4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Páxina 103

REFLEXIONA E RESOLVE

Problema 1

Para calcular a altura dunha árbore, podemos seguir o procedemento que utilizou Tales de Mileto para calcular a altura dunha pirámide de Exipto: comparar a súa sombra coa dunha vara vertical cuxa lonxitude é coñecida.

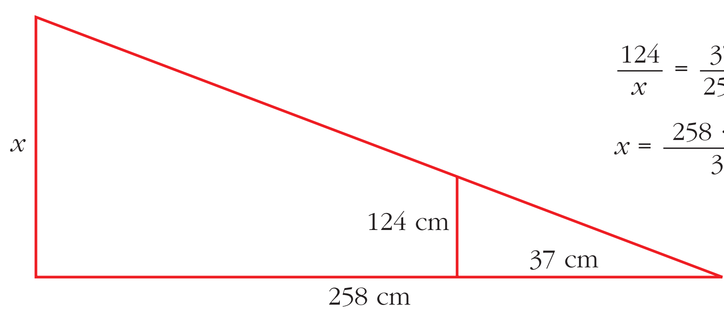
- **Faino ti seguindo este método e sabendo que:**

  — a vara mide 124 cm,

  — a sombra da vara mide 37 cm,

  — a sombra da árbore mide 258 cm.

  Para solucionar este problema utilizarías a semellanza de dous triángulos.



$$\frac{124}{x} = \frac{37}{258}$$

$$x = \frac{258 \cdot 124}{37} = 864{,}65 \text{ cm}$$

La altura del árbol es de 864,65 cm.

Problema 2

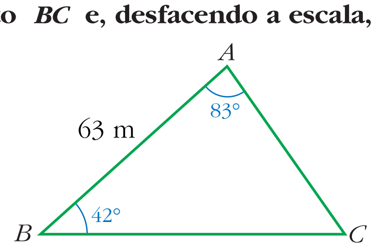
Bernardo coñece a distancia $\overline{AB}$ á que está da árbore e os ángulos $\widehat{CBA}$ e $\widehat{BAC}$, e quere calcular a distancia $\overline{BC}$ á que está de Carme.

Datos: **$\overline{AB} = 63$ m; $\widehat{CBA} = 42°$; $\widehat{BAC} = 83°$**

- **Para resolver o problema, primeiro *realiza un debuxo a escala* 1:1 000 (1 m → → 1 mm). Despois, mide a lonxitude do segmento BC e, desfacendo a escala, obterás a distancia á que Bernardo está de Carme.**

  $\overline{BC} = 42$ mm

  Deshaciendo la escala: $\overline{BC} = 42$ m



Problema 3

■ **Analogamente podes resolver estoutro:**

Bernardo ve desde a súa casa o castelo e a abadía. Coñece as distancias aos dous lugares, pois fixo o camino a pé moitas veces; e quere saber a distancia do castelo á abadía. Para iso debe, previamente, medir o ángulo $\widehat{CBA}$.

Datos: **$\overline{BC}$ = 1 200 m; $\overline{BA}$ = 700 m; $\widehat{CBA}$ = 108º.**

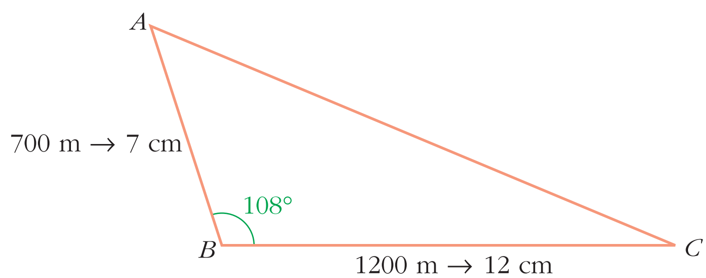
■ **Utiliza agora a escala 1:10 000 (100 m → 1 cm).**

100 m → 1 cm

1 200 m → 12 cm

700 m → 7 cm

$\overline{CA}$ = 14,7 cm ⇒ $\overline{CA}$ = 1 470 m

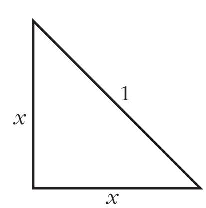


NOTA: El triángulo está construido al 50% de su tamaño.

Problema 4

■ **Calcula, aplicando o teorema de Pitágoras:**

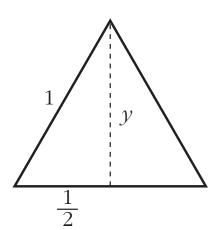
a) Os lados iguais dun triángulo rectángulo isóscele cuxa hipotenusa mide 1.



b) A altura dun triángulo equilátero de lado 1.

Fai todos os cálculos mantendo os radicais. Debes chegar ás seguintes solucións:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



a) $1^2 = x^2 + x^2 \;\rightarrow\; 1 = 2x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $1^2 = y^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \;\rightarrow\; y^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \;\rightarrow\; y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Páxina 104

1. Calcula *tg* α se sabes que *sen* α = 0,39. Faino, tamén, con calculadora.

$cos\ \alpha = \sqrt{1 - (sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - 0{,}39^2} = 0{,}92$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}42$

Con calculadora: SHIFT sin 0,39 = tan = 0.42353791018

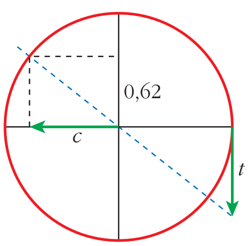
2. Calcula *cos* α se sabes que *tg* α = 1,28. Faino, tamén, con calculadora.

$\left.\begin{array}{l} s^2 + c^2 = 1 \\ s/c = 1{,}28 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema se obtiene $s = 0{,}79$ y $c = 0{,}62$.

Con calculadora: SHIFT tan 1,28 = cos = 0.61564404197

Páxina 105

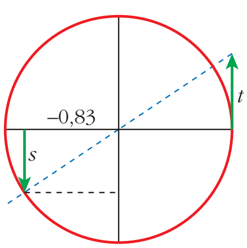
1. Sabendo que o ángulo α está no 2.º cuadrante (90° < α < 180°) e *sen* α = 0,62, calcula *cos* α e *tg* α.



$cos\ \alpha = -\sqrt{1 - 0{,}62^2} = -0{,}78$

$tg\ \alpha = \dfrac{0{,}62}{-0{,}78} = -0{,}79$

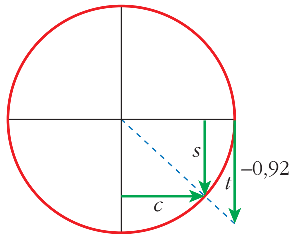
2. Sabendo que o ángulo α está no 3.º cuadrante (180° < α < 270°) e *cos* α = –0,83, calcula *sen* α e *tg* α.



