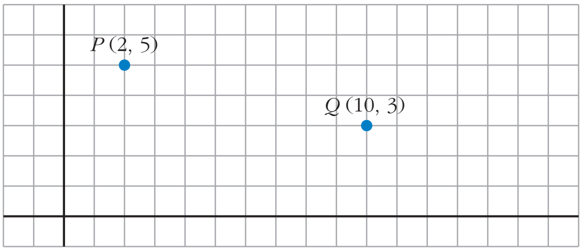
8 XEOMETRÍA ANALÍTICA. PROBLEMAS AFÍNS E MÉTRICOS

Páxina 187

REFLEXIONA E RESOLVE

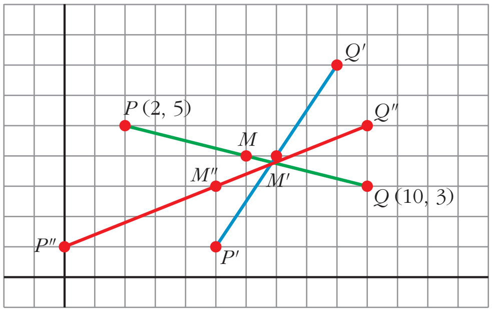
Punto medio dun segmento

Toma os puntos *P*(2, 5), *Q*(10, 3) e represéntaos no plano:



- **Localiza graficamente o punto medio, *M*, do segmento *PQ* e dá as súas coordenadas. Encontras algunha relación entre as coordenadas de *M* e as de *P* e *Q*?**

  M(6, 4)



- **Fai o mesmo cos segmentos de extremos:**

  a) *P'*(5, 1), *Q'*(9, 7)

  b) *P''*(0, 1), *Q''*(10, 5)

  a) *M'*(7, 4)

  b) *M''*(5, 3)

Baseándote nos resultados anteriores, intenta dar un criterio para obter as coordenadas do punto medio dun segmento a partir das dos seus extremos.

Observamos que las coordenadas del punto medio de cada segmento son la semisuma de las coordenadas de sus extremos.

Ecuacións da recta

- **Comproba que as ecuacións:**

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$$

corresponden tamén a unha recta, determinando varios dos seus puntos. (Dálle a t os valores –2, –1, 0, 1, 2, 3, e representa os puntos correspondentes; comprobarás que todos están sobre a mesma recta).

Elimina o parámetro procedendo do seguinte modo:

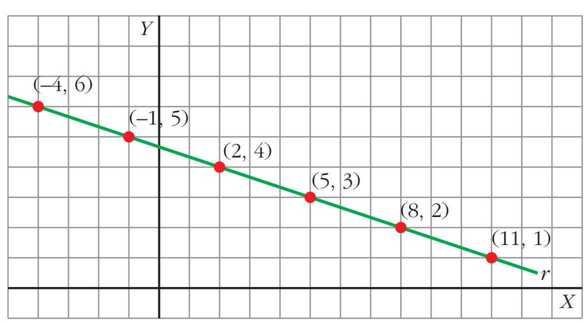
— Despexa t na primeira ecuación.

— Substitúe o seu valor na segunda.

— Reordena os termos da ecuación resultante.

Obterás, así, a ecuación desa recta, na forma habitual.

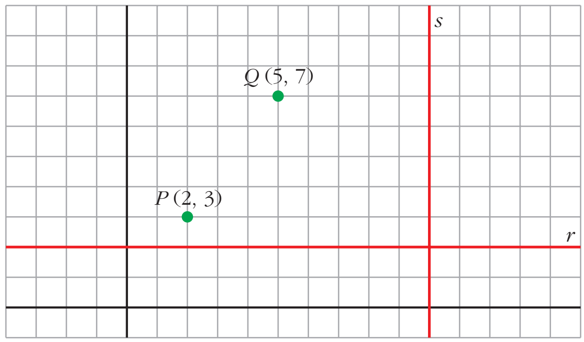
t	–2	–1	0	1	2	3
(x, y)	(–4, 6)	(–1, 5)	(2, 4)	(5, 3)	(8, 2)	(11, 1)

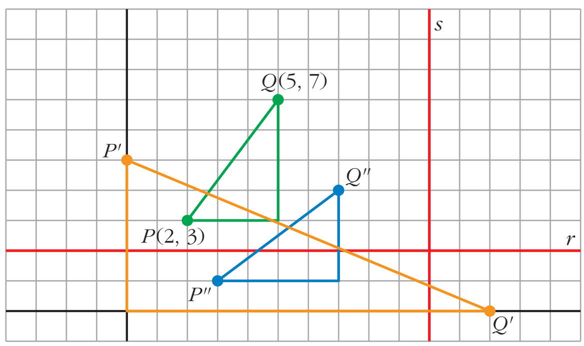


$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{x-2}{3} \\ t &= 4 - y \end{aligned}\right\} \to \frac{x-2}{3} = 4 - y \to x - 2 = 12 - 3y \to y = \frac{-x+14}{3} \to$$

$$\to y = \frac{-1}{3}x + \frac{14}{3}$$

Distancias no plano





- **Indica a distancia dos puntos *P* e *Q* ás rectas *r* e *s*.**

  $d(P, r) = 1$; $d(P, s) = 8$; $d(Q, r) = 5$; $d(Q, s) = 5$

- **Indica a distancia entre os puntos *P* e *Q* (axúdate do teorema de Pitágoras).**

  $d(P, Q) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, pues P y Q son dos vértices de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4.

- **Indica, tamén, a distancia entre:**

  a) *P'*(0, 5), *Q'*(12, 0)

  b) *P''*(3, 1), *Q''*(7, 4)

Baseándote nos resultados anteriores, intenta dar un criterio para calcular a distancia entre dous puntos a partir das súas coordenadas.

a) $d(P', Q') = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

b) $d(P'', Q'') = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, donde $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$.

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$

Páxina 189

1. **Indica as coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{NM}$, onde $M(7, –5)$ e $N(–2, –11)$.**

$\overrightarrow{MN} = (–2, –11) – (7, –5) = (–9, –6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, –5) – (–2, –11) = (9, 6)$

2. **Indica se están aliñados os puntos $P(7, 11)$, $Q(4, –3)$ e $R(10, 25)$.**

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ} = (–3, –14)\\ \overrightarrow{QR} = (6, 28)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{–3}{6} = \frac{–14}{28} \rightarrow P,\ Q \text{ y } R \text{ están alineados.}$$

3. **Calcula o valor de k para que os puntos de coordenadas**

$A(1, 7)$ $\quad$ $B(–3, 4)$ $\quad$ $C(k, 5)$

estean aliñados.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (–4, –3)\\ \overrightarrow{BC} = (k + 3, 1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{–4}{k + 3} = \frac{–3}{1} \rightarrow –4 = –3k – 9 \rightarrow 3k = –5 \rightarrow k = \frac{–5}{3}$$

Páxina 190

4. **Dados os puntos $P(3, 9)$ e $Q(8, –1)$:**

a) Indica o punto medio de PQ.

b) Indica o simétrico de P respecto de Q.

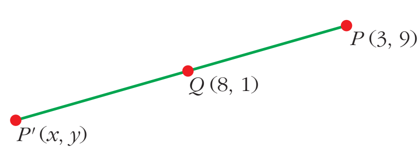
c) Indica o simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overrightarrow{PA}/\overrightarrow{AQ} = 2/3$.

e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overrightarrow{PB}/\overrightarrow{PQ} = 1/5$.

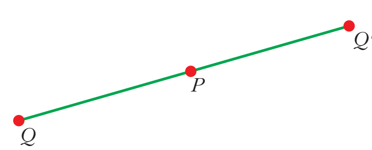
a) $M\left(\dfrac{3 + 8}{2}, \dfrac{9 + (–1)}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2}, 4\right)$

b) $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3 + x}{2} = 8 \rightarrow x = 13\\ \dfrac{9 + y}{2} = –1 \rightarrow y = –11\end{array}\right\} \rightarrow P'(13, –11)$$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así: $$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x' + 8}{2} = 3 \rightarrow x' = –2\\ \dfrac{y' + (–1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19\end{array}\right\} Q'(–2, 19)$$



d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AQ} \;\rightarrow\; (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \;\rightarrow\; x = 5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \;\rightarrow\; y = 5 \end{array}\right\} A(5, 5)$$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{PQ} \;\rightarrow\; (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-3 = 1 \;\rightarrow\; x = 4 \\ y-9 = -2 \;\rightarrow\; y = 7 \end{array}\right\} B(4, 7)$$

Páxina 193

1. Indica as ecuacións paramétricas, continua, implícita e explícita da recta que pasa por A e B, onde:

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$

b) $A(0, 4)$, $B(6, 0)$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$

d) $A(3, 5)$, $B(3, 2)$

a) $A(-1, -1)$; $B(3, 3)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$

Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$; $B(6, 0)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$

Explícita: $y = \dfrac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$; $B(-1, 5)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$

Explícita: $y = 5$

d) $A(3, 5)$; $B(3, 2)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$

Explícita: No existe, pues se trata de una recta vertical de ecuación $x = 3$.

2. Obtén as ecuacións implícita, paramétricas e continua da recta $y = 2x + 3$.

$y = 2x + 3$

- Buscamos dos puntos de la recta y su vector dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow A(0, 3) \\ \text{Si } x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \rightarrow B(1, 5) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$
- Continua: $\dfrac{x - 0}{1} = \dfrac{y - 3}{2}$

3. a) Encontra dous puntos, P e Q, pertencentes á recta r: $2x - 3y + 6 = 0$.

b) Comproba que $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular a (2, –3).

c) Escribe as ecuacións paramétricas de r.

d) Escribe a súa ecuación explícita e comproba que o vector $(1, m)$ é paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ (m é a pendente de r).

a) r: $2x - 3y + 6 = 0$

— Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(0, 2)$

— Si $x = -3 \rightarrow 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) r: $\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos y en la ecuación de r:

$2x - 3y + 6 = 0 \rightarrow 2x + 6 = 3y \rightarrow \dfrac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

$m = \dfrac{2}{3} \rightarrow (1, m) = \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \dfrac{2}{3}\right) \rightarrow \lambda = -3$

Los vectores son proporcionales y, por tanto, paralelos.

Páxina 194

1. Indica a recta do feixe de centro $P(-3, 5)$ que pasa por $(8, 4)$.

Hemos de hallar la recta que pasa por $P(-3, 5)$ y $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$$r: \frac{x+3}{11} = \frac{y-5}{-1}$$

2. Os feixes de rectas cuxos centros son $P(4, 0)$ e $Q(-6, 4)$ teñen unha recta en común. Cal é?

Es la recta que pasa por $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$$r: \frac{x-4}{-10} = \frac{y-0}{4}$$

3. As rectas $r: 3x - 5y - 7 = 0$ e $s: x + y + 4 = 0$ forman parte dun mesmo feixe. Cal das rectas dese feixe ten pendente 4?

- El centro del haz es el punto de corte de r y s. Lo hallamos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{array}\right\} \to x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \to -8y - 19 = 0 \to y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centro del haz es el punto $P\left(-\frac{13}{8}, -\frac{19}{8}\right)$.

- Ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \to 32x - 8y + 7 = 0$$

Páxina 197

1. Escribe as ecuacións paramétricas de dúas rectas que pasen por $P(4, -3)$ e sexan paralela e perpendicular, respectivamente, a r.

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}}$$

$$r: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \to \text{Vector dirección de } r: \vec{v}_r = (-5, 2)$$

• Recta paralela a r que pasa por P.

$P(4, -3)$ $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$$

• Recta perpendicular a r que pasa por P.

$P(4, -3)$ $\vec{v}_l = (2, 5)$

$$l: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 + 5t \end{cases}$$

2. A pendente de r é 3/5. Indica:

a) As coordenadas dun vector paralelo á recta r.

b) A pendente dunha recta perpendicular á recta r.

c) As coordenadas dun vector perpendicular á recta r.

a) $m_r = \dfrac{3}{5} \to \vec{v} = (5, 3)$ es paralelo a r.

b) $-\dfrac{1}{m} = m_r \to m = -\dfrac{5}{3}$

c) $m = -\dfrac{5}{3} \to \vec{w} = (-3, 5)$ es perpendicular a r.

3. $s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ **. Indica:**

a) Ecuación continua dunha recta, r_1, perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) Ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) Ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$$s: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \to P(5, 0) \in s; \ \vec{v}_s = (-1, 3)$$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$$r_1: \frac{x - 5}{3} = \frac{y + 3}{1}$$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$.

$P_2(0, 4) \in r_2$.

$$r_2: \frac{x - 0}{-1} = \frac{y - 4}{3} \to 3x = -y + 4 \to 3x + y - 4 = 0$$

c) El vector dirección de r_3 es el mismo que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$.

$P_3(-3, 0) \in r_3$.

r_3: $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \;\rightarrow\; y = \dfrac{1}{3}x + 1$

4. **Determina as ecuacións implícitas de dúas rectas que pasen por $P(-3, 4)$ e sexan paralela e perpendicular, respectivamente, a r.**

$$r\text{: } 5x - 2y + 3 = 0$$

r: $5x - 2y + 3 = 0 \;\rightarrow\; 5x + 3 = 2y \;\rightarrow\; y = \dfrac{5}{2}x + \dfrac{3}{2}$

La pendiente de r es $m_r = \dfrac{5}{2}$.

- Recta s paralela a r que pasa por $P(-3, 4)$.

  $m_s = m_r = \dfrac{5}{2}$

  s: $y - 4 = \dfrac{5}{2}(x + 3) \;\rightarrow\; s$: $5x - 2y + 23 = 0$

- Recta l perpendicular a r que pasa por $P(-3, 4)$.

