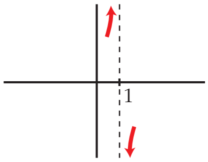
31 **Calcula os seguintes límites e representa os resultados que obteñas:**

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$ **b)** $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \dfrac{5}{3}$



b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x-1}$



Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x-2}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1} = -\infty$

No existe $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}$

32 **Calcula os seguintes límites e representa os resultados que obteñas:**

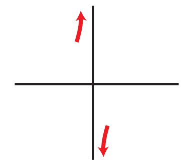
a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2}$

b) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1}$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$

d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4}$

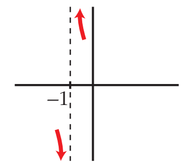
a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-2}{x(x+1)}$



Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = -\infty$

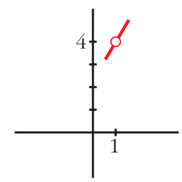
b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{x+1}$



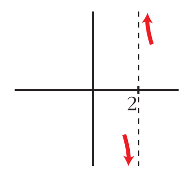
Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2}{x+1} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2}{x+1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 4$



d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(x+2)}{x-2}$



Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = +\infty$

33 Determina as asíntotas destas funcións:

a) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

b) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

c) $y = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$

d) $y = \dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

e) $y = x + \dfrac{4}{x - 5}$

f) $y = x + 1 + \dfrac{5}{x}$

a) $y = x + \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

Asíntotas verticales: $x = -1, \ x = 1$

Asíntota oblicua: $y = x$

b) Asíntota vertical: $x = 0$

c) Asíntota horizontal: $y = 2$

d) Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = \pm 1$

e) $x = 5, \ y = x$

f) Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

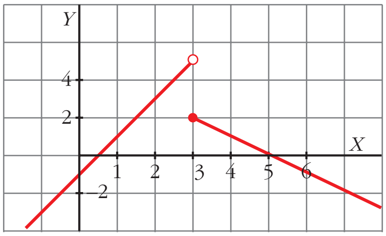
34 **Representa as seguintes funcións e explica se son descontinuas nalgún dos seus puntos:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 3 \\ 5 - x & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

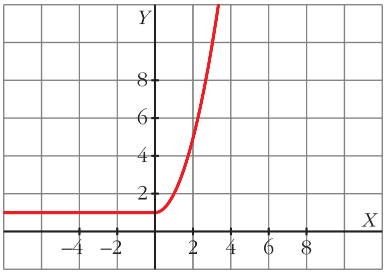
b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x < 2 \\ x & \text{se } x > 2 \end{cases}$

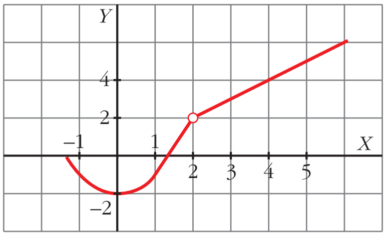
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Función continua.



c) Discontinua en $x = 2$.



35 **a) Calcula o límite das funcións do exercicio anterior en $x = -3$ e $x = 5$.**

b) Determina, en cada unha delas, o límite cando $x \to +\infty$ e cando $x \to -\infty$.

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -7$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 26$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 7$; $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

36 **Calcula os límites cando $x \to +\infty$ e cando $x \to -\infty$ das seguintes funcións:**

a) $f(x) = 2^{x-1}$ **b)** $f(x) = 0{,}75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$ **d)** $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

37 **Determina as ramas infinitas das seguintes funcións exponenciais:**

a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = -1$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$: $y = 0$

38 **Calcula, en cada caso, o valor de k para que a función $f(x)$ sexa continua en todo $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \le 3 \\ x + k & \text{se } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{se } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{se } x \ne 0 \\ k & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} 5 = 3 + k \to k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} 5 = 4 + 2k \;\rightarrow\; k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \;\rightarrow\; k = 1$

39 **Estuda a continuidade destas funcións:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se } x < 1 \\ 1/x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } -1 \geq x \\ 1 - x^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \;\rightarrow\;$ Continua en $x = 1$

$x \neq 1 \;\rightarrow\;$ Continua

Es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \;\rightarrow\;$ Continua en $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \;\rightarrow\;$ Continua en $x = 1$

$x \neq 1$ y $x \neq -1 \;\rightarrow\;$ Continua

Es continua en $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \;\rightarrow\;$ Discontinua en $x = 0$

Si $x \neq 0$, es continua.

40 **Calcula a para que as seguintes funcións sexan continuas en $x = 1$:**

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 4 - ax^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/(x - 1) & \text{se } x \neq 1 \\ a & \text{se } x = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - a \end{array}\right\} 2 = 4 - a \;\rightarrow\; a = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array}\right\} a = 2$

41 **Nunha empresa fanse montaxes en cadea. O número de montaxes realizadas por un traballador sen experiencia depende dos días de adestramento segundo a función $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ (t en días).**

a) Cantas montaxes realiza o primeiro día? E o décimo?

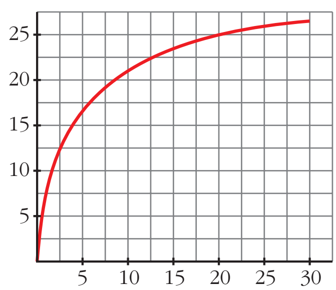
b) Representa a función se sabes que o período de adestramento é dun mes.

c) Que ocorrería co número de montaxes se o adestramento fose moito máis longo?

a) $M(1) = 6$ montajes el primer día.