$sen\ \alpha = -\sqrt{1 - (0{,}83)^2} = -0{,}56$

$tg\ \alpha = \dfrac{-0{,}56}{-0{,}83} = 0{,}67$

3. **Sabendo que o ángulo α está no 4.º cuadrante (270° < α < 360°) e *tg* α = –0,92, calcula *sen* α e *cos* α.**



$$\left.\begin{array}{l} s/c = -0{,}92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\}$$ El sistema tiene dos soluciones:

$s = -0{,}68$; $c = 0{,}74$

$s = 0{,}68$; $c = -0{,}74$

Teniendo en cuenta dónde está el ángulo, la solución es la primera: *sen* α = –0,68, *cos* α = 0,74

4. **Completa no caderno a seguinte táboa e amplíaa para os ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°.**

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			–				

Axúdate da representación dos ángulos nunha circunferencia goniométrica.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	–1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	–1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\sqrt{3}/3$	0

Páxina 106

1. **Indica as razóns trigonométricas do ángulo 2 397°:**

a) Obtendo a expresión do ángulo no intervalo [0°, 360°).

b) Obtendo a expresión do ángulo no intervalo (–180°, 180°].

c) Directamente coa calculadora.

a) 2 397° = 6 · 360° + 237°

sen 2 397° = *sen* 237° = –0,84

cos 2 397° = *cos* 237° = –0,54

tg 2 397° = *tg* 237° = 1,54

b) 2 397° = 7 · 360° – 123°

sen 2 397° = *sen* (–123°) = –0,84

cos 2 397° = *cos* (–123°) = –0,54

tg 2 397° = *tg* (–123°) = 1,54

2. **Pasa cada un dos seguintes ángulos ao intervalo [0°, 360°) e ao intervalo (–180°, 180°]:**

a) 396° **b) 492°** **c) 645°** **d) 3 895°** **e) 7 612°** **f) 1 980°**

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \le 180°$$

a) 396° = 396° – 360° = **36°**

b) 492° = 492° – 360° = **132°**

c) 645° = 645° – 360° = **285°** = 285° – 360° = **–75°**

d) 3 895° = 3 895° – 10 · 360° = **295°** = 295° – 360° = **–65°**

e) 7 612° = 7 612° – 21 · 360° = **52°**

f) 1 980° = 1 980° – 5 · 360° = **180°**

Cuando hacemos, por ejemplo, 7 612° = 7 612° – 21 · 360°, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división 7 612 ÷ 360 = 21.44... . Es el cociente entero.

Páxina 107

LINGUAXE MATEMÁTICA

1. **Di o valor das seguintes razóns trigonométricas sen preguntarllo á calculadora. Despois, compróbao coa súa axuda:**

a) ***sen*(37 × 360° – 30°)** **b)** ***cos*(–5 × 360° + 120°)**

c) ***tg*(11 × 360° – 135°)** **d)** ***cos*(27 × 180° + 135°)**

a) $sen\,(37 \cdot 360° - 30°) = sen\,(-30°) = -sen\ 30° = -\dfrac{1}{2}$

b) $cos\,(-5 \cdot 360° + 120°) = cos\,(120°) = -\dfrac{1}{2}$

c) $tg\,(11 \cdot 360° - 135°) = tg\,(-135°) = -tg\ 135° = 1$

d) $cos\,(27 \cdot 180° + 135°) = cos\,(28 \cdot 180° - 180° + 135°) =$

$$= cos\,(14 \cdot 360° - 45°) = cos\,(-45°) = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. **Repite coa calculadora estes cálculos:**

SHIFT tan **1** EXP **10** = 89.99999999

SHIFT tan **1** EXP **20** = 90

Explica os resultados. Como é posible que diga que o ángulo cuxa tanxente vale 10^{20} é 90° se 90° non ten tanxente?

Es un ángulo que difiere de 90° una cantidad tan pequeña que, a pesar de las muchas cifras que la calculadora maneja, al redondearlo da 90°.

Páxina 109

1. **Calcula as razóns trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° e 325° a partir das razóns trigonométricas de 35°:**

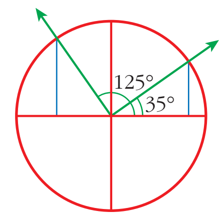
$$\boldsymbol{sen\ 35° = 0{,}57;\quad cos\ 35° = 0{,}82;\quad tg\ 35° = 0{,}70}$$

- $55° = 90° - 35° \Rightarrow$ 55° y 35° son complementarios.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 55° = cos\ 35° = 0{,}82 \\ cos\ 55° = sen\ 55° = 0{,}57 \end{array}\right\} \quad tg\ 55° = \frac{sen\ 55°}{cos\ 55°} = \frac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}43$$

$$\left(\text{También}\quad tg\ 55° = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0{,}70} \approx 1{,}43\right)$$

- $125° = 90° + 35°$

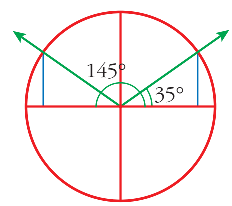


$sen\ 125° = cos\ 35° = 0{,}82$

$cos\ 125° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$$tg\ 125° = \frac{-1}{tg\ 35°} = \frac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$$

- $145° = 180° - 35° \Rightarrow$ 145° y 35° son suplementarios.

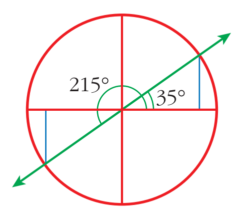


$sen\ 145° = sen\ 35° = 0{,}57$

$cos\ 145° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ 145° = -tg\ 35° = -0{,}70$

- $215° = 180° + 35°$

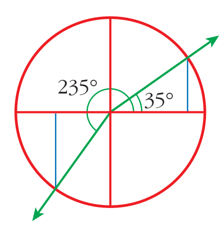


$sen\ 215° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$cos\ 215° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$tg\ 215° = tg\ 35° = 0{,}70$

- $235° = 270° - 35°$



$sen\ 235° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$cos\ 235° = -sen\ 35° = -0{,}57$

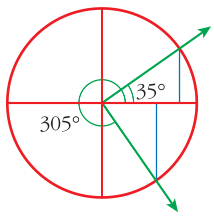
$$tg\ 235° = \frac{sen\ 235°}{cos\ 235°} = \frac{-cos\ 35°}{-sen\ 35°} = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0{,}70} = 1{,}43$$

• $305° = 270° + 35°$

$sen\ 305° = -cos\ 35° = -0{,}82$

$cos\ 305° = sen\ 35° = 0{,}57$

$tg\ 305° = \dfrac{sen\ 305°}{cos\ 305°} = \dfrac{-cos\ 35°}{sen\ 35°} = -\dfrac{1}{tg\ 35°} = -1{,}43$

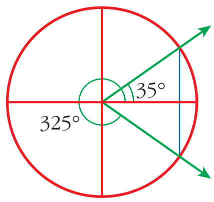


• $325° = 360° - 35°\ \ (= -35°)$

$sen\ 325° = -sen\ 35° = -0{,}57$

$cos\ 325° = cos\ 35° = 0{,}82$

$tg\ 325° = \dfrac{sen\ 325°}{cos\ 325°} = \dfrac{-sen\ 35°}{cos\ 35°} = -tg\ 35° = -0{,}70$



2. **Determina as razóns trigonométricas de 358°, 156° e 342°, utilizando a calculadora só para calcular razóns trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° e 90°.**