  $m_l = -\dfrac{l}{m_r} = -\dfrac{2}{5}$

  l: $y - 4 = -\dfrac{2}{5}(x + 3) \;\rightarrow\; l$: $2x + 5y - 14 = 0$

Páxina 199

1. **Indica a posición relativa destes pares de rectas:**

a) r: $3x + 5y - 8 = 0$

s: $6x + 10y + 4 = 0$

b) r: $2x + y - 6 = 0$

s: $x - y = 0$

c) r: $\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$, s: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

d) r: $3x - 5y = 0$, s: $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a) r: $3x + 5y - 8 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_r = (3, 5)$

s: $6x + 10y + 4 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_s = (6, 10)$

$\dfrac{3}{6} = \dfrac{5}{10} \neq \dfrac{-8}{4} \;\rightarrow\;$ Las dos rectas son paralelas.

b) r: $2x + y - 6 = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_r = (2, 1)$

s: $x - y = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \;\rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

c) r: $\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{v}_r = (5, -3)$

s: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \;\rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

d) r: $3x - 5y = 0 \;\rightarrow\; \vec{n}_r = (3, -5) \;\rightarrow\; \vec{v}_r = (5, 3)$

s: $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \;\rightarrow\; \vec{v}_s = (5, 3),\; P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

Páxina 200

1. Indica o ángulo que forman os seguintes pares de rectas:

a) r_1: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, r_2: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

b) r_1: $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 7 + t \end{cases}$, r_2: $3x - 5y + 4 = 0$

c) r_1: $y = 5x - 1$, r_2: $y = 4x + 3$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (-4, 3)|}{|(-2, 1)|\,|(-4, 3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0{,}9838699101 \;\rightarrow\; \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

b) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1)$; $\vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$cos\ \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (5, 3)|}{|(-2, 1)|\,|(5, 3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \;\rightarrow\; \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

c) $m_{r_1} = 5$; $m_{r_2} = 4$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{4 - 5}{1 + 5 \cdot 4}\right| = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476190 \;\rightarrow\; \alpha = 2°\ 43'\ 34{,}72''$$

Páxina 201

1. ***P*(–6, –3), *Q*(9, 5)**

***r*: 3*x* – 4*y* + 9 = 0, *s*: 5*x* + 15 = 0**

Indica a distancia entre os dous puntos. Indica tamén as distancias de cada un dos puntos a cada recta.

$P(-6, -3),\ \ Q(9, 5)$

$r: 3x - 4y + 9 = 0$

$s: 5x + 15 = 0$

$$dist\ (P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(15, 8)| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$$

$$dist\ (P, r) = \frac{|3 \cdot (-6) - 4(-3) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

$$dist\ (P, s) = \frac{|5(-6) + 15|}{\sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$dist\ (Q, r) = \frac{|3 \cdot 9 - 4 \cdot 5 + 9|}{5} = \frac{16}{5}$$

$$dist\ (Q, s) = \frac{|5 \cdot 9 + 15|}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

2. a) Indica a área do triángulo de vértices *A*(–3, 8), *B*(–3, 2), *C*(5, 2) coa fórmula de Herón.

b) Calcúlaa, tamén, mediante a fórmula habitual $S = b \cdot h_b/2$, onde *b* é o lado $\overline{AC}$. Hai outra forma máis fácil?

a) $A(-3, 8),\ \ B(-3, 2),\ \ C(5, 2)$

Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b = |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \\ c = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{array}\right\} \ p = \frac{8 + 10 + 6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{12(12-8)\,(12-10)\,(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (del apartado anterior)
- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 8)$ y $C(5, 2)$:

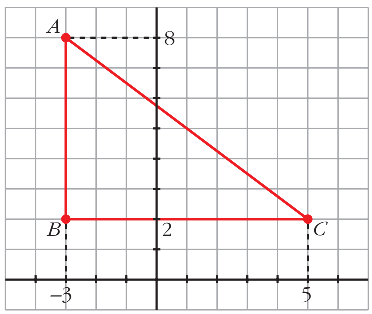
  Pendiente: $m = \dfrac{-6}{8} = -\dfrac{3}{4} \ \to\ y = 2 - \dfrac{3}{4}(x - 5) \ \to\ r: 3x + 4y - 23 = 0$

• $h_b = dist\ [B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4(2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

$S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24\ u^2$

Habría sido más sencillo si hubiéramos dibujado el triángulo.

Observa:



Es claro que $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$.

Como el triángulo es rectángulo:

$S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ u^2$

Páxina 206

EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

Coordenadas de puntos

1 **Determina nos seguintes casos se os puntos A, B e C están aliñados**

a) $A(5, -2)$, $B(3, -2)$, $C(-5, -2)$

b) $A(-1, -2)$, $B(2, 7)$, $C(1, 2)$

c) $A(0, 3)$, $B(2, 2)$, $C(4, 1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, por tanto, A, B y C están alineados.

b) $\overrightarrow{AB} = (2, 7) - (-1, -2) = (3, 9)$

$\overrightarrow{BC} = (1, 2) - (2, 7) = (-1, -5)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ no son proporcionales, por tanto, A, B y C no están alineados.

c) $\overrightarrow{AB} = (2, 2) - (0, 3) = (2, -1)$

$\overrightarrow{BC} = (4, 1) - (2, 2) = (2, -1)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ coinciden, por tanto, los puntos están alineados.

2 **Determina k para que os puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ e $C(6, k)$ estean aliñados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4, k - 1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \rightarrow 5k - 5 = -16 \rightarrow k = \frac{-11}{5}$$

3 **O punto $P(5, -2)$ é o punto medio do segmento AB, do que coñecemos o extremo $A(2, 3)$. Indica B.**

☛ ***Se*** $B = (x, y)$, $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } B = (x, y) \\ \text{Como } P \text{ es punto medio de } AB\end{array}\right\} \rightarrow \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 2 = 10 \rightarrow x = 8 \\ y + 3 = -4 \rightarrow y = -7\end{array}\right\} \rightarrow B = (8, -7)$$

4 **Indica o punto simétrico de $P(1, -2)$ respecto do punto $H(3, 0)$.**

☛ ***H é o punto medio entre P e o seu simétrico.***

Si $P'(x, y)$ es simétrico de $P(1, -2)$ respecto de $H(3, 0)$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ H es el punto medio de PP' $\rightarrow$

$$\rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-2}{2}\right) = (3, 0) \rightarrow \left.\begin{cases} x+1=6 \rightarrow x=5 \\ y-2=0 \rightarrow y=2 \end{cases}\right\} \rightarrow P'(5, 2)$$

5 **Dá as coordenadas do punto P que divide o segmento de extremos $A(3, 4)$ e $B(0, -2)$ en dúas partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.**

Sea $P(x, y)$.

Sustituimos en la condición que nos imponen:

$$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \rightarrow (x-0, y-(-2)) = 2(3-x, 4-y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2(3-x) \\ y+2 = 2(4-y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6-2x \\ y+2 = 8-2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow P(2, 2)$$

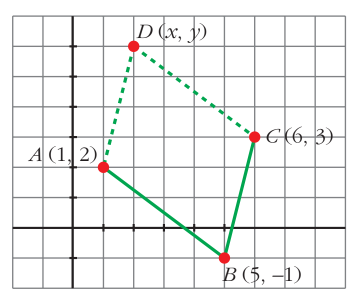
6 **Indica as coordenadas do vértice D do paralelogramo $ABCD$, se sabes que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ e $C(6, 3)$.**

Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(5-1, -1-2) = (6-x, 3-y)$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 = 6-x \\ -3 = 3-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$



Ecuacións de rectas

7 **Escribe as ecuacións vectorial e paramétricas da recta que pasa por A e ten unha dirección paralela ao vector $\vec{d}$.**

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$ **b)** $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

Obtén 5 puntos en cada caso.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Dando valores al parámetro k, obtenemos puntos: (1, 6); (5, 5); (9, 4); (13, 3); (17, 2).

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Puntos: $(-1, 2)$; $(-1, 4)$; $(-1, 6)$; $(-1, 8)$; $(-1, 10)$.

8 Escribe a ecuación da recta que pasa por *P* e *Q* de todas as formas posibles.

a) $P(6, -2)$ e $Q(0, 5)$

b) $P(3, 2)$ e $Q(3, 6)$

c) $P(0, 0)$ e $Q(8, 0)$

Indica, en todos os casos, un vector de dirección unitario.

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Ec. vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Ec. continua: $\dfrac{x - 6}{-6} = \dfrac{y + 2}{7}$

Ec. implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Ec. explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Ec. vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Ec. continua: $\dfrac{x - 3}{0} = \dfrac{y - 2}{4}$

Ec. implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Ec. vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Ec. paramétricas: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Ec. continua: $\dfrac{x - 0}{8} = \dfrac{y - 0}{0}$

Ec. implícita y explícita: $y = 0$

9 **Indica as ecuacións paramétricas de cada unha das seguintes rectas:**

a) $\mathbf{2x - y = 0}$

b) $\mathbf{x - 7 = 0}$

c) $\mathbf{3y - 6 = 0}$

d) $\mathbf{y = -\frac{1}{3}x}$

e) $\mathbf{\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}}$

f) $\mathbf{\frac{1+x}{2} = 1 - y}$

a) Si $x = t \rightarrow 2t - y = 0 \rightarrow y = 2t \rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases}$

d) $y = -\frac{1}{3}x$

Obtenemos un punto y un vector de esta ecuación, $P(0, 0)$, $\vec{v}(-3, 1)$, y a partir de ellos, las ecuaciones paramétricas:

$\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$

e) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2}$

Obtenemos un punto, P, y un vector dirección, $\vec{v}$: $P(1, -1)$; $\vec{v}(3, 2)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$\begin{cases} x = \ \ 1 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

f) $\frac{1+x}{2} = 1 - y \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}$

Obtenemos un punto, P, y un vector dirección, $\vec{v}$: $P(-1, 1)$; $\vec{v}(2, -1)$.

Las ecuaciones paramétricas son:

$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = \ \ 1 - t \end{cases}$

10 **Indica a ecuación continua de cada unha das seguintes rectas:**

a) $\mathbf{r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t \end{cases}}$

b) $\mathbf{r_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3t \end{cases}}$

c) $\mathbf{r_3: 3x + y - 1 = 0}$

d) $\mathbf{r_4: y + 1 = \frac{1}{2}(x - 2)}$

a) $\left.\begin{array}{l} x = 2t - 1 \\ y = -3t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} t = \frac{x+1}{2} \\ t = \frac{y}{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3}$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3t \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ t = \dfrac{y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{3}$

c) $3x + y - 1 = 0 \rightarrow 3x = -y - 1 \rightarrow x = \dfrac{-y-1}{3} \rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-3}$

d) $y + 1 = \dfrac{1}{2}(x - 2) \rightarrow \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{1}$

11 **Determina a ecuación implícita de cada unha das seguintes rectas:**

a) $r_1: \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$

b) $r_2: \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{cases}$

c) $r_3: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $r_4: y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{2}{5}$

Obtén, en cada caso, un vector normal á recta.

a) $\dfrac{x+1}{-2} = y - 1 \rightarrow x + 1 = -2y + 2 \rightarrow x + 2y - 1 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(1, 2)$

b) $\left.\begin{array}{l} x = -t + 1 \\ y = 5t - 2 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{5} \rightarrow 5x - 5 = -y - 2 \rightarrow 5x + y - 3 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(5, 1)$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 3t - 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} \rightarrow y - 2 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(0, 1)$

d) $y = \dfrac{-3}{2}x + \dfrac{2}{5} \rightarrow 10y = -15x + 4 \rightarrow 15x + 10y - 4 = 0$

Vector normal: $\vec{n}(15, 10)$

12 **Escribe as ecuacións paramétricas e implícitas dos eixes de coordenadas.**

☛ ***Ambos os eixes pasan pola orixe de coordenadas e os seus vectores directores son os vectores da base.***

Eje X: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{ eje } X \\ \vec{d}_X = (1, 0) \end{cases} \rightarrow$ Eje X: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow y = 0$

Eje Y: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{ eje } Y \\ \vec{d}_Y = (0, 1) \end{cases} \rightarrow$ Eje Y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \rightarrow x = 0$

13 **Obtén, para cada unha das seguintes rectas, un vector de dirección, un vector normal e a súa pendente:**

a) $r_1: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 5t \end{cases}$ **b)** $r_2: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$

c) $r_3: x + 3 = 0$ **d)** $r_4: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

a) Vector dirección: $\vec{v} = (2, 5)$

Vector normal: $\vec{n} = (-5, 2)$

Pendiente: $m = \dfrac{5}{2}$

b) Vector dirección: $\vec{v} = (2, 4)$

Vector normal: $\vec{n} = (-4, 2)$

Pendiente: $m = \dfrac{4}{2} = 2$

c) Vector dirección: $\vec{v} = (0, 1)$

Vector normal: $\vec{n} = (1, 0)$

Pendiente: No tiene, es una recta vertical.

d) Vector dirección: $\vec{v} = (3, 1)$

Vector normal: $\vec{n} = (-1, 3)$

Pendiente: $m = \dfrac{1}{3}$

14 **Comproba se o punto $P(13, -18)$ pertence a algunha das seguintes rectas:**

$r_1: 2x - y + 5 = 0$ $r_2: \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases}$

$r_3: 3y + 54 = 0$ $r_4: \begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases}$

$r_1: 2x - y + 5 = 0 \rightarrow 2 \cdot 13 + 18 + 5 \neq 0$ $P \notin r_1$

$r_2: \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 13 = 12 + t \rightarrow t = 1 \\ -18 = -5 + 13t \rightarrow t = -1 \end{matrix}$ $P \notin r_2$

$r_3: 3y + 54 = 0 \rightarrow 3(-18) + 54 = 0$ $P \in r_3$

$r_4: \begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 13 = 13 \\ -18 = 10 - t \rightarrow t = 28 \end{matrix}$ $P \in r_4$

15 **Indica, en cada caso, o valor de k para que a recta $x + ky - 7 = 0$ conteña o punto dado:**

a) (5, –2)

b) (7, 3)

c) (–3, 4)

a) $(5, -2) \rightarrow 5 + k(-2) - 7 = 0 \rightarrow -2k = 2 \rightarrow k = -1$

b) $(7, 3) \rightarrow 7 + k \cdot 3 - 7 = 0 \rightarrow 3k = 0 \rightarrow k = 0$

c) $(-3, 4) \rightarrow -3 + 4k - 7 = 0 \rightarrow 4k = 10 \rightarrow k = \dfrac{5}{2}$

Páxina 207

16 **Dada a recta r: $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$, escribe as ecuacións (en forma explícita) das seguintes rectas:**

a) Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.

r: $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}(x + 1) - 3 \rightarrow s: y = -\frac{1}{5}x - \frac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \rightarrow s: y = 5(x + 2) + 5 \rightarrow s: y = 5x + 15$

17 **Indica, en cada caso, a ecuación da recta que pasa polo punto $P(1, -3)$ e é:**

a) Paralela á recta $2x - 3y + 5 = 0$. En forma paramétrica.

b) Perpendicular á recta $x + y - 3 = 0$. En forma continua.

c) Paralela á recta $2y - 3 = 0$.

d) Perpendicular á recta $x + 5 = 0$.

a) $\vec{v}_r = (3, 2)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

b) $\vec{v}_r = (1, 1)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \frac{x - 1}{1} = \frac{y + 3}{1}$

c) $\vec{v}_r = (2, 0)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow r: y = -3$

d) $\vec{v}_r = (1, 0)$, $P(1, -3) \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow r: y = -3$

18 **Indica a ecuación da paralela a $2x - 3y = 0$ cuxa ordenada na orixe é -2.**

☛ ***A recta pasa polo punto $(0, -2)$.***

r: $2x - 3y = 0$

$\left.\begin{array}{l} s \,//\, r \rightarrow \text{la pendiente de } s \text{ ha de ser igual a la de } r \\ P(0, -2) \in s \end{array}\right\}$

$\rightarrow \begin{cases} m_s = m_r = 2/3 \\ P(0, -2) \in s \end{cases} \rightarrow \underbrace{y = \frac{2}{3}x - 2}_{\text{ECUACIÓN EXPLÍCITA}} \rightarrow \underbrace{2x - 3y - 6 = 0}_{\text{ECUACIÓN IMPLÍCITA}}$

19 **Dada a recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe a ecuación da recta perpendicular a ela no punto de corte co eixe de ordenadas.**

☛ ***O eixe de ordenadas é o vertical: $x = 0$.***

- Veamos primero cuál es el punto de corte, $P(x, y)$, de la recta con el eje de ordenadas.

$$r: \begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \end{cases} \rightarrow 4 - 0 + 3y - 6 = 0 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$$

Luego $P(0, 2) \in r$ y también debe ser $P(0, 2) \in s$, donde $s \perp r$.