$M(10) = 21{,}43 \rightarrow$ 21 montajes el décimo día.

b)



c) Se aproxima a 30 $\left(\text{pues} \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30\right)$.

Páxina 299

CUESTIÓNS TEÓRICAS

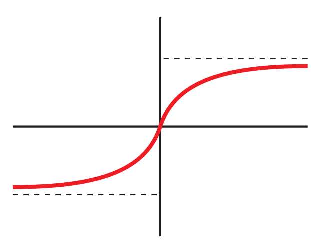
42 **Pódese calcular o límite dunha función nun punto no que a función non estea definida? Pode ser a función continua nese punto?**

Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

43 **Pode ter unha función máis de dúas asíntotas verticais? E máis de dúas asíntotas horizontais? Pon exemplos.**

Sí. Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$ tiene $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ como asíntotas verticales.

No puede tener más de dos asíntotas horizontales, una hacia $+\infty$ y otra hacia $-\infty$, por ejemplo:



44 **O denominador dunha función $f(x)$ anúlase en $x = a$. Podemos asegurar que ten unha asíntota vertical en $x = a$? Pon exemplos.**

No. Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x}$ en $x = 0$; puesto que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x + 1)}{x} = 1$$

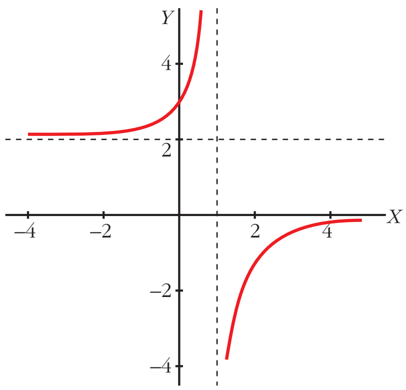
45 **Se $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$, podemos afirmar que f é continua en $x = 2$?**

No. Para que fuera continua debería ser, además, $f(2) = 5$.

46 **Representa unha función que verifique estas condicións. É descontinua nalgún punto?**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

Es discontinua en $x = 1$.



PARA AFONDAR

47 **Calcula os seguintes límites:**

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 2}}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ **d)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x + 3}{x - 2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$

b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{x} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{|x|} = 3$

48 **Indica un valor de x para o cal $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ sexa menor que 0,001.**

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}00033$.

49 **Determina os seguintes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - x)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^3)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x)$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) $+\infty$

50 **Cal é a asíntota vertical destas funcións logarítmicas? Determina o seu límite cando $x \to +\infty$:**

a) $y = \log_2(x-3)$

b) $y = \ln(x+2)$

a) Asíntota vertical: $x = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Páxina 299

AUTOAVALIACIÓN

1. **Calcula o límite de $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ nos puntos de abscisas 0, 3 e 5.**

Di se a función é continua neses puntos.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{cases} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

2. **Determina os seguintes límites:**

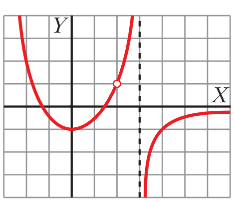
a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

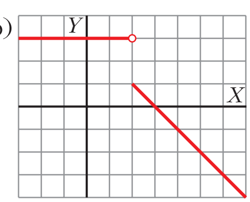
b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos).

3. a)



b)



Sobre a gráfica destas dúas funcións, determina, en cada caso, os seguintes límites

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{cases}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4. Indica as asíntotas da función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ e estuda a posición da curva respecto a elas.

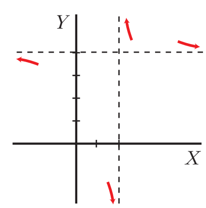
Simplificamos: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \to y = \dfrac{4x}{x - 2}$

- Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x - 2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x - 2} = 4$; $y = 4$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & y > 4 \\ x \to -\infty, & y < 4 \end{cases}$



5. **Xustifica que valor debe tomar a para que a función sexa continua en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{se } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right\}$$

Para que exista el límite, debe ser:

$a - 2 = 4 - 2a \;\to\; 3a = 6 \;\to\; a = 2$

6. **Determina o límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ e representa a información que obteñas.**

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

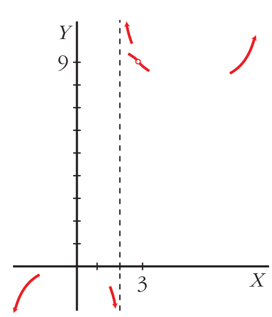
  Simplificamos: $\dfrac{x^2(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \dfrac{x^2}{x - 2}$

  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x - 2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x - 2} \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

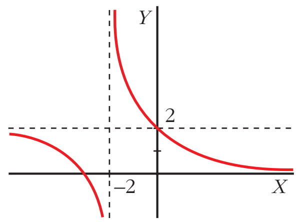
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 2} = -\infty$



7. **Representa unha función que cumpra as seguintes condicións:**

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$



8. **Estuda as ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$ e sitúa a curva respecto á súa asíntota.**

No tiene asíntotas verticales porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de x.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = -\infty$.

Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 8x & 2x \\ \hline \quad - 8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2+4} = 2x - \frac{8x}{x^2+4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$