• $358° = 360° - 2°$

$sen\ 358° = -sen\ 2° = -0{,}0349$

$cos\ 358° = cos\ 2° = 0{,}9994$

$tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0{,}03492$

$^{(*)}\ tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

• $156° = 180° - 24°$

$sen\ 156° = sen\ 24° = 0{,}4067$

$cos\ 156° = -cos\ 24° = -0{,}9135$

$-tg\ 24° = -0{,}4452$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

$156° = 90° + 66°$

$sen\ 156° = cos\ 66° = 0{,}4067$

$cos\ 156° = -sen\ 66° = -0{,}9135$

$tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2{,}2460} = -0{,}4452$

• $342° = 360° - 18°$

$sen\ 342° = -sen\ 18° = -0{,}3090$

$cos\ 342° = cos\ 18° = 0{,}9511$

$tg\ 342° = -tg\ 18° = -0{,}3249$

3. **Debuxa, sobre a circunferencia goniométrica, ángulos que cumpran as seguintes condicións e estima, en cada caso, o valor das restantes razóns trigonométricas:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = -\frac{1}{2},\ \ tg\ \alpha > 0}$ **b)** $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{3}{4},\ \ \alpha > 90°}$

c) $\boldsymbol{tg\ \beta = -1,\ \ cos\ \beta < 0}$ **d)** $\boldsymbol{tg\ \alpha = 2,\ \ cos\ \alpha < 0}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \to\ cos\ \alpha < 0\ \to\ \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 \\ cos\ \alpha \approx -0{,}86 \end{array}\right\} tg\ \alpha \approx 0{,}58$

b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \to\ \alpha \in 4.°$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha \approx -0{,}66 \\ cos\ \alpha = 3/4 \end{array}\right\} tg\ \alpha \approx -0{,}88$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \to\ sen\ \beta > 0\ \to\ \beta \in 2.°$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \beta \approx 0{,}7 \\ cos\ \beta \approx -0{,}7 \end{array}\right\} tg\ \beta = -1$

d) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \to\ sen\ \alpha < 0\ \to\ \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha \approx -0{,}9 \\ cos\ \alpha \approx -0{,}45 \end{array}\right\} tg\ \alpha = 2$

Páxina 111

1. **As seguintes propostas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos os casos, se designan por $\boldsymbol{ABC}$, e onde $\boldsymbol{C}$ é o ángulo recto.**

a) Datos: $\boldsymbol{c}$ = 32 cm, $\boldsymbol{\hat{B}}$ = 57°. Calcula $\boldsymbol{a}$.

b) Datos: $\boldsymbol{c}$ = 32 cm, $\boldsymbol{\hat{B}}$ = 57°. Calcula $\boldsymbol{b}$.

c) Datos: $\boldsymbol{a}$ = 250 m, $\boldsymbol{b}$ = 308 m. Calcula $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{\hat{A}}$.

d) Datos: $\boldsymbol{a}$ = 35 cm, $\boldsymbol{\hat{A}}$ = 32°. Calcula $\boldsymbol{b}$.

e) Datos: $\boldsymbol{a}$ = 35 cm, $\boldsymbol{\hat{A}}$ = 32°. Calcula $\boldsymbol{c}$.

a) $cos\ \hat{B} = \frac{a}{c}\ \to\ a = c\ cos\ \hat{B} = 17{,}43$ cm

b) $sen\ \hat{B} = \frac{b}{c}\ \to\ b = c\ sen\ \hat{B} = 26{,}84$ cm

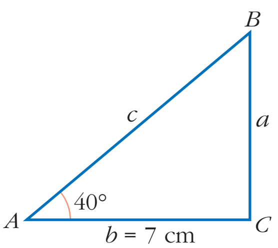
c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396{,}69$ m

$tg\ \hat{A} = \dfrac{a}{b} = 0{,}81 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 39°\ 3'\ 57''$

d) $tg\ \hat{A} = \dfrac{a}{b} \quad \rightarrow \quad b = \dfrac{a}{tg\ \hat{A}} = 56{,}01$ cm

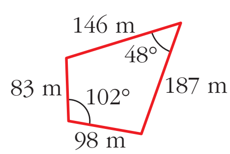
e) $sen\ \hat{A} = \dfrac{a}{c} \quad \rightarrow \quad c = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = 66{,}05$ cm

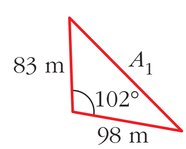
2. **Para determinar a altura dun poste afastámonos 7 m da súa base e despois medimos o ángulo que forma a visual ao punto máis alto coa horizontal, co que obtemos un valor de 40°. Canto mide o poste?**



$tg\ 40° = \dfrac{a}{7} \quad \rightarrow \quad a = 7\ tg\ 40° = 5{,}87$ m

3. **Calcula a área deste cuadrilátero. Suxestión: Párteo en dous triángulos.**

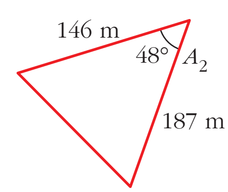




$A_1 = \dfrac{1}{2} 98 \cdot 83\ sen\ 102° = 3\,978{,}13\ m^2$

$A_2 = \dfrac{1}{2} 187 \cdot 146\ sen\ 48° = 10\,144{,}67\ m^2$

El área es la suma de A_1 y A_2: $14\,122{,}80\ m^2$



Páxina 113

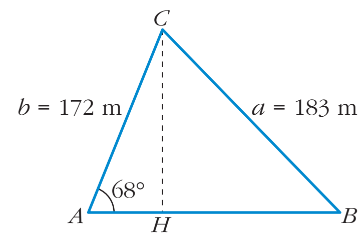
1. **Nun triángulo *ABC* coñecemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m e $a = 183$ m. Calcula a lonxitude do lado *c*.**

$\overline{AH} = 172 \cos 68° = 64{,}43$ m

$\overline{CH} = 172 \operatorname{sen} 68° = 159{,}48$ m

$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89{,}75$ m

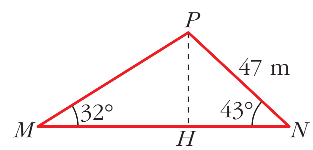
$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64{,}43 \text{ m} + 89{,}75 \text{ m} = 154{,}18$ m



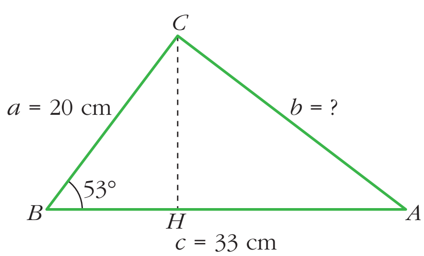
2. **Nun triángulo *MNP* coñecemos $\hat{M} = 32°$, $\hat{N} = 43°$ e $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.**

$\operatorname{sen} 43° = \dfrac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \operatorname{sen} 43° = 32{,}05$ m

$\operatorname{sen} 32° = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \dfrac{\overline{PH}}{\operatorname{sen} 32°} = \dfrac{32{,}05}{\operatorname{sen} 32°} = 60{,}49$ m



3. **Nun triángulo *ABC* coñecemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm e $\hat{B} = 53°$. Calcula a lonxitude do lado *b*.**



$\overline{BH} = a \cos 53° = 12{,}04$ cm

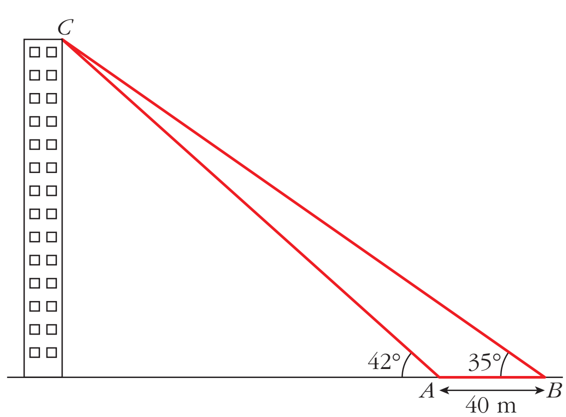
$\overline{CH} = a \operatorname{sen} 53° = 15{,}97$ cm

$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20{,}96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26{,}35$ cm

4. **Estamos en *A*, medimos o ángulo baixo o que se ve o edificio (42°), despois afastámonos 40 m e volvemos medir o ángulo (35°). Cal coidas que é a altura do edificio e a que distancia nos atopamos del?**