- Como $s \perp r \rightarrow$ sus pendientes deben cumplir:

$$m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-4/3} = \frac{3}{4}$$

- Como $P(0, 2) \in s$ y $m_s = \frac{3}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}x + 2 \rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

20 **Escribe as ecuacións paramétricas das seguintes rectas:**

a) O seu vector de posición é $\vec{a}(-3, 1)$ e o seu vector de dirección é perpendicular a $\vec{v}(0, -2)$.

b) Pasa por $A(5, -2)$ e é paralela a: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$

c) Pasa por $A(1, 3)$ e é perpendicular á recta de ecuación $2x - 3y + 6 = 0$.

d) É perpendicular ao segmento PQ no seu punto medio, onde $P(0, 4)$ e $Q(-6, 0)$.

a) La ecuación vectorial será:

$$\overrightarrow{OX} = \vec{a} + t\vec{v} \rightarrow (x, y) = (-3, 1) + t(2, 0) \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 \end{cases}$$

b) El vector dirección de la recta buscada debe ser el mismo (o proporcional) al de la recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (pues debe ser paralela a ella).

Luego: $\vec{d}(-1, 2)$

Como debe pasar por $A(5, -2) \rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

c) La pendiente de la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ es:

$$m_r = \frac{2}{3} \rightarrow m_s = \frac{-3}{2} \text{ (pues } m_r \cdot m_s = -1 \text{ por ser } r \perp s)$$

Un vector dirección puede ser $\vec{s} = (2, -3)$.

Además, $A(1, 3) \in s$.

Por tanto, $s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$

d) El punto medio de PQ es $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-6, -4)$

$\rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}\,(4, -6) \text{ es un vector dirección de } s, \text{ pues } \vec{d} \perp \overrightarrow{PQ} \end{cases}$

Luego, $s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$

21 **Dunha certa recta r coñecemos a pendente $m = \frac{2}{3}$. Indica a recta s en cada caso:**

a) s é paralela á recta r e pasa pola orixe de coordenadas.

b) s é perpendicular á recta r e contén ao punto (1, 2).

a) Al ser paralela, tiene la misma pendiente. Además, pasa por (0, 0):

$s: y = \frac{2}{3}x$

b) Al ser perpendicular, su pendiente es $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$:

$y = \frac{-3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$

Feixe de rectas

22 **Consideramos o feixe de rectas de centro (3, –2).**

a) Escribe a ecuación deste feixe de rectas.

b) Indica a ecuación da recta deste feixe que pasa polo punto (–1, 5).

c) Cal das rectas do feixe é paralela a $2x + y = 0$?

d) Indica a recta do feixe cuxa distancia á orixe é igual a 3.

a) $a(x - 3) + b(y + 2) = 0$; o bien $y = -2 + m(x - 3)$

b) Si pasa por (–1, 5), entonces, sustituyendo en $y = -2 + m(x - 3)$, obtenemos:

$5 = -2 + m(-1 - 3) \rightarrow 7 = -4m \rightarrow m = -\frac{7}{4}$; es decir:

$y = -2 - \frac{7}{4}(x - 3) \rightarrow 4y = -8 - 7x + 21 \rightarrow 7x + 4y - 13 = 0$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente –2.

Por tanto, será:

$y = -2 - 2(x - 3) \rightarrow y = -2 - 2x + 6 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x - 3) \rightarrow y = -2 + mx - 3m \rightarrow mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\frac{|-3m - 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3$; es decir:

$|-3m - 2| = 3\sqrt{m^2 + 1}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2 + 1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \rightarrow m = \frac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\frac{5}{12}x - y - \frac{15}{12} - 2 = 0 \rightarrow 5x - 12y - 39 = 0$

23 Determina o centro do feixe de rectas de ecuación:

$$\mathbf{3kx + 2y - 3k + 4 = 0}$$

Llamamos (x_0, y_0) al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \rightarrow 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \rightarrow x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \rightarrow y_0 = -2$

El centro del haz es el punto $(1, -2)$.

24 As rectas $r: y = 3$ e $s: y = 2x - 1$ forman parte do mesmo feixe de rectas. Indica a ecuación da recta dese feixe de pendente –2.

Si $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ están en el mismo haz de rectas, el centro de dicho haz es el punto de corte de estas rectas: $P(2, 3)$.

Buscamos la recta que pasa por $P(2, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$:

$$y = -2(x - 2) + 3 \rightarrow y = -2x + 7$$

Posición relativa de dúas rectas

25 **Indica o punto de corte das rectas r e s en cada caso:**

a) $r: 2x - y + 5 = 0; \quad s: x + y + 4 = 0$

b) $r: x - 2y - 4 = 0; \quad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 3t \end{cases}; \quad s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r: 2x - y + 5 = 0 \\ s: \ \ x + y + 4 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $P(-3, -1)$

b) $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \to x - 1 = \dfrac{y - 2}{-3} \to -3x + 3 = y - 2 \to 3x + y - 5 = 0$

$\left.\begin{array}{l} r: x - 2y - 4 = 0 \\ s: 3x + y - 5 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $P(2, -1)$

c) Por las ecuaciones de r: $x = 2(^*)$

$s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \end{cases} \to x = 3 + 2y \xrightarrow{(^*)} 2 = 3 + 2y \to y = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto, $P\left(2, -\dfrac{1}{2}\right)$.

26 **Calcula o valor dos parámetros k e t para que as seguintes rectas se corten no punto $A(1, 2)$:**

$$r: kx - ty - 4 = 0$$

$$s: 2tx + ky - 2 = 0$$

$\left.\begin{array}{l} A \in r \to k \cdot 1 - t \cdot 2 - 4 = 0 \\ A \in s \to 2t \cdot 1 + k \cdot 2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} k - 2t - 4 = 0 \\ 2k + 2t - 2 = 0 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema: $k = 2; \ t = -1$

27 **Determina o valor de k para que as rectas r e s sexan paralelas.**

$$r: \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{-2}$$

$$s: \frac{x + 5}{-6} = \frac{y - 1}{k}$$

Para que sean paralelas, sus vectores dirección han de ser proporcionales; es decir:

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{k} \to k = 4$$

28 **Indica o valor de k para que as seguintes rectas sexan coincidentes:**

$$r: 2x + 3y + 5 = 0 \qquad s: \begin{cases} x = -6t + k \\ y = 4t + 2 \end{cases}$$

Expresamos ambas rectas en forma implícita:

r: $2x + 3y + 5 = 0$

s: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Para que $r = s$, estas ecuaciones tienen que ser proporcionales, y por tanto:

$$-12 - 4k = 10 \rightarrow k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

Páxina 208

29 **Estuda a posición relativa dos seguintes pares de rectas:**

a) $r: 5x + y + 7 = 0$

$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0$

$s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

a) Buscamos un vector dirección de cada recta:

r: $5x + y + 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (5, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 5)$

s: $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -10t - 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, -10)$

Como los vectores dirección son proporcionales $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, las rectas o son paralelas o son coincidentes.

Como $P(1, -3) \in s$ y $P \notin r$, las rectas son paralelas.

b) Buscamos un vector dirección de cada recta:

r: $3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5) \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 3)$

s: $-3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (-3, 5) \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

c) Buscamos un vector dirección de cada recta:

r: $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (3, 1)$

s: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, 2)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

Ángulos

30 **Indica o ángulo que forman os seguintes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ 10x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2t \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 4 + t \end{array}\right\}$ **d)** $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y + 3 = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} r: y = 2x + 5 \\ s: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \to$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\ \alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r\, m_s}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = 1 \to \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1\, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \to$

$$\to cos\ \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}|\ |\vec{w}|} = \frac{|30 - 30|}{|\vec{v}|\ |\vec{w}|} = 0 \to \alpha = 90°$$

c) Los vectores dirección de esas rectas son:

$$\vec{d}_1 = (-1, 2) \quad \text{y} \quad \vec{d}_2 = (-3, 1)$$

Entonces:

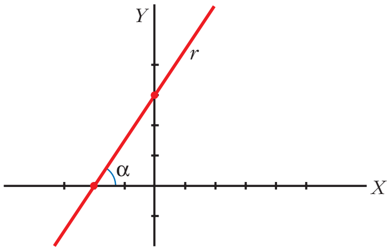
$$cos\ \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1|\ |\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = 45°$$

d) $\left.\begin{array}{l} \vec{a}_1 = (2, -1) \perp r_1 \\ \vec{a}_2 = (0, 2) \perp r_2 \end{array}\right\} \to \alpha \equiv \widehat{r_1\, r_2} = \widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2} \to cos\ \alpha = \dfrac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\ |\vec{a}_2|} =$

$$= \frac{|0 - 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}4472 \to \alpha = 63°\ 26'\ 5{,}82''$$

31 **Que ángulo forma a recta $3x - 2y + 6 = 0$ co eixe de abscisas?**

☛ ***Non é necesario que apliques ningunha fórmula. Sabes que a pendente de r é a tanxente do ángulo que forma r co eixe de abscisas. Indica o ángulo coa pendente de r.***



La pendiente de r es $m_r = \dfrac{3}{2}$.

La pendiente de r es, además, $tg\ \alpha$:

$$m_r = tg\ \alpha \to tg\ \alpha = \frac{3}{2} \to \alpha = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$

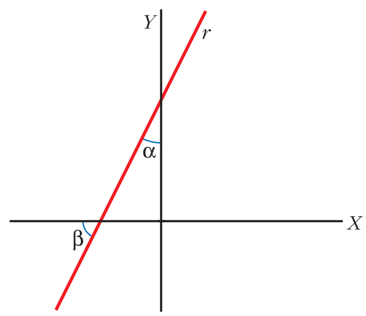
32 **Que ángulo forma a recta $2x - y + 5 = 0$ co eixe de ordenadas?**

☛ ***O ángulo pedido é o complementario do ángulo que a recta forma co eixe de abscisas.***

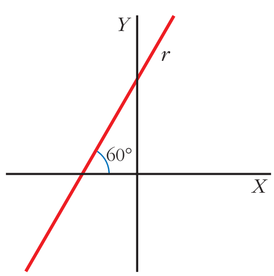
El ángulo pedido, α, es complementario de $\beta \rightarrow tg\ \beta = \dfrac{1}{tg\ \alpha}$

Por otro lado, $tg\ \beta = m_r = 2$:

$$tg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \beta} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54{,}2''$$



33 **Calcula n de modo que a recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° co OX.**



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\dfrac{3}{n} \end{array}\right\} \text{ Como } tg\ 60° = m_r, \text{ se tiene que:}$$

$$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \rightarrow n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

34 **Calcula m e n nas rectas de ecuacións:**

r: $mx - 2y + 5 = 0$

s: $nx + 6y - 8 = 0$

se sabes que r pasa polo punto $P(1, 4)$ e que r e s forman un ángulo de 45°.

☛ ***As coordenadas de P deben verificar a ecuación de r. Así calculas m. Expresa tg 45° en función das pendentes de r e s para obter n.***

☛ ***Ou ben mira o problema resolto número 3.***

$P \in r \rightarrow m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \rightarrow m = 3$

r: $3x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} \rightarrow m_r = \dfrac{3}{2}$

s: $nx + 6y - 8 = 0 \rightarrow y = -\dfrac{n}{6}x + \dfrac{8}{6} \rightarrow m_s = -\dfrac{n}{6}$

$$tg\ 45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)(3/2)}\right| = \left|\frac{-2n - 18}{12 - 3n}\right| = 1$$

Hay dos posibilidades:

- $\dfrac{-2n - 18}{12 - 3n} = 1 \rightarrow -2n - 18 = 12 - 3n \rightarrow n = 30$
- $\dfrac{-2n - 18}{12 - 3n} = -1 \rightarrow -2n - 18 = -12 + 3n \rightarrow n = -\dfrac{6}{5}$

Distancias e áreas

35 **Indica a distancia entre os puntos P e Q en cada caso:**

a) $P(1, 3)$, $Q(5, 7)$ b) $P(-2, 4)$, $Q(3, -1)$ c) $P(-4, -5)$, $Q(0, 7)$

a) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

b) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(3+2)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

c) $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(0+4)^2 + (7+5)^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

36 **Calcula k de modo que a distancia entre os puntos $A(5, k)$ e $B(3, -2)$ sexa igual a 2.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2 - k)$

$dist\ (A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow$

$\rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

37 **Indica o valor que debe ter a para que a distancia entre $A(a, 2)$ e $B(-3, 5)$ sexa igual a $\sqrt{13}$.**

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13} \rightarrow \sqrt{(-3-a)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13} \rightarrow (-3-a)^2 + 9 = 13 \rightarrow$

$\rightarrow (-3-a)^2 = 4 \begin{cases} -3 - a = 2 \rightarrow a = -5 \\ -3 - a = -2 \rightarrow a = -1 \end{cases}$

38 **Indica a lonxitude do segmento que determina a recta $x - 2y + 5 = 0$ ao cortar aos eixes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

- $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow -2y + 5 = 0 \rightarrow y = \dfrac{5}{2} \rightarrow$

$\rightarrow A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.

• $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow$

$\rightarrow B(5, 0)$ es el punto de corte con el eje X.

• Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2 + \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$

39 **Indica a distancia do punto $P(2, -3)$ ás seguintes rectas:**

a) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases}$ **b)** $y = \frac{9}{4}$ **c)** $2x + 5 = 0$

a) Veamos primero la ecuación implícita de la recta:

$$\begin{cases} t = x/2 \\ t = -y \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = -y \rightarrow x + 2y = 0$$

Entonces:

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

b) $y = \frac{9}{4} \rightarrow y - \frac{9}{4} = 0$

Por tanto:

$$dist(P, r) = \frac{|1(-3) - 9/4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{|-3 - 9/4|}{\sqrt{1}} = \frac{21}{4}$$

c) $dist(P, r) = \frac{|2 \cdot 2 + 5|}{\sqrt{2^2 + 0}} = \frac{9}{2}$

40 **Calcula a distancia da orixe de coordenadas ás seguintes rectas:**

a) $3x - 4y + 12 = 0$ **b)** $2y - 9 = 0$

c) $x = 3$ **d)** $3x - 2y = 0$

a) $dist(O, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12}{5}$

b) $dist(O, r) = \frac{|2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{9}{2}$

c) $dist(O, r) = \frac{|0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{3}{1} = 3$

d) $dist(O, r) = \frac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0$

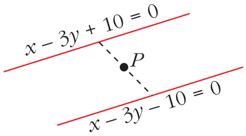
(es decir, la recta $3x - 2y = 0$ pasa por el origen).

41 **Determina c para que a distancia da recta $x - 3y + c = 0$ ao punto $(6, 2)$ sexa de $\sqrt{10}$ unidades. (Hai dúas solucións).**

$$dist(P, r) = \frac{|1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|6 - 6 + c|}{\sqrt{10}} = \frac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \ \rightarrow \ c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \ \rightarrow \ c_2 = -10 \end{cases}$

Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas:



42 **Indica a distancia entre as rectas $r: x - 2y + 8 = 0$ e $r': -2x + 4y - 7 = 0$.**

☛ ***Comproba que son paralelas; toma un punto calquera de r e indica a súa distancia a r'.***

Sus pendientes son $m_r = \dfrac{1}{2} = m_{r'} \ \rightarrow$ Son paralelas.

Entonces, la distancia entre r y r' será:

$$dist(P, r') \text{ donde } P \in r$$

Sea $x = 0$.

Sustituyendo en $r \ \rightarrow \ y = \dfrac{-8}{-2} = 4 \ \rightarrow \ P(0, 4) \in r$

Así:

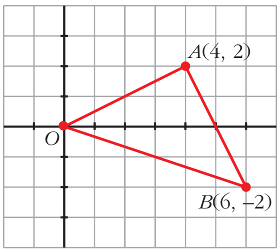
$$dist(r, r') = dist(P, r') = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{|16 - 7|}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{10}$$

43 **No triángulo cuxos vértices son $O(0, 0)$, $A(4, 2)$ e $B(6, -2)$, calcula:**

a) A lonxitude do lado $\overline{OB}$.

b) A distancia de A ao lado $\overline{OB}$.

c) A área do triángulo.



a) $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

b) Ecuación de OB:

$$m = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}; \ y = -\frac{1}{3}x \ \rightarrow \ x + 3y = 0$$

Distancia de A a OB:

$$d = \frac{|4 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \text{ (es la altura del triángulo).}$$

c) Área $= \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \dfrac{10}{\sqrt{10}} = 10 \text{ u}^2$

44 **Comproba que o triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ e $C(4, 2)$ é rectángulo e indica a área.**

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{array}\right\} \quad 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \;\rightarrow$$

Por tanto, el triángulo es rectángulo.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5 \text{ u}^2$$

45 **Indica a área do triángulo cuxos vértices son $P(-1, 2)$, $Q(4, 7)$, $R(7, 0)$.**

$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(7+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$ (Base del triángulo)

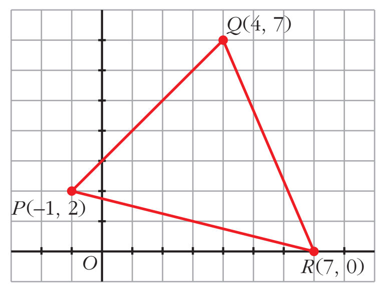
Ecuación de PR:

$$m = \frac{0-2}{7+1} = -\frac{1}{4} \;\rightarrow\; y = 0 - \frac{1}{4}(x-7) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 4y = -x + 7 \;\rightarrow\; x + 4y - 7 = 0$$

Altura: $d(Q, PR) = \dfrac{|4 + 4 \cdot 7 - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{17}}$

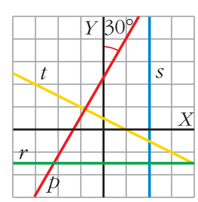
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{25}{\sqrt{17}} = 25 \text{ u}^2$$

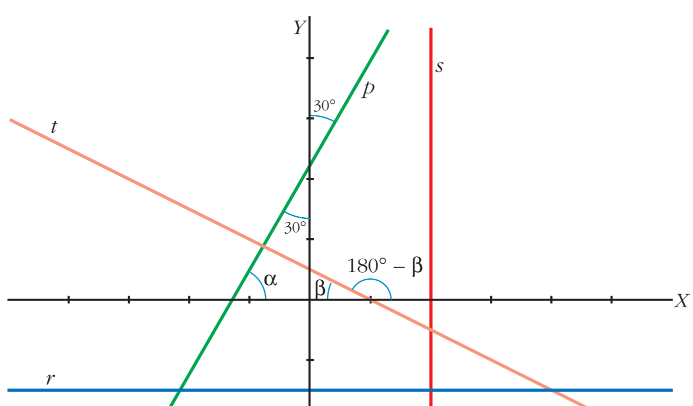


Páxina 209

PARA RESOLVER

46 **Indica as ecuacións das rectas r, s, t e p.**





- p: Pasa por los puntos (–3, –3) y (1, 4).

  Así, su pendiente es:

$$m = \frac{4-(-3)}{1-(-3)} = \frac{7}{4}$$

  Por tanto:

$$p:\ y = 1 + \frac{7}{4}(x-4) \ \rightarrow\ 7x - 4y + 9 = 0$$

- r: Su pendiente es 0 y pasa por el punto $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$.

  Por tanto:

$$r:\ y = -\frac{3}{2}$$

- s: Su vector dirección es (0, 1) y pasa por (2, 0).

  Por tanto:

$$s:\ \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases}$$

- t: Pasa por los puntos (1, 0) y (–3, 2).

  Así, su pendiente es:

$$m = \frac{2-0}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

  Por tanto:

$$t:\ y = -\frac{1}{2}(x-1) \ \rightarrow\ x + 2y - 1 = 0$$

47 **Dada a recta:**

$$\boldsymbol{r:\ \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + kt \end{cases}}$$

indica un valor para k de modo que r sexa paralela á bisectriz do segundo cuadrante.

- La bisectriz del segundo cuadrante es $x = -y \ \rightarrow\ \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$ (en paramétricas).

  Su vector dirección es $\vec{d} = (-1, 1)$.

- El vector dirección de r es $\vec{r} = (3, k)$.

- Como queremos que r // bisectriz del segundo cuadrante, entonces sus vectores dirección deben ser proporcionales:

$$\frac{-1}{3} = \frac{1}{k} \ \rightarrow\ k = -3$$

48 **No triángulo de vértices $A(-2, 3)$, $B(5, 1)$, $C(3, -4)$, indica as ecuacións:**

a) Da altura que parte de B.

b) Da mediana que parte de B.

c) Da mediatriz do lado $\overline{CA}$.

a) La altura que parte de B, h_B, es una recta perpendicular a AC que pasa por el punto B:

$$\left.\begin{array}{l} h_B \perp AC\,(5, -7) \;\to\; \text{el vector dirección de } h_B \text{ es } \vec{h}_B\,(7, 5) \\ B(5, 1) \in h_B \end{array}\right\} \to$$

$$\to\; h_B: \begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \;\to\; \begin{cases} t = \dfrac{x-5}{7} \\[2mm] t = \dfrac{y-1}{5} \end{cases} \;\to\; \frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{5} \;\to\; h_B: 5x - 7y - 18 = 0$$

b) m_B (mediana que parte de B) pasa por B y por el punto medio, m, de AC:

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\dfrac{-2+3}{2}, \dfrac{3-4}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in m_B \\ B(5, 1) \in m_B \end{array}\right\} \to$$

$$\to\; \vec{m}_B\left(5 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ es vector dirección de } m_B.$$

Luego:

$$m_B: \begin{cases} x = 5 + \dfrac{9}{2}t \\[2mm] y = 1 + \dfrac{3}{2}t \end{cases} \;\to\; \begin{cases} 2x = 10 + 9t \\[2mm] t = \dfrac{2y \cdot 2}{3} \end{cases} \;\to\; \begin{cases} t = \dfrac{2x-10}{9} \\[2mm] t = \dfrac{2y-2}{3} \end{cases} \;\to$$

$$\to\; \frac{2x-10}{9} = \frac{2y-2}{3} \;\to\; m_B: 6x - 18y - 12 = 0$$

c) La mediatriz de CA, z, es perpendicular a CA por el punto medio del lado, m'. Así:

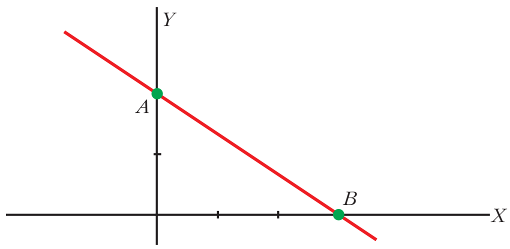
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CA} = (-5, 7) \perp z \;\to\; \text{vector dirección de } z\text{: } \vec{z}(7, 5) \\ m'\left(\dfrac{3-2}{2}, \dfrac{-4+3}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in z \end{array}\right\} \to$$

$$\to\; z: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 7t \\[2mm] y = -\dfrac{1}{2} + 5t \end{cases} \;\to\; \begin{cases} t = \dfrac{2x-1}{14} \\[2mm] t = \dfrac{2y+1}{10} \end{cases} \;\to\; \frac{2x-1}{14} = \frac{2y+1}{10} \;\to$$

$$\to\; z: 20x - 28y - 24 = 0 \;\to\; z: 5x - 7y - 6 = 0$$

49 **A recta $2x + 3y - 6 = 0$ determina, ao cortar os eixes de coordenadas, o segmento AB. Indica a ecuación da mediatriz de AB.**

☛ ***Despois de determinar os puntos A e B, indica a pendente da mediatriz, inversa e oposta á de AB. Co punto medio e coa pendente, podes escribir a ecuación.***



- $A = r \cap$ eje Y: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to 3y - 6 = 0 \to y = 2 \to A(0, 2)$

- $B = r \cap$ eje X: $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to 2x - 6 = 0 \to x = 3 \to B(3, 0)$

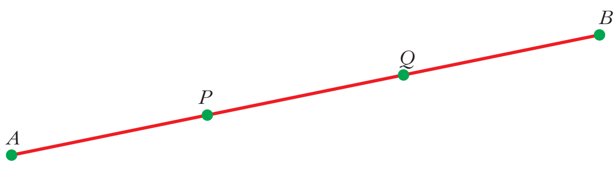
- $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3, -2) \perp m_{AB} \text{ (mediatriz de } AB) \to \vec{m}_{AB} = (2, 3) \\ M_{AB}\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \text{ (punto medio de } AB) \in \text{ mediatriz} \end{array}\right\} \to$

  $\to y - 1 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) \to y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \to m_{AB}: 6x - 4y - 5 = 0$

50 **Determina os puntos que dividen o segmento AB, $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, en tres partes iguais.**

☛ ***Se P e Q son eses puntos, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.***

Escribe as coordenadas de $\overrightarrow{AP}$ e de $\overrightarrow{AB}$, e obtén P. Q é o punto medio de $\overline{PB}$.



- $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \to (x + 2, y - 1) = \frac{1}{3}(7, 3) \to$

  $\to \begin{cases} x + 2 = \frac{7}{3} \to x = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \\ y - 1 = \frac{3}{3} \to y = 1 + 2 = 2 \end{cases} \to P\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

- Q es el punto medio de $PB \to Q\left(\frac{1/3 + 5}{2}, \frac{2 + 4}{2}\right) \to Q\left(\frac{8}{3}, 3\right)$

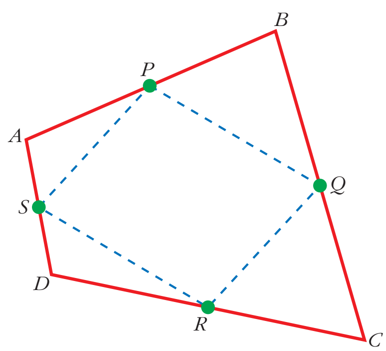
51 **Que coordenadas cres que debe ter P para que se verifique que $3\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{QR} = 0$, se $Q(3, 2)$ e $R(-1, 5)$?**

$3\ \overrightarrow{PQ} = 2\ \overrightarrow{QR} \to 3(3 - x,\ 2 - y) = 2(-4,\ 3) \to$

$$\to \begin{cases} 9 - 3x = -8 \\ 6 - 3y = 6 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{17}{3} \\ y = 0 \end{cases} \to P\left(\frac{17}{3},\ 0\right)$$

52 **Os puntos medios dos lados de calquera cuadrilátero forman un paralelogramo. Compróbao co cuadrilátero de vértices:**

$$A(3, 8) \qquad B(5, 2) \qquad C(1, 0) \qquad D(-1, 6)$$



$P\left(\dfrac{5+3}{2},\ \dfrac{8+2}{2}\right) = (4,\ 5)$

$Q(3,\ 1);\ \ R(0,\ 3);\ \ S(1,\ 7)$

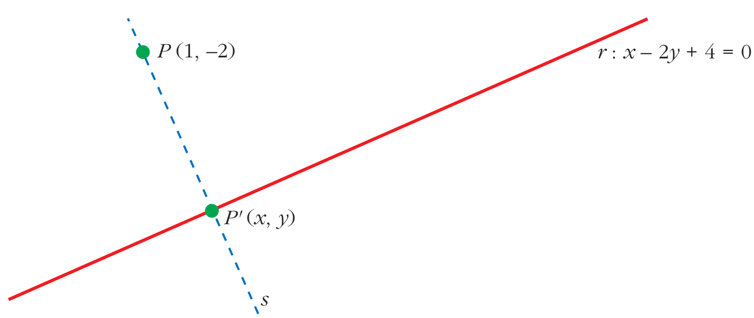
$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (3-4,\ 1-5) = (-1,\ -4) \\ \overrightarrow{SR} &= (0-1,\ 3-7) = (-1,\ -4) \end{aligned}\right\}\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{SP} &= (4-1,\ 5-7) = (3,\ -2) \\ \overrightarrow{RQ} &= (3-0,\ 1-3) = (3,\ -2) \end{aligned}\right\}\ \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$$

53 **Indica o pé da perpendicular trazada desde $P(1, -2)$ á recta:**

$$r:\ x - 2y + 4 = 0$$

☛ ***Escribe a perpendicular a r desde P e indica o punto de corte con r.***



Sea s la recta perpendicular a r desde P y $\vec{r} = (2,\ 1)$ vector director de r.