Observa a ilustración:



$$\left.\begin{array}{l} tg\ 42° = \dfrac{h}{d} \quad \to \quad h = d\ tg\ 42° \\ tg\ 35° = \dfrac{h}{d + 40} \quad \to \quad h = (d + 40)tg\ 35° \end{array}\right\} \to$$

$$\to \quad d\ tg\ 42° = (d + 40)\ tg\ 35° \quad \to \quad d = \frac{40\ tg\ 35°}{tg\ 42° - tg\ 35°} = 139{,}90 \text{ m}$$

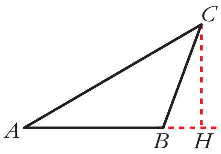
$h = d\ tg\ 42° = 125{,}97$ m

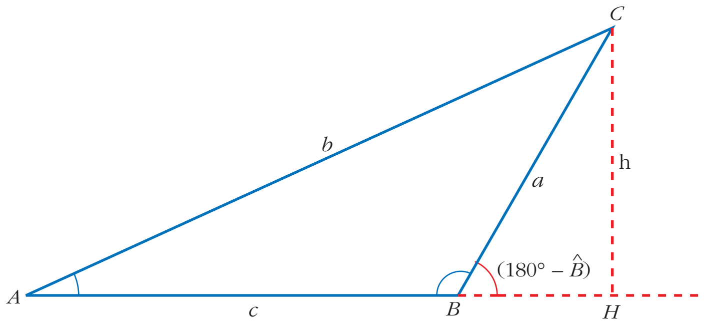
La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

Páxina 114

1. Repite a demostración anterior no caso de que $\hat{B}$ sexa obtuso. Ten en conta que:

***sen* (180° – $\hat{B}$) = *sen* $\hat{B}$**





$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b} \quad \to \quad h = b\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{B} = sen\,(180 - \hat{B}) = \frac{h}{a} \quad \to \quad h = a\ sen\ \hat{B}$$

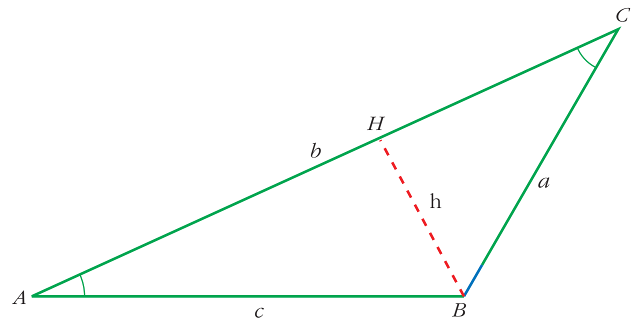
$$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \quad \to \quad \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$$

2. Demostra detalladamente, baseándote na demostración anterior, a seguinte relación:

$$\boldsymbol{\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice *B*. Así, los triángulos obtenidos *AHB* y *CHB* son rectángulos.



Por tanto, tenemos: $sen\ \hat{A} = \dfrac{\text{h}}{c} \rightarrow \text{h} = c\ sen\ \hat{A}$

$$sen\ \hat{C} = \frac{\text{h}}{a} \rightarrow \text{h} = a\ sen\ \hat{C}$$

$$c\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{C}$$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

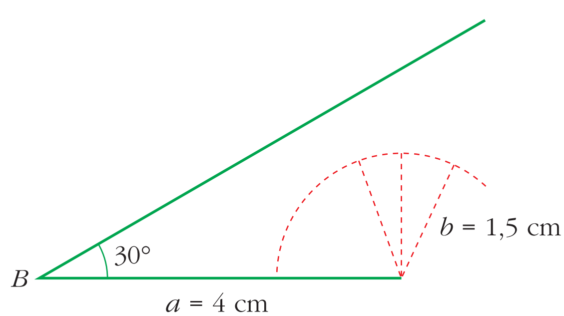
Páxina 115

3. **Resolve o mesmo problema anterior (a = 4 cm, $\hat{B}$ = 30°) tomando para b os seguintes valores: b = 1,5 cm, b = 2 cm, b = 3 cm, b = 4 cm.**

Xustifica graficamente por que se obteñen, segundo os casos, ningunha solución, unha solución ou dúas solucións.

- b = 1,5 cm

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{1,5}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,\hat{3}$$

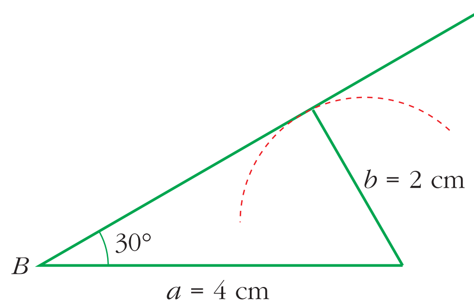


¡Imposible, pues $sen\ \hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

No tiene solución. Con esta medida, b = 1,5 cm, el lado b nunca podría tocar al lado c.

- $b = 2$ cm

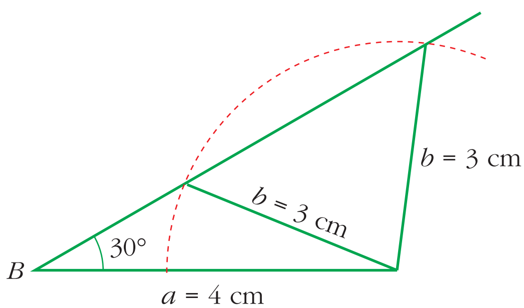
$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{2}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{2} = 1 \rightarrow A = 90°$$



Se obtiene una única solución.

- $b = 3$ cm

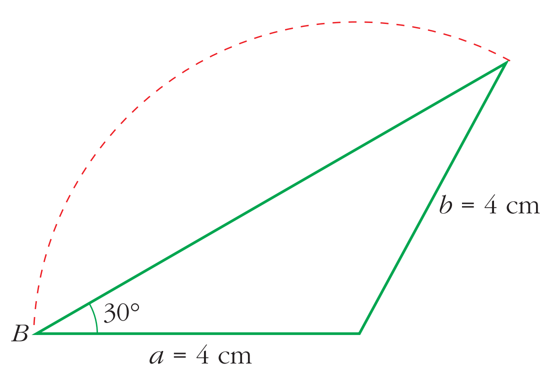
$$\frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{3}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{3} = 0{,}\widehat{6} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37{,}1'' \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22{,}9'' \end{cases}$$



Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.

- $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{4} = 0{,}5 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \rightarrow \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_2 = 150° \end{cases}$$



La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!

Páxina 117

4. **Resolve os seguintes triángulos:**

a) $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

b) $b = 22$ **cm;** $a = 7$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

c) $a = 8$ **m;** $b = 6$ **m;** $c = 5$ **m**

d) $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\hat{A} = 105°$

e) $a = 4$ **m;** $\hat{B} = 45°$ **y** $\hat{C} = 60°$

f) $b = 5$ **m;** $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

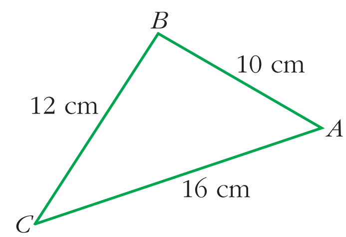
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$

$A = 48°\ 30'\ 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$

$B = 92°\ 51'\ 57{,}5''$

• $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \quad \to \quad \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° =$

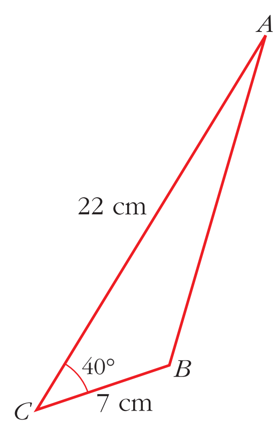
$= 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \to \quad \dfrac{7}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{17{,}24}{\text{sen } 40°}$

$\text{sen } \hat{A} = \dfrac{7 \text{ sen } 40°}{17{,}24} = 0{,}26$

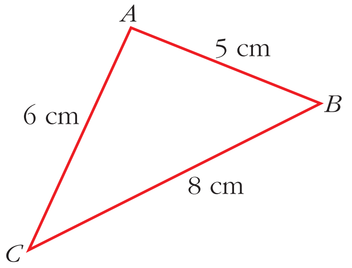
$A = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44{,}3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15{,}7'' \quad \to \quad \text{No válida} \end{cases}$



(La solución A_2 no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$



$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{36 + 25 - 64}{60} = -0{,}05$

$\hat{A} = 92° \; 51' \; 57{,}5''$

• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cos \hat{B}$

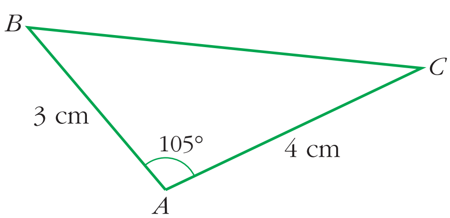
$\cos \hat{B} = \dfrac{64 + 25 - 36}{80} = 0{,}6625$

$\hat{B} = 48° \; 30' \; 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 38° \; 37' \; 29{,}5''$

(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).

d) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} =$



$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{5{,}59}{\text{sen } 105°} = \dfrac{4}{\text{sen } \hat{B}}$

$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 105°}{5{,}59} = 0{,}6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43° \; 43' \; 25{,}3'' \\ \hat{B}_2 = 136° \; 16' \; 34{,}7'' \quad \to \quad \text{No válida} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31° \; 16' \; 34{,}7''$

e) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}}$

$\dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{b}{\text{sen } 45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 75°} = 2{,}93$ m

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad \to \quad \dfrac{4}{\text{sen } 75°} = \dfrac{c}{\text{sen } 60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 75°} = 3{,}59$ m

f) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow \dfrac{5}{sen\ 110°} = \dfrac{a}{sen\ 35°}$

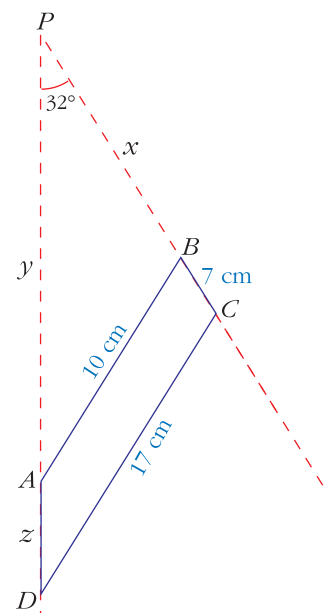
$a = \dfrac{5 \cdot sen\ 35°}{sen\ 110°} = 3{,}05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3{,}05$ m

5. **As bases dun trapecio miden 17 cm e 10 cm, e un dos seus lados, 7 cm. O ángulo que forman as rectas sobre as que se encontran os lados non paralelos é de 32°. Calcula o que mide o outro lado e a área do trapecio.**

• Los triángulos APB y DPC son semejantes, luego:

$\dfrac{x}{10} = \dfrac{x+7}{17} \rightarrow 17x = 10(x+7) \rightarrow x = 10$



Aplicando el teorema del coseno en el triángulo APB tenemos:

$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ 32°$

$10^2 = 10^2 + y^2 - 2 \cdot 10y \cdot cos\ 32°$

$0 = y^2 - 16{,}96y$

$\begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válido} \\ y = 16{,}96 \text{ cm} \end{cases}$

De nuevo, por semejanza de triángulos, tenemos:

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DP}} \rightarrow \dfrac{10}{16{,}96} = \dfrac{17}{z + 16{,}96} \rightarrow 10(z + 16{,}96) = 17 \cdot 16{,}96$

$10z = 118{,}72 \rightarrow z = 11{,}872$ cm mide el otro lado, $\overline{AD}$, del trapecio.

• Como PDC es un triángulo isósceles donde $\overline{DC} = \overline{CP} = 17$ cm, entonces:

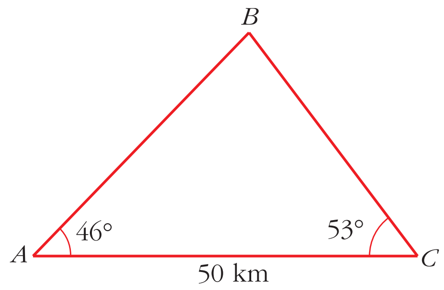
$\hat{D} = 32° \rightarrow sen\ 32° = \dfrac{\text{h}}{z} \Rightarrow \text{h} = z \cdot sen\ 32° = 11{,}872 \cdot sen\ 32° \approx 6{,}291$

Así:

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{B+b}{2} \cdot \text{h} = \frac{17+10}{2} \cdot 6{,}291 = 84{,}93 \text{ cm}^2$$

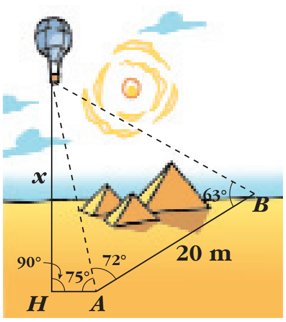
6. **Un barco B pide socorro e recíbense os seus sinais en dúas estacións de radio, A e C, que distan entre si 50 km. Desde as estacións mídense os seguintes ángulos: $\widehat{BAC} = 46°$ e $\widehat{BCA} = 53°$. A que distancia de cada estación consideras que se encontra o barco?**

$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$

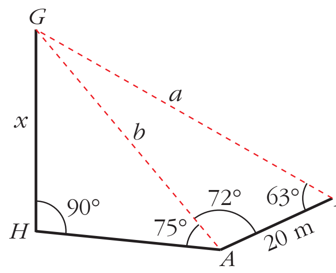


- $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\ sen\ \hat{A}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 46°}{sen\ 81°} = 36{,}4$ km
- $\dfrac{c}{sen\ \hat{C}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow c = \dfrac{b\ sen\ \hat{C}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 53°}{sen\ 81°} = 40{,}4$ km

7.



Para calcular a altura dun globo, realizamos as medicións indicadas na figura. Canto dista o globo do punto A? Canto do punto B? A que altura está o globo?



$\widehat{AGB} = 180° - 72° - 63° = 45°$

- $\dfrac{b}{sen\ 63°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow b = \dfrac{20 \cdot sen\ 63°}{sen\ 45°} = 25{,}2$ m dista el globo del punto A.
- $\dfrac{a}{sen\ 72°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\ 72°}{sen\ 45°} = 26{,}9$ m dista el globo del punto B.
- $sen\ 75° = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \rightarrow x = 25{,}2 \cdot sen\ 75° = 24{,}3$ m es la altura del globo.