Así, $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{r} \Rightarrow$ el vector dirección de s, $\vec{s}$, también es perpendicular a $\vec{r}\,(\vec{s} \perp \vec{r})$, luego podemos tomar $\vec{s}(1, -2)$. Como $P(1, -2) \in s$:

$$s: \begin{cases} x = 1 + t \to t = x - 1 \\ y = -2 - 2t \to t = \dfrac{y+2}{-2} \end{cases} \to x - 1 = \frac{y+2}{-2} \to -2x + 2 = y + 2 \to$$

$$\to s:\ 2x + y = 0$$

El punto $P'(x, y)$ es tal que:

$$P' = s \cap r \begin{cases} s: 2x + y = 0 \rightarrow y = -2x \\ r: x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$x - 2(-2x) + 4 = 0 \rightarrow x + 4x + 4 = 0 \rightarrow$$

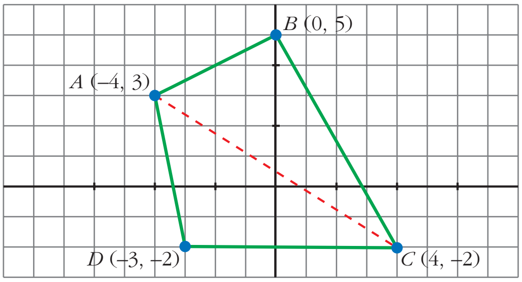
$$\rightarrow x = \frac{-4}{5} \rightarrow y = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$$

Luego: $P'\left(\frac{-4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

54 **Indica a área do cuadrilátero de vértices:**

$$\boldsymbol{A(-4, 3) \quad B(0, 5) \quad C(4, -2) \quad D(-3, -2)}$$

☛ ***Traza unha diagonal para descompoñelo en dous triángulos da mesma base.***



- La diagonal AC divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

$$|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$$

- Sean h_B y h_D las alturas desde B y D, respectivamente, a la base:

$$h_B = dist\,(B, r) \quad \text{y} \quad h_D = dist\,(D, r)$$

  donde r es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

  Tomando como vector dirección de r el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} -20 + 24 + k = 0 \Rightarrow k = -4 \Rightarrow r: 5x + 8y - 4 = 0$$

  Luego:

$$h_B = dist\,(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

$$h_D = dist\,(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

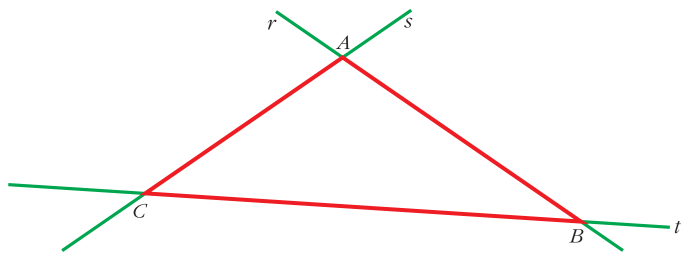
• Así:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) =$$

$$= \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

55 **Calcula a área do triángulo cuxos lados están sobre as rectas:**

$$\boldsymbol{r: x = 3} \qquad \boldsymbol{s: 2x + 3y - 6 = 0} \qquad \boldsymbol{t: x - y - 7 = 0}$$



• $A = r \cap s \quad \begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \ 6 + 3y - 6 = 0 \ \rightarrow \ y = 0$

Luego: $A(3, 0)$

• $B = r \cap t \quad \begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \ 3 - y - 7 = 0 \ \rightarrow \ y = -4$

Luego: $B(3, -4)$

• $C = s \cap t \quad \begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \ \rightarrow \ x = y + 7 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow \ 2(y + 7) + 3y - 6 = 0 \ \rightarrow \ 2y + 14 + 3y - 6 = 0 \ \rightarrow \ 5y + 8 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow \ y = \frac{-8}{5} \ \rightarrow \ x = \frac{-8}{5} + 7 = \frac{27}{5}$

Luego: $C\left(\frac{27}{5}, \frac{-8}{5}\right)$

• Consideramos o segmento AB como base:

$$|\overrightarrow{AB}| = |(0, -4)| = \sqrt{16} = 4$$

• La altura desde C es $h_C = dist\,(C, r) = \frac{|(-8/5) - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{23}{5}$

• Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h_C}{2} = \frac{4 \cdot 23/5}{2} = \frac{46}{5}$$

56 **No triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ e $C(4, 1)$, indica as lonxitudes da mediana e da altura que parten de B.**

- *Mediana*. Es el segmento BM donde M es el punto medio de AC.

$$M\left(\frac{3}{2}, 0\right) \rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{3}{2} - 2, 0 - 4\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$

La longitud de la mediana es: $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{1/4 + 16} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

- *Altura*. Es el segmento BP donde P es el pie de la perpendicular a AC desde B.

$\overrightarrow{AC} = (5, 2) \rightarrow$ la recta que contiene ese segmento es:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -1 + 2t \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2} \rightarrow 2x - 5y - 3 = 0$$

$\vec{v} = (-2, 5) \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow$ la recta $s \perp r$ que pasa por B:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x + 2y - 18 = 0$$

$$P = r \cap s \rightarrow \begin{cases} r: 2x - 5y - 3 = 0 \\ s: 5x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 5, y sumamos:

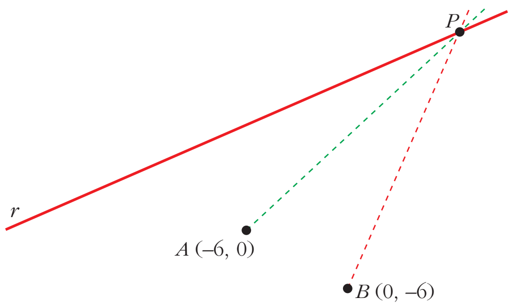
$$\begin{array}{r} 4x - 10y - 6 = 0 \\ 25x + 10y - 90 = 0 \\ \hline 29x - 96 = 0 \end{array} \rightarrow x = \frac{96}{29} \rightarrow 2 \cdot \frac{96}{29} - 5y - 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5y = \frac{192}{29} - 3 = \frac{105}{29} \rightarrow y = \frac{105}{29} : 5 = \frac{21}{29}$$

Luego: $P\left(\dfrac{96}{29}, \dfrac{21}{29}\right)$

Así: $h_B = |\overrightarrow{BP}| = \left|\left(\dfrac{38}{29}, -\dfrac{95}{29}\right)\right| = \sqrt{\dfrac{10\,469}{29^2}} = \dfrac{\sqrt{10\,469}}{29} \approx 3{,}528$

57 **Indica o punto da recta $3x - 4y + 8 = 0$ que equidista de $A(-6, 0)$ e $B(0, -6)$.**



$P(x, y)$ debe verificar dos condiciones:

1. $P(x, y) \in r \Rightarrow 3x - 4y + 8 = 0$

2. $dist\,(A, P) = dist\,(B, P) \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+6)^2}$

$$\begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 + 12y + 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 8 = 0 \\ x = y \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow 3x - 4x + 8 = 0 \rightarrow x = 8 = y \rightarrow P(8, 8)$

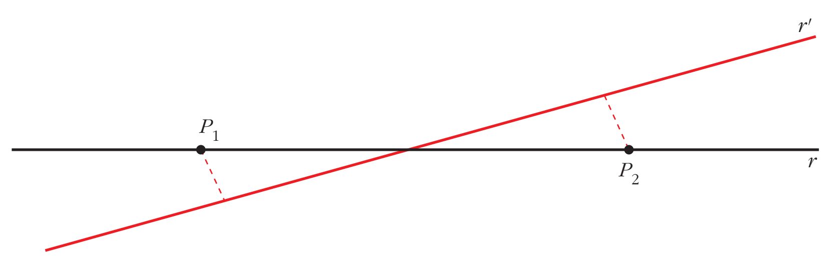
58 **Determina un punto na recta $y = 2x$ que diste 3 unidades da recta $3x - y + 8 = 0$.**

$$\begin{cases} P(x, y) \in r\colon y = 2x \\ dist(P, r') = 3, \text{ donde } r'\colon 3x - y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \dfrac{|3x - y + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \end{cases} \rightarrow \frac{|3x - 2x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow \frac{|x + 8|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{dos posibilidades: } \begin{cases} x + 8 = 3\sqrt{10} \rightarrow x_1 = 3\sqrt{10} - 8 \rightarrow \\ x + 8 = -3\sqrt{10} \rightarrow x_2 = -3\sqrt{10} - 8 \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow y_1 = 6\sqrt{10} - 16 \rightarrow \\ \rightarrow y_2 = -6\sqrt{10} - 16 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} P_1\,(3\sqrt{10} - 8,\ 6\sqrt{10} - 16) \\ P_2\,(-3\sqrt{10} - 8,\ -6\sqrt{10} - 16) \end{cases}$$



59 **Indica os puntos da recta $y = -x + 2$ que equidistan das rectas $x + 2y - 5 = 0$ e $4x - 2y + 1 = 0$.**

Sean r_1, r_2 y r_3 las tres rectas del ejercicio, respectivamente.

Buscamos los puntos $P(x, y)$ que cumplan:

$$\begin{cases} P \in r_1 \Rightarrow y = -x + 2 \\ dist(P, r_2) = dist(P, r_3) \rightarrow \dfrac{|x + 2y - 5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|4x - 2y + 1|}{\sqrt{20}} \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{|x + 2(-x + 2) - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x - 2(-x + 2) + 1|}{2\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\to \ |-x-1| = \frac{|6x-3|}{2} \ \to \ \begin{cases} -x-1 = \dfrac{6x-3}{2}, \ \text{ o bien} \\ -x-1 = \dfrac{-6x+3}{2} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} -2x-2 = 6x-3, \ \text{ o bien} \\ -2x-2 = -6x+3 \end{cases} \to \begin{cases} 8x = 1 \\ 4x = 5 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1/8 \\ x_2 = 5/4 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} y_1 = -\dfrac{1}{8} + 2 = \dfrac{15}{8} \\ y_2 = -\dfrac{5}{4} + 2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to \begin{cases} P_1\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{15}{8}\right) \\ P_2\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

60 **Calcula c para que a distancia que hai entre as rectas $4x + 3y - 6 = 0$ e $4x + 3y + c = 0$ sexa 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \to y_0 = 2 \to P(0, 2) \in r_1$

Así, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16+9}} = 3 \to$

$$\to \frac{|6+c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \ \to c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \to c_2 = -21 \end{cases}$$

61 **O lado desigual do triángulo isóscele ABC, ten por extremos $A(1, -2)$ e $B(4, 3)$. O vértice C está na recta $3x - y + 8 = 0$. Indica as coordenadas de C e a área do triángulo.**

- La recta del lado desigual (base) tiene como vector dirección $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \to \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \to r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que contiene la altura tiene por vector dirección $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual AB, es decir, por $M\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$:

$$h_c: \begin{cases} x = 5/2 - 5t \\ y = 1/2 + 3t \end{cases} \to \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \to$$

$$\to h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \to h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

- $C = s \cap h_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$

$$\begin{cases} 3x - y + 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + 2y - 16 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$$12y - 36 = 0 \to y = \frac{36}{12} = 3 \to$$

$$\to 3x - 3 + 8 = 0 \to 3x + 5 = 0 \to x = \frac{-5}{3}$$

Luego: $C\left(\frac{-5}{3}, 3\right)$

• $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{34} \cdot (\sqrt{850}/6)}{2} \approx 14{,}17$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\frac{-25}{6}, \frac{-5}{2}\right) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{CM}| = \frac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

62 **Indica a ecuación da recta que pasa polo punto de intersección das rectas r e s e forma un ángulo de 45° coa recta: $x + 5y - 6 = 0$.**

$$r: 3x - y - 9 = 0 \qquad s: x - 3 = 0$$

$$P = r \cap s: \begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x \qquad - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow 9 - y - 9 = 0 \rightarrow y = 0$$

Luego: $P(3, 0)$

Como la recta pedida y $x + 5y - 6 = 0$ forman un ángulo de 45°, entonces si sus pendientes son, respectivamente, m_1 y m_2, se verifica:

$$tg\ 45° = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right| \rightarrow 1 = \left|\frac{(-1/5) - m_1}{1 + (-1/5) \cdot m_1}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 = \left|\frac{-1 - 5 \cdot m_1}{5 - m_1}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 - m_1 = -1 - 5m_1, \text{ o bien} \\ -(5 - m_1) = -1 - 5m_1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4m_1 = -6 \rightarrow m_1 = -6/4 \\ 6m_1 = 4 \rightarrow m_1 = 4/6 \end{cases}$$

Hay dos posibles soluciones:

$$t_1: y - 0 = \frac{-6}{4}(x - 3) \rightarrow t_1: y = \frac{-3}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$t_2: y - 0 = \frac{4}{6}(x - 3) \rightarrow t_2: y = \frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$$

63 **Dadas $r: 2x - y - 17 = 0$ e $s: 3x - ky - 8 = 0$, calcula o valor de k para que r e s se corten formando un ángulo de 60°.**

☛ ***Indica a pendente de r. A pendente de s é 3/k. Obterás dúas solucións.***

Las pendientes de r y s son, respectivamente:

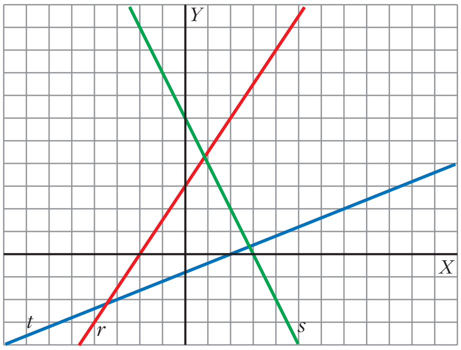
$$m_r = 2 \quad \text{y} \quad m_s = \frac{3}{k}$$

Entonces:

$$tg\ 60° = \left|\frac{2 - 3/k}{1 + 2 \cdot 3/k}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{2k - 3}{k + 6}\right| \to \text{ dos casos:}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} \sqrt{3}(k + 6) = 2k - 3 \\ -\sqrt{3}(k + 6) = 2k - 3 \end{array}\right\} \to \begin{cases} k_1 = \dfrac{6\sqrt{3} + 3}{2 - \sqrt{3}} = 24 + 15\sqrt{3} \\[2ex] k_2 = \dfrac{6\sqrt{3} + 3}{2 + \sqrt{3}} = 9\sqrt{3} - 12 \end{cases}$$

64 **As rectas r: $3x - 2y + 6 = 0$, s: $2x + y - 6 = 0$ e t: $2x - 5y - 4 = 0$ son os lados dun triángulo. Represéntao e indica os seus ángulos.**