Páxina 122

EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

Relación entre razóns trigonométricas

1 **Calcula as demais razóns trigonométricas do ángulo α $(0° < \alpha < 90°)$ utilizando as relacións fundamentais:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ **b)** $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ **c)** $\boldsymbol{tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

d) $\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{3}{8}}$ **e)** $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0{,}72}$ **f)** $\boldsymbol{tg\ \alpha = 3}$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{1}{2}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

b) $sen^2\ \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$

c) $\frac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + tg^2\ \alpha \ \rightarrow\ \frac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \ \rightarrow\ \frac{1}{cos^2\ \alpha} = \frac{7}{4} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ cos^2\ \alpha = \frac{4}{7} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$sen^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

d) $cos^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = \frac{55}{64} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$tg\ \alpha = \frac{3/8}{\sqrt{55}/8} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$

e) $sen^2\ \alpha = 1 - (0{,}72)^2 \ \rightarrow\ sen^2\ \alpha = 0{,}4816 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}69$

$tg\ \alpha = \frac{0{,}69}{0{,}72} = 0{,}96$

f) $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + 3^2 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = \dfrac{1}{10} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$sen^2\ \alpha = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

2 **Sabendo que o ángulo α é obtuso, completa a seguinte táboa:**

sen α	**0,92**				**0,5**	
cos α			**–0,12**	**–0,8**		
tg α		**–0,75**				**–4**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
sen α	0,92	0,6	0,99	0,6	0,5	0,96
cos α	–0,39	–0,8	–0,12	–0,8	–0,87	–0,24
tg α	–2,36	–0,75	–8,25	–0,75	–0,57	–4

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ 0{,}92^2 + cos^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}92^2$

$cos^2\ \alpha = 0{,}1536 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = -0{,}39$

$\uparrow$

α obtuso $\rightarrow$ $cos\ \alpha < 0$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -2{,}36$

(Se podrían calcular directamente con la calculadora $\alpha = sen^{-1}\ 0{,}92$, teniendo en cuenta que el ángulo está en el segundo cuadrante).

b) $\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + tg^2\ \alpha \ \rightarrow\ \dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + 0{,}5625 \ \rightarrow\ cos^2\ \alpha = 0{,}64 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = -0{,}8$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \ \rightarrow\ sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = (-0{,}75) \cdot (-0{,}8) = 0{,}6$

c) $sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}0144 = 0{,}9856 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}99$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{0{,}99}{-0{,}12} = -8{,}25$

d) $sen^2\ \alpha = 1 - cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = 0{,}6$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{0{,}6}{-0{,}8} = 0{,}75$

(NOTA: es el mismo ángulo que el del apartado b)).

e) $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \ \rightarrow\ cos\ \alpha = -0{,}87$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \dfrac{0{,}5}{-0{,}87} = -0{,}57$

f) $\dfrac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + tg^2\,\alpha = 1 + 16 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = 0{,}059 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}24$

$sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot cos\,\alpha = (-4)\cdot(-0{,}24) = 0{,}96$

3 **Indica as restantes razóns trigonométricas de α:**

a) $\boldsymbol{sen\,\alpha = -4/5}$ $\quad\boldsymbol{\alpha < 270°}$

b) $\boldsymbol{cos\,\alpha = 2/3}$ $\quad\boldsymbol{tg\,\alpha < 0}$

c) $\boldsymbol{tg\,\alpha = -3}$ $\quad\boldsymbol{\alpha < 180°}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\,\alpha < 0 \\ cos\,\alpha < 0 \\ tg\,\alpha > 0 \end{array}\right.$

- $cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -\dfrac{3}{5}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{-4/5}{-3/5} = \dfrac{4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} cos\,\alpha > 0 \\ tg\,\alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\,\alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 4.°$ cuadrante

- $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \;\rightarrow\; sen\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha < 0 \\ \alpha < 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 2.°$ cuadrante $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\,\alpha > 0 \\ cos\,\alpha < 0 \end{array}\right.$

- $\dfrac{1}{cos^2\,\alpha} = tg^2\,\alpha + 1 = 9 + 1 = 10 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = \dfrac{1}{10} \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \;\rightarrow\; sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot cos\,\alpha = (-3)\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

4 **Expresa cun ángulo do primeiro cuadrante:**

a) ***sen*** **150°**	**b)** ***cos*** **135°**	**c)** ***tg*** **210°**
d) ***cos*** **225°**	**e)** ***sen*** **315°**	**f)** ***tg*** **120°**
g) ***tg*** **340°**	**h)** ***cos*** **200°**	**i)** ***sen*** **290°**

a) $150° = 180° - 30° \;\rightarrow\; sen\,150° = sen\,30°$

b) $135° = 180° - 45° \;\rightarrow\; cos\,135° = -cos\,45°$

c) $210° = 180° + 30° \;\rightarrow\; tg\,210° = \dfrac{sen\,210°}{cos\,210°} = \dfrac{-sen\,30°}{-cos\,30°} = tg\,30°$

d) $255° = 270° - 15° \;\rightarrow\; cos\,255° = -sen\,15°$

e) $315° = 360° - 45° \quad \to \quad sen\ 315° = -sen\ 45°$

f) $120° = 180° - 60° \quad \to \quad tg\ 120° = \dfrac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \dfrac{sen\ 60°}{-cos\ 60°} = -tg\ 60°$

$\left(\text{También } 120° = 90° + 30° \quad \to \quad tg\ 120° = \dfrac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \dfrac{-cos\ 30°}{sen\ 30°} = -\dfrac{1}{tg\ 30°}\right)$

g) $340° = 360° - 20° \quad \to \quad tg\ 340° = \dfrac{sen\ 340°}{cos\ 340°} = \dfrac{-sen\ 20°}{cos\ 20°} = -tg\ 20°$

h) $200° = 180° + 20° \quad \to \quad cos\ 200° = -cos\ 20°$

i) $290° = 270° + 20° \quad \to \quad sen\ 290° = -cos\ 20°$

(También $290° = 360° - 70° \quad \to \quad sen\ 290° = -sen\ 70°$)

5 **Se $sen\ \alpha = 0{,}35$ e $\alpha < 90°$, determina:**

a) $sen\ (180° - \alpha)$ **b)** $sen\ (\alpha + 90°)$ **c)** $sen\ (180° + \alpha)$

d) $sen\ (360° - \alpha)$ **e)** $sen\ (90° - \alpha)$ **f)** $sen\ (360° + \alpha)$

a) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}35$

b) $\left.\begin{array}{l} sen\ (\alpha + 90°) = cos\ \alpha \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \quad \to \quad cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}35^2 = 0{,}8775 \quad \Rightarrow \quad cos\ \alpha \approx 0{,}94 \end{array}\right\} \to$

$\to \quad sen\ (\alpha + 90°) = cos\ \alpha = 0{,}94$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}35$

d) $sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}35$

e) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = 0{,}94$ (calculado en el apartado b)

f) $sen\ (360° + \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}35$

6 **Se $tg\ \alpha = 2/3$ e $0 < \alpha < 90°$, determina:**

a) $sen\ \alpha$ **b)** $cos\ \alpha$ **c)** $tg\ (90° - \alpha)$

d) $sen\ (180° - \alpha)$ **e)** $cos\ (180° + \alpha)$ **f)** $tg\ (360° - \alpha)$

a) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad \to \quad sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha$

$$\frac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 \quad \to \quad \frac{1}{cos^2\ \alpha} = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \quad \to$$

$$\to \quad cos\ \alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Calculado en el apartado anterior: $cos\ \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

c) $tg\ (90° - \alpha) = \frac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{3}{2}$

d) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

e) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = \frac{-3\sqrt{13}}{13}$

f) $tg\ (360° - \alpha) = \frac{sen\ (360° - \alpha)}{cos\ (360° - \alpha)} = \frac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -tg\ \alpha = -\frac{2}{3}$

7 **Calcula coa calculadora o ángulo α:**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = -0{,}75}$ $\quad$ $\boldsymbol{\alpha < 270°}$

b) $\boldsymbol{cos\ \alpha = -0{,}37}$ $\quad$ $\boldsymbol{\alpha > 180°}$

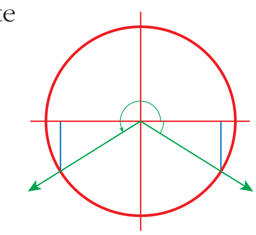
c) $\boldsymbol{tg\ \alpha = 1{,}38}$ $\quad$ $\boldsymbol{sen\ \alpha < 0}$

d) $\boldsymbol{cos\ \alpha = 0{,}23}$ $\quad$ $\boldsymbol{sen\ \alpha < 0}$

a) Con la calculadora $\rightarrow$ $\alpha = -48°\ 35'\ 25'' \in$ 4.° cuadrante

Como debe ser $\left.\begin{cases} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{cases}\right\} \rightarrow \alpha \in$ 3.er cuadrante

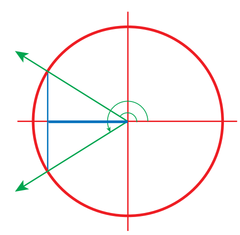
Luego $\alpha = 180° + 48°\ 35'\ 25'' = 228°\ 35'\ 25''$



b) Con la calculadora: $111°\ 42'\ 56{,}3''$

$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \in \text{3.er cuadrante} \\ \alpha = 360° - 111°\ 42'\ 56{,}3'' \end{array}\right\} \rightarrow$

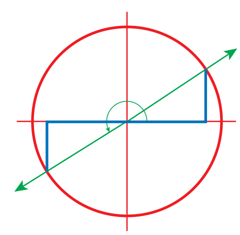
$\rightarrow \alpha = 248°\ 17'\ 3{,}7''$



c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 1{,}38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\} cos < 0 \rightarrow \alpha \in$ 3.er cuadrante

Con la calculadora: $tg^{-1}\ 1{,}38 = 54°\ 4'\ 17{,}39''$

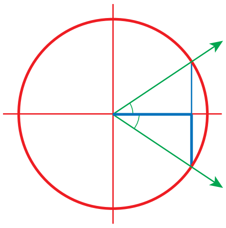
$\alpha = 180° + 54°\ 4'\ 17{,}39'' = 234°\ 4'\ 17{,}4''$



d) $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 0,23 > 0 \\ \text{sen}\,\alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 4.^{\circ}$ cuadrante

Con la calculadora: $\cos^{-1} 0,23 = 76° \; 42' \; 10,5''$

$\alpha = -76° \; 42' \; 10,5'' = 283° \; 17' \; 49,6''$



Resolución de triángulos rectángulos

8 **Resolve os seguintes triángulos rectángulos $(\hat{C} = 90°)$ calculando a medida de todos os elementos descoñecidos:**

a) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm. Halla c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43$ m, $\hat{A} = 37°$. Halla b, c, $\hat{B}$.

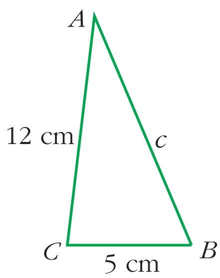
c) $a = 7$ m, $\hat{B} = 58°$. Halla b, c, $\hat{A}$.

d) $c = 5,8$ km, $\hat{A} = 71°$. Halla a, b, $\hat{B}$.

a) $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \rightarrow c = 13$ cm

$tg\,\hat{A} = \dfrac{5}{12} = 0,416 \rightarrow A = 22° \; 37' \; 11,5°$

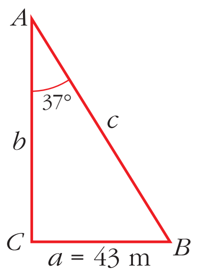
$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 67° \; 22' \; 48,5''$



b) $\hat{B} = 90° - 37° = 53°$

$\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{43}{c} \rightarrow c = \dfrac{43}{\text{sen}\,37°} = 71,45$ m

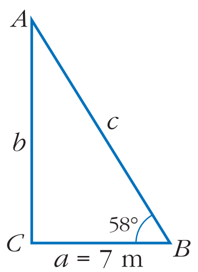
$tg\,\hat{A} = \dfrac{43}{b} \rightarrow b = \dfrac{43}{tg\,37°} = 57,06$ m



c) $\hat{A} = 90° - 58° = 32°$

$\cos\hat{B} = \dfrac{7}{c} \rightarrow c = \dfrac{7}{\cos 58°} = 13,2$ m

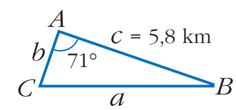
$tg\,\hat{B} = \dfrac{b}{7} \rightarrow b = 7 \cdot tg\,58° = 11,2$ m



d) $\hat{B} = 90° - 71° = 19°$

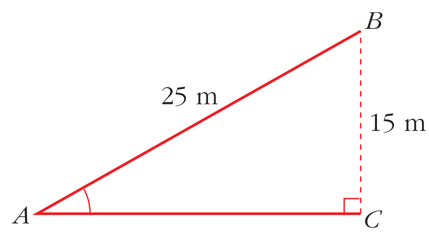
$$sen\ \hat{A} = \frac{a}{5,8} \rightarrow a = 5,8 \cdot sen\ 71° = 5,48 \text{ km}$$

$$cos\ \hat{A} = \frac{b}{5,8} \rightarrow b = 5,8 \cdot cos\ 71° = 1,89 \text{ km}$$

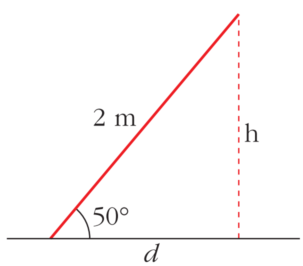


9 **Se queremos que unha cinta transportadora de 25 metros eleve a carga ata unha altura de 15 metros, que ángulo se deberá inclinar a cinta?**

$$sen\ \hat{A} = \frac{15}{25} = 0,6 \rightarrow \hat{A} = 36°\ 52'\ 11,6''$$



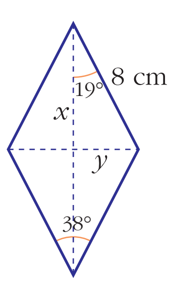
10 **Unha escada de 2 m está apoiada nunha parede formando un ángulo de 50° co chan. Calcula a altura á que chega e a distancia que separa a súa base da parede.**



$$sen\ 50° = \frac{h}{2} \rightarrow h = 1,53 \text{ m}$$

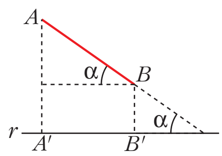
$$cos\ 50° = \frac{d}{2} \rightarrow d = 1,29 \text{ m}$$

11 **O lado dun rombo mide 8 cm e o ángulo menor deste é de 38°. Canto miden as diagonais do rombo?**



$$sen\ 19° = \frac{y}{8} \rightarrow y = 8 \cdot sen\ 19° = 2,6 \text{ cm} \rightarrow d = 5,2 \text{ cm}$$

$$cos\ 38° = \frac{x}{8} \rightarrow x = 8 \cdot cos\ 19° = 7,6 \text{ cm} \rightarrow D = 15,2 \text{ cm}$$