$m_r = \dfrac{3}{2}$; $m_s = -2$; $m_t = \dfrac{2}{5}$

$$tg\ (\widehat{r, s}) = \left|\frac{3/2 - (-2)}{1 + 3/2 \cdot (-2)}\right| = \frac{7/2}{2} = \frac{7}{4}$$

Luego: $(\widehat{r, s}) = 60°\ 15'\ 18{,}4''$

$$tg\ (\widehat{r, t}) = \left|\frac{3/2 - 2/5}{1 + 3/2 \cdot 2/5}\right| = \left|\frac{15 - 4}{10 + 6}\right| = \frac{11}{16}$$

Luego: $(\widehat{r, t}) = 34°\ 30'\ 30{,}7''$

Por último: $(\widehat{s, t}) = 180° - (\widehat{r, s}) - (\widehat{r, t}) = 85°\ 14'\ 11''$

65 **Indica os ángulos do triángulo cuxos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ e $C(3, -4)$.**

☛ ***Representa o triángulo e observa se ten algún ángulo obtuso.***

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{BA}\ (-11, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (6, -6)$; $\overrightarrow{CA}\ (-6, 6)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$; $\overrightarrow{CB}\ (5, 3)$

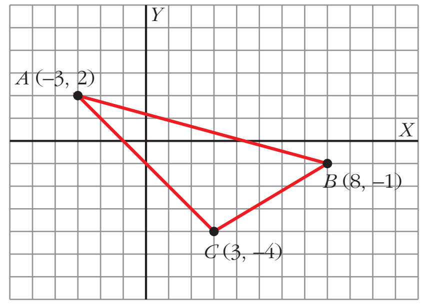
$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{66 + 18}{\sqrt{130}\,\sqrt{72}} \approx 0{,}868$$

Luego: $\hat{A} = 29°\ 44'\ 41{,}6''$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{55 - 9}{\sqrt{130}\,\sqrt{34}} \approx 0{,}692$$

Luego: $\hat{B} = 46°\ 13'\ 7{,}9''$

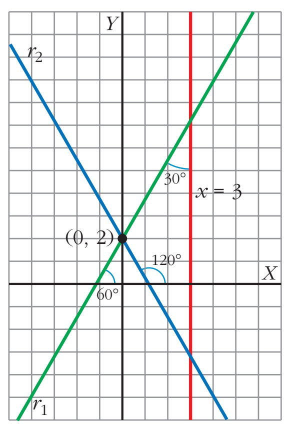
Así, $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 104°\ 2'\ 10{,}5''$



Páxina 210

66 **Indica a ecuación da recta que pasa por (0, 2) e forma un ángulo de 30° con *x* = 3.**

☛ ***A recta que buscamos forma un ángulo de 60° ou de 120° co eixe OX.***



La recta r forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\ 60° = \sqrt{3}, \quad \text{o bien} \\ m_2 = tg\ 120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

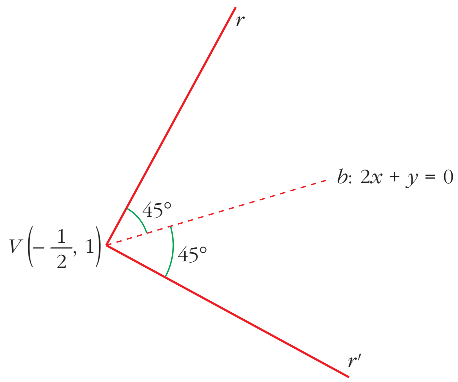
$$r_1: y = \sqrt{3}x + 2$$

$$r_2: y = -\sqrt{3}x + 2$$

67 **A recta $2x + y = 0$ é a bisectriz dun ángulo recto cuxo vértice é $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.**

Indica as ecuacións dos lados do ángulo.

Las pendientes de las tres rectas son: $m_b = -2$, m_r, $m_{r'}$



$$tg\ 45° = \left|\frac{m_b - m_r}{1 + m_b\, m_r}\right| \to 1 = \left|\frac{-2 - m_r}{1 - 2m_r}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} 1 - 2m_r = -2 - m_r \to m_r = 3 \\ -1 + 2m_{r'} = -2 - m_{r'} \to m_{r'} = -1/3 \end{cases} \to$$

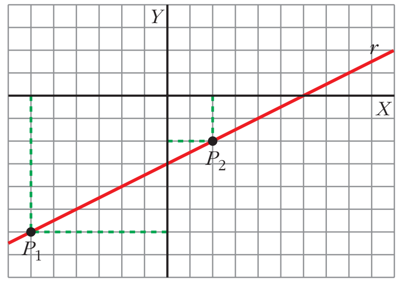
$$\to \begin{cases} r: y - 1 = 3\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = 3x + \frac{5}{2} \\ r': y - 1 = \frac{-1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \to y = \frac{-1}{3}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

68 **Encontra un punto na recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste dos eixes de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X: y = 0 \\ \text{Eje } Y: x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \to \begin{cases} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{array}{l} \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \to \text{dos casos: } \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases} \to \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}$$

$$\to \begin{cases} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} P_1\,(-6, -6) \\ P_2\,(2, -2) \end{cases}$$



69 **Indica as ecuacións das rectas que pasan por $A(-2, 2)$ e forman un ángulo de 60° con $x = y$.**

$b: x = y \rightarrow$ su pendiente es $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1 - m}{1 + 1 \cdot m}\right| \rightarrow \sqrt{3} = \left|\frac{1 - m}{1 + m}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} + \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 1 - m \rightarrow m_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$$r_1: y - 2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}(x + 2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

$$r_2: y - 2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + 1}(x + 2)$$

70 **Escribe a ecuación da recta r que pasa por $A(2, 3)$ e $B(5, 6)$ e indica a ecuación dunha recta paralela a r, cuxa distancia a r sexa igual á distancia entre A e B.**

• $r: \begin{cases} \text{vector dirección } \overrightarrow{AB} = (3, 3) \\ \text{pasa por } A(2, 3) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{3} \rightarrow 3x - 3y + 3 = 0 \rightarrow r: x - y + 1 = 0$$

• $s \parallel r \rightarrow m_s = m_r = 1 \rightarrow y = x + c \rightarrow s: x - y + c = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(A, s) = dist\,(A, B) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|2 - 3 + c|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = |\overrightarrow{AB}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{|1 + c|}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \rightarrow \begin{cases} -1 + c = 6 \Rightarrow c_1 = 6 + 1 = 7 \\ -1 + c = -6 \Rightarrow c_2 = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$\rightarrow s_1: x - y + 7 = 0$$

$$s_2: x - 5 = 0$$

71 **Indica o punto simétrico de $P(1, 1)$ repecto á recta $x - 2y - 4 = 0$.**

- $\overrightarrow{PP'} \perp \vec{v}$ donde P' es el simétrico de P respecto a esa recta y $\vec{v}$ es el vector dirección de la misma.

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (x - 1, y - 1) \cdot (2, 1) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2(x - 1) + (y - 1) = 0 \rightarrow 2x + y - 3 = 0$$

- Además, el punto medio de PP', M, debe pertenecer a la recta. Luego:

$$M\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \in r \rightarrow \frac{x+1}{2} - 2\,\frac{y+1}{2} - 4 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + 1 - 2y - 2 - 8 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x - 2y - 9 = 0$$

- Así, teniendo en cuenta las dos condiciones:

$$\left.\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \rightarrow x = 9 + 2y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2(9 + 2y) + y - 3 = 0 \rightarrow 18 + 4y + y - 3 = 0 \rightarrow y = \frac{-15}{5} = -3$$

$$\rightarrow x = 9 + 2(-3) = 9 - 6 = 3$$

Luego: $P' = (3, -3)$

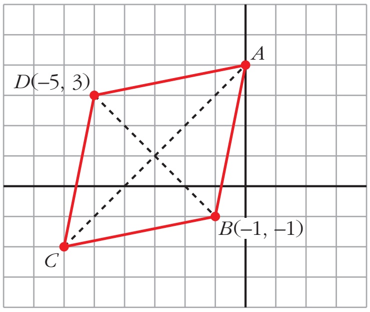
72 **Un rombo $ABCD$ ten un vértice no eixe das ordenadas; outros dous vértices opostos son $B(-1, -1)$ e $D(-5, 3)$.**

Indica as coordenadas dos vértices A e C e a área do rombo.

Sea $A \in$ eje $Y \rightarrow A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales AC y BD se cortan en su punto medio, M.

Además, $AC \perp BD$.



- $M\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$ es el punto medio de BD (y de AC).

• Sea d la recta perpendicular a BD por M (será, por tanto, la que contiene a AC):

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BD} = (-4,\ 4) \ \to\ \vec{d} = (4,\ 4) \text{ es vector dirección de } d \\ M(-3,\ 1) \in d\end{array}\right\} \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l}\text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \dfrac{4}{4} = 1 \\ M(-3,\ 1) \in d\end{array}\right. \to$$

$$\to\ d: y - 1 = (x + 3) \ \to\ y = x + 4$$

• Así:

$$A = d \cap \text{eje } Y: \left\{\begin{array}{l} y = x + 4 \\ x = 0\end{array}\right\} \to\ y = 4 \ \to\ A(0,\ 4)$$

• M es punto medio de AC $\to$ $(-3,\ 1) = \left(\dfrac{0 + x_2}{2},\ \dfrac{4 + y_2}{2}\right) \to$

$$\to \left\{\begin{array}{l} -3 = \dfrac{x_2}{2} \ \to\ x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4 + y_2}{2} \ \to\ y_2 = -2\end{array}\right\} \to\ C(-6,\ -2)$$

• Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6,\ -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4,\ 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\end{array}\right\} \to\ \text{Área} = \dfrac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$$

73 **No triángulo de vértices $A(-3,\ 2)$, $B(1,\ 3)$ e $C(4,\ 1)$, indica o ortocentro e o circuncentro.**

☛ ***O ortocentro é o punto de intersección das alturas. O circuncentro é o punto de intersección das mediatrices.***

ORTOCENTRO: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$ donde h_A, h_B y h_C son las tres alturas (desde A, B y C, respectivamente).

• $h_A \left\{\begin{array}{l}\vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3,\ -2) \ \to\ \vec{a} = (2,\ 3) \\ A \in h_A\end{array}\right. \to\ h_A: \left\{\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 3t\end{array}\right. \to$

$$\to\ \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 2}{3} \ \to\ h_A: 3x - 2y + 13 = 0$$

• $h_B \left\{\begin{array}{l}\vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (7,\ -1) \ \to\ \vec{b} = (1,\ 7) \\ B \in h_B\end{array}\right. \to\ h_B: \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 3 + 7t\end{array}\right. \to$

$$\to\ x - 1 = \frac{y - 3}{7} \ \to\ h_B: 7x - y - 4 = 0$$

• $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \;\rightarrow\; \vec{c} = (1, -4) \\ C \in h_C \end{cases} \;\rightarrow\; h_C: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x - 4 = \dfrac{y - 1}{-4} \;\rightarrow\; h_C: 4x + y - 17 = 0$

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases}$ Sumando:

$$\left.\begin{array}{l} 11x - 21 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{21}{11} \\ y = 7x - 4 = 7 \cdot \dfrac{21}{11} - 4 = \dfrac{147 - 44}{11} = \dfrac{103}{11} \end{array}\right\} R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, R, está también en h_A. Basta con sustituir en su ecuación.

CIRCUNCENTRO: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde m_A, m_B y m_C son las tres mediatrices (desde A, B y C, respectivamente).

• $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \;\rightarrow\; \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y - 2 = \dfrac{3}{2}\left(x - \dfrac{5}{2}\right) \;\rightarrow\; y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4}$

• $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \;\rightarrow\; \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } M'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y - \dfrac{5}{2} = -4(x + 1) \;\rightarrow\; y = -4x - \dfrac{3}{2}$

Así:

$S = m_A \cap m_C: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} \\ y = -4x - \dfrac{3}{2} \end{cases} \;\rightarrow\; \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} = -4x - \dfrac{3}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 6x - 7 = -16x - 6 \;\rightarrow\; 22x = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{22} \;\rightarrow$

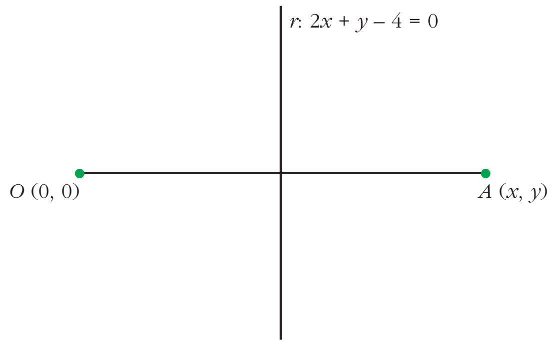
$\rightarrow\; y = -4 \cdot \dfrac{1}{22} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-4 - 33}{22} = \dfrac{-37}{22}$

Así, $S\left(\dfrac{1}{22}, \dfrac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular m_B y comprobar que $S \in m_B$.

74 **A recta $2x + y - 4 = 0$ é a mediatriz dun segmento que ten un extremo no punto (0, 0).**

Indica as coordenadas do outro extremo.



Un vector dirección de la recta es el $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \;\rightarrow\; x - 2y = 0 \;\rightarrow\; x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \;\rightarrow\; 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \;\rightarrow\; 4y + y - 8 = 0 \;\rightarrow$$

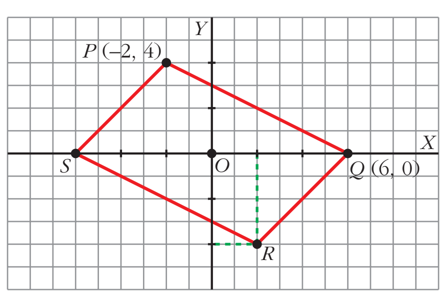
$$\rightarrow\; y = \frac{8}{5} \;\rightarrow\; x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

75 **Os puntos $P(-2, 4)$ e $Q(6, 0)$ son vértices consecutivos dun paralelogramo que ten o centro na orixe de coordenadas. Indica:**

a) Os outros dous vértices.

b) Os ángulos do paralelogramo.



a) Como las dos diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, que es el centro, se tienen fácilmente los otros dos vértices:

$$R(2, -4),\quad S(-6, 0)$$

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = (8, -4) \rightarrow \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} = (-8, 4)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} = (-4, -4) \rightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ} = (4, 4)$

$$cos\ \hat{P} = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PS}|\,|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{-32 + 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = -0{,}31623 \rightarrow \hat{P} = 108°\ 26'\ 5{,}8'' = \hat{R}$$

$$\hat{S} = \frac{360° - (\hat{P} + \hat{R})}{2} = 71°\ 33'\ 54'' = \hat{Q}$$

NOTA: Podríamos haber calculado $\hat{S}$ con los vectores:

$$cos\ \hat{S} = \frac{\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SR}}{|\overrightarrow{SP}|\,|\overrightarrow{SR}|} = \frac{32 - 16}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{80}} = 0{,}31623 \rightarrow \hat{S} = 71°\ 33'\ 54''$$

76 **Dous dos lados dun paralelogramo están sobre as rectas $x + y - 2 = 0$ e $x - 2y + 4 = 0$ e un dos seus vértices é o punto (6, 0).**

Indica os outros vértices.

• Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{array}{l} r_1: \\ r_2: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{array} \right.$$

$$3y - 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + 2 - 2 = 0 \rightarrow x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

• El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de x e y por las coordenadas de C). Así pues, el vértice C no es consecutivo de A.

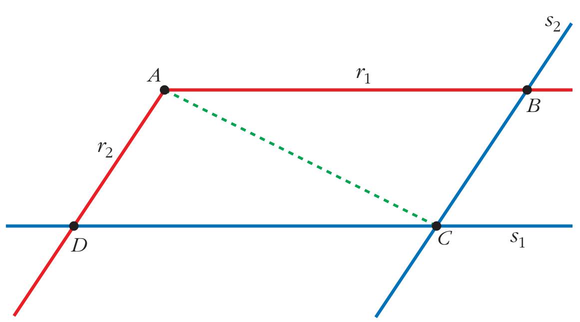
Sean $s_1 // r_1$ una recta que pasa por C y $s_2 // r_2$ una recta que pasa por C.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, B y D, serán los puntos de corte de:

$$r_1 \cap s_2 = B$$

$$r_2 \cap s_1 = D$$



$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \;\rightarrow\; 6 + 0 + a = 0 \;\rightarrow\; a = -6 \end{cases} \rightarrow\; s_1: x + y - 6 = 0$

$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \;\rightarrow\; 6 - 0 + b = 0 \;\rightarrow\; b = -6 \end{cases} \rightarrow\; s_2: x - 2y - 6 = 0$

• $B = r_1 \cap s_2: \begin{cases} x + \;\; y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema:

De la primera ecuación $\rightarrow$ $x = 2 - y$ $\rightarrow$ en la segunda $\rightarrow$ $2 - y - 2y - 6 = 0$ $\rightarrow$

$\rightarrow\; y = \dfrac{-4}{3} \;\rightarrow\; x = \dfrac{10}{3} \;\rightarrow\; B\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{-4}{3}\right)$

• $D = r_2 \cap s_1: \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + \;\; y - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 6 - y \end{cases}\right\} \rightarrow\; 6 - y - 2y + 4 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; y = \dfrac{10}{3} \;\rightarrow\; x = \dfrac{8}{3} \;\rightarrow\; D\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$

77 **Indica un punto do eixe de abscisas que equidiste das rectas $4x + 3y + 6 = 0$ e $3x + 4y - 9 = 0$.**

$P(x, 0)$ debe verificar $dist\,(P, r) = dist\,(P, s)$:

$$\frac{|4x + 3 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x + 4 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{25}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 6 = 3x - 9 & \rightarrow\; x_1 = -15 \\ 4x + 6 = -(3x - 9) & \rightarrow\; x_2 = 3/7 \end{cases} \rightarrow\; P_1(-15, 0),\;\; P_2\left(\frac{3}{7}, 0\right)$$

78 **Indica o punto da recta $2x - 4y - 1 = 0$ que coa orixe de coordenadas e co punto $P(-4, 0)$ determina un triángulo de área 6.**

☛ ***Se tomamos como base $|\overrightarrow{PQ}| = 4$, a altura do triángulo mide 3. O punto que buscamos está a 3 unidades de PO e na recta dada. Hai dúas solucións.***

Los vértices son $O(0, 0)$, $P(-4, 0)$, $Q(x, y)$.

Si tomamos como base OP, entonces:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{OP}| \cdot h}{2} \;\rightarrow\; 6 = \frac{4 \cdot h}{2} \;\rightarrow\; h = 3$$

El punto $Q(x, y) \in r \;\rightarrow\; 2x - 4y - 1 = 0$ y debe verificar que $dist\,(Q, OP) = 3$.

La recta sobre la que se encuentra OP tiene por vector dirección $\overrightarrow{OP}(-4, 0)$ y pasa por $(0, 0)$. Luego es el eje X: $y = 0$.

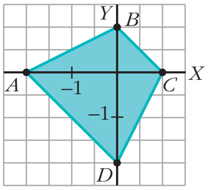
Así:

$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 4 \cdot 3 - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \dfrac{13}{2} \\ 2x - 4(-3) - 1 = 0 \rightarrow x_2 = \dfrac{-11}{2} \end{cases}$$

Luego hay dos triángulos, OPQ_1 y OPQ_2, donde:

$$Q_1\left(\frac{13}{2}, 3\right) \text{ y } Q_2\left(\frac{-11}{2}, -3\right)$$

79 **Sexan *A, B, C, D* os puntos de corte das rectas $x - 2y + 2 = 0$ e $2x - y - 2 = 0$ cos eixes de coordenadas. Proba que o cuadrilátero *ABCD* é un trapecio isóscele e indica a súa área.**



***A* (–2, 0)**
***B* (0, 1)**
***C* (1, 0)**
***D* (0, –2)**

Mira o problema resolto número 1.

Sean: $A = r \cap$ eje OX: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0)$

$B = r \cap$ eje OY: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = 1 \Rightarrow B(0, 1)$

$C = s \cap$ eje OX: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$

$D = s \cap$ eje OY: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2 \Rightarrow D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1)] \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, *ABCD* es un trapecio isósceles de bases *BC* y *DA*.

Para calcular el área necesitamos la altura:

Como $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \rightarrow y = -x - 2 \rightarrow AD: x + y + 2 = 0$

$$h = dist\,(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

80 **A recta $x + y - 2 = 0$ e unha recta paralela a ela que pasa polo punto $(0, 5)$ determinan, xunto cos eixes de coordenadas, un trapecio isóscele. Indica a súa área.**

$$\left.\begin{array}{l} s /\!/ r: x + y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \to 0 + 5 + k = 0 \to k = -5$$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

- Sean: $A = r \cap$ eje X: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$

  $B = r \cap$ eje Y: $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 2 \Rightarrow B(0, 2)$

  $C = s \cap$ eje X: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 5 \Rightarrow C(5, 0)$

  $D = s \cap$ eje Y: $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 5 \Rightarrow D(0, 5)$

- $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$; $\overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot h = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist\,(A, s) =$$

$$= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2}$$

81 **Un punto P, que é equidistante dos puntos $A(3, 4)$ e $B(-5, 6)$, dista o dobre do eixe de abscisas ca do eixe de ordenadas. Cales son as coordenadas de P?**

- $d\,(P, OX) = 2d\,(P, OY) \to |y| = 2|x| \to \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

- $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \to \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(-5 - x)^2 + (6 - y)^2} \to$

  $\to x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \to$

  $\to -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \to 16x - 4y + 36 = 0 \to$

  $\to 4x - y + 9 = 0$

• Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$$P_1: \begin{cases} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x - 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{2} \rightarrow y = -9$$

Luego: $P_1\left(\frac{-9}{2}, -9\right)$

$$P_2: \begin{cases} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x + 2x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \rightarrow y = 3$$

Luego: $P_2\left(\frac{-3}{2}, 3\right)$

82 **De todas as rectas que pasan polo punto $A(1, 2)$, indica a pendente daquela cuxa distancia á orixe é 1.**

☛ ***A ecuación $y = 2 + m(x - 1)$ representa a todas esas rectas. Pásaa a forma xeral e aplica a condición $d(O, r) = 1$.***

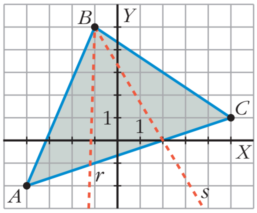
• Esas rectas tienen por ecuación:

$$y = 2 + m(x - 1) \rightarrow mx - y + (2 - m) = 0$$

• $d(0, r) = 1 \rightarrow \dfrac{|2 - m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - m = \sqrt{m^2 + 1} \\ 2 - m = -\sqrt{m^2 + 1} \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow (2 - m)^2 = m^2 + 1 \rightarrow 4 + m^2 - 4m = m^2 + 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 - 4m = 1 \rightarrow m = \frac{3}{4}$$

83 **Dado o triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ e $C(5, 1)$, indica as ecuacións das rectas r e s que parten de B e cortan a AC, dividindo o triángulo en tres triángulos de igual área.**



• La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de B al lado AC. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, P y Q, que dividen el lado AC en tres partes iguales:

$$\vec{OP} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \quad \vec{OQ} = \frac{\vec{OC} + 2\vec{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

• La recta r es la que pasa por B y por P:

$$m = \frac{-1 - 5}{(-2/3) - (-1)} = \frac{-6}{(1/3)} = -18$$

$$y = 5 - 18(x + 1) \rightarrow r: 18x + y + 13 = 0$$

- La recta s es la que pasa por B y por Q:

$$m = \frac{5-0}{(-1)-(8/3)} = \frac{-5}{(-11/3)} = -\frac{15}{11}$$

$$y = 5 - \frac{15}{11}(x+1) \;\rightarrow\; 11y = 55 - 15x - 15 \;\rightarrow\; s\text{: } 15x + 11y - 40 = 0$$

84 **Dada a recta r: $2x - 3y + 5 = 0$, indica a ecuación da recta simétrica de r respecto ao eixe de abscisas.**

- Hallamos dos puntos de la recta dada. Por ejemplo: $A(2, 3)$ y $B(5, 5)$.
- Los dos puntos simétricos respecto al eje OX de A y B son $A'(2, -3)$ y $B'(5, -5)$.
- La recta, r', simétrica de r respecto al eje OX será la que pasa por A' y B':

$$m = \frac{-5-(-3)}{5-2} = \frac{-5+3}{3} = \frac{-2}{3}$$

La recta r' es: $y = -3 - \frac{2}{3}(x-2) \;\rightarrow\; 3y = -9 - 2x + 4 \;\rightarrow\; 2x + 3y + 5 = 0$

- De otra forma:

Si (x, y) es un punto de la recta r, entonces $(x, -y)$ es un simétrico respecto al eje OX. Por tanto, la ecuación de la recta r', simétrica de r respecto al eje OX, será:

$$2x - 3(-y) + 5 = 0 \;\rightarrow\; 2x + 3y + 5 = 0$$

Páxina 211

CUESTIÓNS TEÓRICAS

85 **Proba que se as rectas $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ son perpendiculares, se verifica que $aa' + bb' = 0$.**

- El vector (a, b) es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.
- El vector (a', b') es perpendicular a la recta $a'x + b'y + c' = 0$.
- Si las dos rectas son perpendiculares, entonces:

$(a, b) \cdot (a', b') = 0$; es decir, $aa' + bb' = 0$.

86 **Dada a recta $ax + by + c = 0$, proba que o vector $\vec{v} = (a, b)$ é ortogonal a calquera vector determinado por dous puntos da recta.**

☛ ***Chámalles $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ e fai $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB}$. Ten en conta que os puntos A e B verifican a ecuación da recta.***

- Si $A(x_1, y_1)$ pertenece a la recta, entonces $ax_1 + by_1 + c = 0$
- Si $B(x_2, y_2)$ pertenece a la recta, entonces $ax_2 + by_2 + c = 0$
- Restando las dos igualdades: $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0$

Esta última igualdad significa que:

$(a, b) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 0$; es decir, que el vector (a, b) es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$, siendo A y B dos puntos cualesquiera de la recta.

87 **a) Que se pode dicir dunha recta se na súa ecuación xeral falta o termo independente?**

b) E se falta o termo en x?

c) E se falta o termo en y?

a) La recta pasa por $(0, 0)$.

b) Es una recta horizontal (paralela al eje OX).

c) Es una recta vertical (paralela al eje OY).

88 **Proba que a ecuación da recta que pasa por dous puntos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ pode escribirse da forma: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.**

Un vector dirección de la recta es $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y un punto de la recta es $P(x_1, y_1)$.

Entonces, las ecuaciones paramétricas de la recta serán:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t \;\rightarrow\; t = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \\[2ex] y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t \;\rightarrow\; t = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \;\rightarrow\; \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

o, lo que es lo mismo:

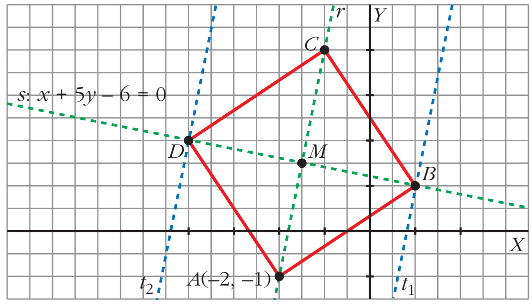
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

PARA AFONDAR

89 **Un cadrado ten unha diagonal sobre a recta $x + 5y - 6 = 0$ e un dos seus vértices é $A(-2, -1)$. Indica os outros vértices e a lonxitude da diagonal.**

- Se comprueba que $A \notin s$.
- Luego la otra diagonal en la que está A será r tal que $r \perp s$:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - y + G = 0 \\ \text{Como } A \in r \end{array}\right\} \rightarrow -10 + 1 + G = 0 \;\rightarrow\; G = 9 \;\rightarrow\; r\!: 5x - y + 9 = 0$$



• $M = r \cap s$ será el punto medio de las dos diagonales:

$$\left.\begin{cases} 5x - \ \ y + 9 = 0 \\ \ \ x + 5y - 6 = 0 \ \rightarrow \ x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow \ 5(6 - 5y) - y + 9 = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 30 - 25y - y + 9 = 0 \ \rightarrow \ y = \frac{39}{26} = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ x = 6 - 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

Luego: $M\left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

• M es el punto medio de AC $\rightarrow \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{-2 + C_1}{2}, \frac{-1 + C_2}{2}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} -3 = -2 + C_1 \ \rightarrow \ C_1 = -1 \\ \ \ 3 = -1 + C_2 \ \rightarrow \ C_2 = 4 \end{cases}\right\} \rightarrow \ C(-1, 4)$$

• B y D están en las rectas que equidistan de AC.

Dichas rectas son todos los puntos $P(x, y)$ tales que:

$$dist\,(P, r) = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

pues, al ser un cuadrado, sus diagonales son iguales. Es decir:

$$dist\,(P, r) = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{|(1, 5)|}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \frac{|5x - y + 9|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \ \rightarrow \begin{cases} 5x - y + 9 = 26/2 \\ 5x - y + 9 = -26/2 \end{cases} \rightarrow \ \begin{cases} t_1\colon 5x - y - \ \ 4 = 0 \\ t_2\colon 5x - y + 22 = 0 \end{cases}$$

Así:

$$B = t_1 \cap s\colon \left.\begin{cases} 5x - \ \ y - 4 = 0 \\ \ \ x + 5y - 6 = 0 \ \rightarrow \ x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 30 - 25y - y - 4 = 0 \ \rightarrow \ y = 1 \ \rightarrow \ x = 1 \ \Rightarrow \ B(1, 1)$$

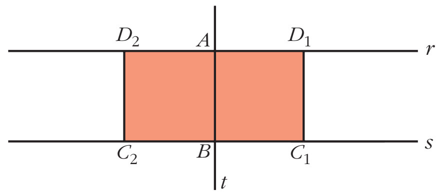
$$D = t_2 \cap s\colon \left.\begin{cases} 5x - \ \ y + 22 = 0 \\ \ \ x + 5y - \ \ 6 = 0 \ \rightarrow \ x = 6 - 5y \end{cases}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 30 - 25y - y + 22 = 0 \ \rightarrow \ y = 2 \ \rightarrow \ x = -4 \ \Rightarrow \ D(-4, 2)$$

• La longitud de la diagonal será:

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{26}$$

90 **Dun cadrado coñecemos dous vértices contiguos $A(3, 1)$ e $B(4, 5)$. Calcula os outros vértices. Cantas solucións hai?**



C y D son puntos de las rectas s y r perpendiculares a AB, y cuyas distancias a B y A, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s\end{array}\right\} \to 4 + 20 + k = 0 \to k = -24 \to$

  $\to s: x + 4y - 24 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to r: x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \to 3 + 4 + k' = 0 \to k' = -7 \to$

  $\to r: x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to t: 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \to 12 - 1 + k'' = 0 \to k'' = -11 \to$

  $\to t: 4x - y - 11 = 0$

- C y D son puntos que están en las rectas cuya distancia a AB es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

  Sean $P(x, y)$ tales que:

$$dist\,(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l}4x - y - 11 = 17 \to \\ 4x - y - 11 = -17 \to\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0\end{array}\right.$$

Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

$C_1 = t_1 \cap s \left\{\begin{array}{l}4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \to x = 24 - 4y\end{array}\right. \to$

$\to 96 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 4 \to x = 8 \to C_1(8, 4)$

$C_2 = t_2 \cap s \left\{\begin{array}{l}4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \to x = 24 - 4y\end{array}\right. \to$

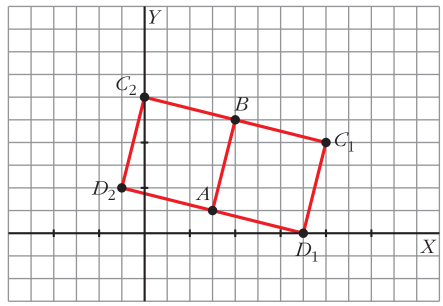
$\to 96 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 6 \to x = 0 \to C_2(0, 6)$

$D_1 = t_1 \cap r \left\{\begin{array}{l}4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \to x = 7 - 4y\end{array}\right. \to$

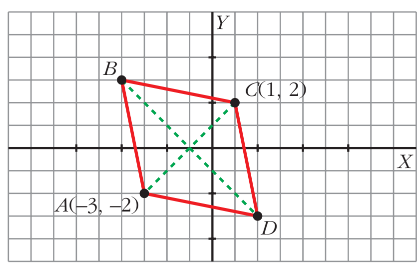
$\to 28 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 0 \to x = 7 \to D_1(7, 0)$

$$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \;\rightarrow\; x = 7 - 4y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; 28 - 16y - y + 6 = 0 \;\rightarrow\; y = 2 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; D_2(-1, 2)$$



91 **A diagonal menor dun rombo mide o mesmo ca o seu lado e ten por extremos os puntos $A(-3, -2)$ e $C(1, 2)$. Indica os vértices B e D e o perímetro do rombo.**



- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \;\rightarrow\; |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

$$\textit{Perímetro} = 4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$$

- Los otros dos vértices están en la perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ por su punto medio $M(-1, 0)$.

  La recta AC tiene por vector director $(1, 1) \rightarrow x - y + k = 0$
  Como, además, $A(-3, -2) \in$ recta AC $\Big\} \rightarrow$

$$\rightarrow\; -3 + 2 + k = 0 \;\rightarrow\; k = 1 \;\rightarrow\; AC\colon x - y + 1 = 0$$

  La recta s perpendicular a AC será:

$$\left.\begin{array}{l} s\colon x + y + k' = 0 \\ \text{Como } M(-1, 0) \in s \end{array}\right\} \rightarrow\; -1 + k' = 0 \;\rightarrow\; k' = 1 \;\rightarrow\; s\colon x + y + 1 = 0$$

  Los puntos B y D serán los (x, y) que estén en s y cuya distancia al vértice A sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

$$(x, y) \in s \;\rightarrow\; x + y + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1 - y$$

$\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2} = 4\sqrt{2} \rightarrow (x+3)^2+(y+2)^2 = 32$

$\rightarrow (2-y)^2+(y+2)^2 = 32 \rightarrow 4+y^2-4y+y^2+4+4y = 32 \rightarrow 2y^2 = 24 \rightarrow$

$\rightarrow y^2 = 12 \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2\sqrt{3} \rightarrow x_1 = -1-2\sqrt{3} \\ y_2 = -2\sqrt{3} \rightarrow x_2 = -1+2\sqrt{3} \end{cases}$

Luego, los vértices B y D son:

$$(-1-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) \text{ y } (-1+2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$$

92 **Determina a ecuación dunha recta de pendente –2 que forma cos eixes un triángulo de área igual a 81. Cantas solucións hai?**

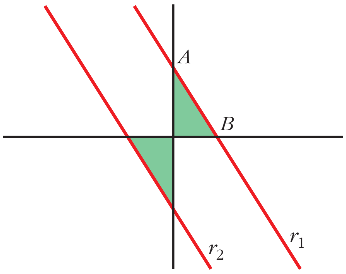
- Las rectas de pendiente –2 tienen por ecuación:

$$y = -2x + k$$

- Los puntos de corte con los ejes, A y B, son:

Si $x = 0 \rightarrow y = k \rightarrow A(0, k)$

Si $y = 0 \rightarrow x = \dfrac{k}{2} \rightarrow B\left(\dfrac{k}{2}, 0\right)$



- Así:

Área $= \dfrac{k/2 \cdot k}{2} = 81 \rightarrow k^2 = 324 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 18 \\ k_2 = -18 \end{cases}$

Dos soluciones:

$$r_1: y = -2x + 18 \quad \text{y} \quad r_2: y = -2x - 18$$

93 **Coñecemos dous vértices dun trapecio rectángulo $A(1, 1)$ e $B(5, 1)$ e sabemos que un dos lados está sobre a recta $y = x + 1$. Calcula os outros dous vértices. (Hai dúas solucións).**

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre r, los otros dos vértices están en r y, por tanto, A y B son vértices consecutivos.

Además, un vector dirección de r es $\vec{r} = (1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \rightarrow$ los lados AB y CD no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

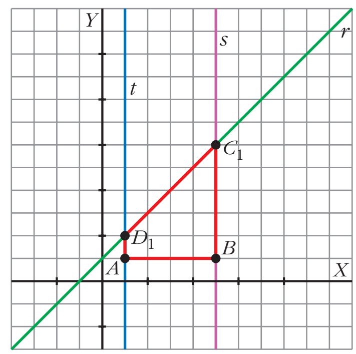
Podemos construir dos trapecios:

a) ABC_1D_1, donde AB es la altura del trapecio:

C_1 y D_1 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a AB que pasan por B y A, respectivamente.

- $\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \ \rightarrow \ 4x + k = 0 \\ \text{Como } \ A(1, 1) \in t \end{array}\right\} \rightarrow 4 + k = 0 \ \rightarrow \ k = -4 \ \rightarrow \ t\text{: } 4x - 4 = 0 \ \rightarrow \ t\text{: } x = 1$

  Así: $D_1 = t \cap r \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = x + 1 \end{array}\right. \ \rightarrow \ y = 2 \ \rightarrow \ D_1(1, 2)$



- $\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \ \rightarrow \ 4x + k = 0 \\ \text{Como } \ B(5, 1) \in s \end{array}\right\} \rightarrow$

  $\rightarrow 4 \cdot 5 + k = 0 \ \rightarrow \ k = -20 \ \rightarrow$

  $\rightarrow \ s\text{: } 4x - 20 = 0 \ \rightarrow \ s\text{: } x = 5$

  Así: $C_1 = s \cap r\text{: } \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = x + 1 \end{array}\right. \ \rightarrow$

  $\rightarrow \ y = 6 \ \rightarrow \ C_1(5, 6)$

b) ABC_2D_2, donde C_2D_2 es la altura del trapecio:

C_2 y D_2 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a r que pasan por B y C, respectivamente (es decir, C_2 y D_2 son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \ \rightarrow \ y = -x + k \\ \text{Como } \ A \in t \end{array}\right\} \rightarrow \ 1 = -1 + k \ \rightarrow \ k = 2 \ \rightarrow \ t\text{: } y = -x + 2$

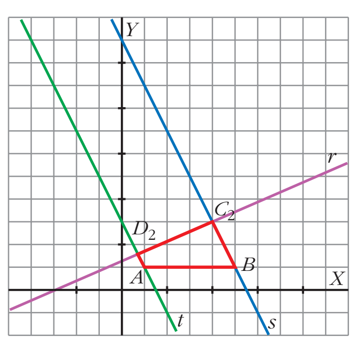
  Así: $D_2 = t \cap r\text{: } \left\{\begin{array}{l} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{array}\right. \ \rightarrow \ -x + 2 = x + 1 \ \rightarrow \ 1 = 2x \ \rightarrow$

  $$\rightarrow \ x = \frac{1}{2} \ \rightarrow \ y = \frac{3}{2} \ \rightarrow \ D_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \ \rightarrow \ y = -x + k \\ \text{Como } \ B \in s \end{array}\right\} \rightarrow \ 1 = -5 + k \ \rightarrow \ k = 6 \ \rightarrow \ s\text{: } y = -x + 6$

  Así: $C_2 = s \cap r\text{: } \left\{\begin{array}{l} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{array}\right. \ \rightarrow \ -x + 6 = x + 1 \ \rightarrow \ 5 = 2x \ \rightarrow$

  $$\rightarrow \ x = \frac{5}{2} \ \rightarrow \ y = \frac{7}{2} \ \rightarrow \ C_2\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$$



Páxina 211

AUTOAVALIACIÓN

1. Considéranse os puntos $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ e $C(-4, k)$.

a) Calcula as coordenadas dun punto P que divida o segmento AB en dúas partes tales que $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{PB}$.

b) Determina k para que o punto C sexa o simétrico de B respecto de A.

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sea $P(x, y)$:

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{PB} \rightarrow (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \rightarrow \left.\begin{cases} 3x = 4 - x \rightarrow x = 1 \\ 3y - 3 = 9 - y \rightarrow y = 3 \end{cases}\right\} P(1, 3)$$

b) A debe ser el punto medio de CB.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \rightarrow 9 + k = 2 \rightarrow k = -7$$

2. Calcula a ecuación destas rectas:

a) Pasa por $A(3, 2)$ e $B(-2, 1)$, en forma paramétrica e implícita.

b) Pasa pola orixe de coordenadas e ten pendente $m = \frac{-1}{3}$, en forma continua e mais explícita.

a) Vector dirección $\vec{d} = \vec{BA} = (5, 1)$. Vector de posición: $\vec{p}(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2;\ \ x = 3 + 5(y-2) = 3 + 5y - 10 \rightarrow x - 5y + 7 = 0$

Ecuación implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \rightarrow$ vector dirección: $\vec{d}(3, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \rightarrow y = -\frac{x}{3}$

Ecuación explícita: $y = -\frac{x}{3}$

3. **Indica as ecuacións das seguintes rectas:**

a) Pasa por $P(2, -3)$ e é perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

b) É paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ e a ordenada na orixe é 2.

a) Una recta perpendicular a la dada tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$. Como ha de pasar por $P(2, -3)$, su ecuación es:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \rightarrow 2y + 6 = 5x - 10 \rightarrow 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ es $2x + 3y + k = 0$.

Como ha de pasar por (0, 2), debe ser $k = -6$.

La recta buscada es $2x + 3y - 6 = 0$.

4. **Escribe a ecuación do feixe de rectas que pasa por (5, 1) e indica a recta dese feixe que pasa por (0, 1).**

El haz de rectas que pasa por el punto (5, 1) es $a(x - 5) + b(y - 1) = 0$

La recta del haz que pasa por (0, 1) es la recta que pasa por (5, 1) y por (0, 1). Por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x}{5} = \frac{y - 1}{0} \rightarrow y = 1$$

5. **Estuda a posición relativa das rectas r e s e das rectas r e t, onde:**

$$r: 3x + 5y - 34 = 0 \qquad s: y = \frac{5}{3}x \qquad t: \begin{cases} x = k \\ y = 2 \end{cases}$$

• Posición relativa de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5, 3) \\ \text{Vector dirección de } s,\ \vec{d}_s(3, 5) \end{array}\right\} \ r \text{ y } s \text{ son perpendiculares.}$$

• Posición relativa de r y t:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Vector dirección de } t,\ \vec{d}_t(1, 0) \\ \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5, 3) \end{array}\right\} \ r \text{ y } t \text{ son secantes.}$$

6. **Calcula k para que as rectas r e s formen un ángulo de 60°, onde $r: y = 3$; $s: y = kx + 1$.**

La recta $r: y = 3$ es paralela al eje de abscisas. Así, la tangente del ángulo que forman r y s coincide con la pendiente de s, que es igual a k. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = k \\ tg\ 60° = \sqrt{3} \end{array}\right\} \ k = \sqrt{3}$$

7. Considera os puntos $A(0, k)$ e $B(8, 5)$ e a recta $r: 3x + 4y + 1 = 0$. Determina o valor de k para que:

a) A distancia entre A e B sexa igual a 10.

b) A distancia entre A e r sexa 1.

a) $dist(A, B) = \sqrt{8^2 + (5 - k)^2} = \sqrt{64 + 25 + k^2 - 10k} = 10 \rightarrow$

$\rightarrow k^2 - 10k - 11 = 0 \; \begin{cases} k = 11 \\ k = -1 \end{cases}$

b) $dist(A, r) = \dfrac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot k + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|4k + 1|}{5} = 1 \; \begin{cases} 4k + 1 = 5 \rightarrow k = 1 \\ 4k + 1 = -5 \rightarrow k = -3/2 \end{cases}$