12 

Calcula a proxección do segmento $\overline{AB}$ = 15 cm sobre a recta *r* nos seguintes casos:

a) $\alpha = 72°$ **b)** $\alpha = 50°$

c) $\alpha = 15°$ **d)** $\alpha = 90°$

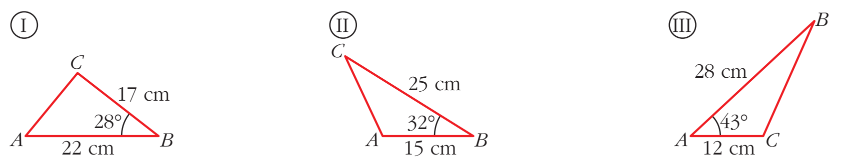
a) $cos\ \alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{A'B'} = 15\ cos\ 72° = 4{,}64$ cm

b) $\overline{A'B'} = 15\ cos\ 5° = 9{,}64$ cm

c) $\overline{A'B'} = 15\ cos\ 15° = 14{,}49$ cm

d) $\overline{A'B'} = 15\ cos\ 90° = 0$ cm

13 **a) Calcula a altura correspondente ao lado *AB* en cada un dos seguintes triángulos:**



b) Calcula a área de cada triángulo.

a) I) $sen\ 28° = \dfrac{h}{17} \rightarrow h = 7{,}98$ cm

II) $sen\ 32° = \dfrac{h}{25} \rightarrow h = 13{,}25$ cm

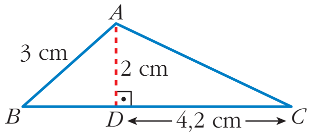
III) $sen\ 43° = \dfrac{h}{12} \rightarrow h = 8{,}18$ cm

b) I) $A = \dfrac{22 \cdot 7{,}98}{2} = 87{,}78\ cm^2$

II) $A = \dfrac{15 \cdot 13{,}25}{2}\ 99{,}38\ cm^2$

III) $A = \dfrac{28 \cdot 8{,}18}{2} = 114{,}52\ cm^2$

14 **No triángulo *ABC*, *AD* é a altura relativa ao lado *BC*. Cos datos da figura, indica os ángulos do triángulo *ABC*.**



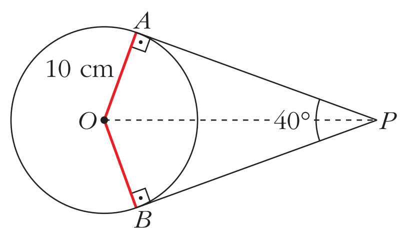
En $\widehat{ABD}$: $sen\ \hat{B} = \dfrac{2}{3} \rightarrow \hat{B} = 41°\ 48'\ 37''$; $\widehat{BAD} = 90° - \hat{B} = 48°\ 11'\ 23''$

En $\widehat{ADC}$: $tg\ \hat{C} = \dfrac{2}{4{,}2} \rightarrow \hat{C} = 25°\ 27'\ 48''$; $\widehat{DAC} = 64°\ 32'\ 12''$

Ángulos: $\hat{A} = 112°\ 43'\ 35''$; $\hat{B} = 41°\ 48'\ 37''$; $\hat{C} = 25°\ 27'\ 48''$

15 **Desde un punto P exterior a unha circunferencia de 10 cm de raio, trázanse as tanxentes a esa circunferencia que forman estre si un ángulo de 40°.**

Calcula a distancia de P a cada un dos puntos de tanxencia.



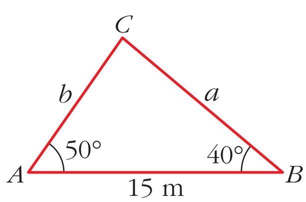
En $\widehat{OAP}$: $tg\ 20° = \dfrac{10}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = 27{,}47$ cm

Distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia: 27,47 cm

Páxina 123

Teorema dos senos

16 **Calcula a e b no triángulo ABC no que: $\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 40°$, $c = 15$ m.**

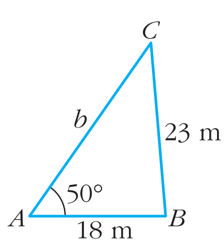


$\hat{C} = 180° - (55° + 40°) = 85°$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{sen\ 55°} = \frac{15}{sen\ 85°} \rightarrow a = 12{,}33 \text{ m}$$

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 40°} = \frac{15}{sen\ 85°} \rightarrow b = 9{,}68 \text{ m}$$

17 **Calcula o ángulo $\hat{C}$ e o lado b no triángulo ABC no que: $\hat{A} = 50°$, $a = 23$ m, $c = 18$ m.**



$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{23}{sen\ 50°} = \frac{18}{sen\ \hat{C}} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\ \hat{C} = \frac{18 \cdot sen\ 50°}{23} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{C} = 36°\ 50'\ 6'' \text{ (Tiene que ser } \hat{C} < \hat{A})$$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 93°\ 9'\ 54''$

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot sen\ 93°\ 9'\ 54''}{sen\ 50°} \rightarrow b = 29{,}98 \text{ m}$$

18 **Resolve os seguintes triángulos:**

a) $\hat{A} = 35°$ $\hat{C} = 42°$ $b = 17$ **m**

b) $\hat{B} = 105°$ $b = 30$ **m** $a = 18$ **m**

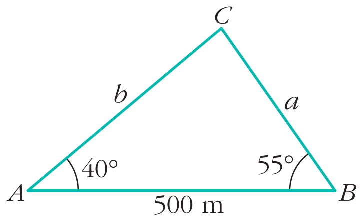
a) $\hat{B} = 180° - (35° + 42°) = 103°$; $\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{a}{sen\,\hat{A}} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\,35°}{sen\,103°} = 10$ m

$\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\,\hat{C}} \rightarrow c = \dfrac{17 \cdot sen\,42°}{sen\,103°} \rightarrow c = 11{,}67$ m

b) $\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{a}{sen\,\hat{A}} \rightarrow sen\,\hat{A} = \dfrac{18 \cdot sen\,105°}{30} \rightarrow \hat{A} = 35°\,25'\,9''$; $\hat{C} = 39°\,34'\,51''$

$\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\,\hat{C}} \rightarrow c = \dfrac{30 \cdot sen\,39°\,34'\,51''}{sen\,105°} \rightarrow c = 19{,}79$ m

19 **Dous amigos situados en dous puntos, *A* e *B*, que distan 500 m, ven a torre dunha igrexa, *C*, baixo os ángulos $\widehat{BAC} = 40°$ e $\widehat{ABC} = 55°$. Que distancia hai entre cada un deles e a igrexa?**



$\hat{C} = 180° - (40° + 55°) = 85°$

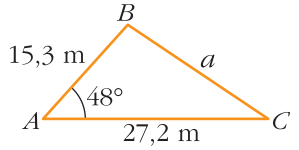
$\dfrac{a}{sen\,40°} = \dfrac{500}{sen\,85°} \rightarrow a = 322{,}62$ m

$\dfrac{b}{sen\,55°} = \dfrac{500}{sen\,85°} \rightarrow b = 411{,}14$ m

La distancia de *A* a la iglesia es de 411,14 m, y la de *B* a la iglesia, 322,62 m.

Teorema do coseno

20 **Calcula *a* no triángulo *ABC*, no que: $\hat{A} = 48°$, $b = 27{,}2$ m, $c = 15{,}3$ m.**

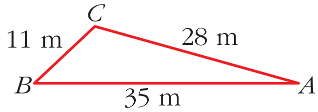


$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,\hat{A}$

$a^2 = 27{,}2^2 + 15{,}3^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3\,cos\,48° \rightarrow$

$\rightarrow a = 20{,}42$ m

21 **Determina os ángulos do triángulo *ABC* no que $a = 11$ m, $b = 28$ m, $c = 35$ m.**



$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35\,cos\,\hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow cos\,\hat{A} = \dfrac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \rightarrow \hat{A} = 15°\,34'\,41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35\,cos\,\hat{B} \rightarrow cos\,\hat{B} = \dfrac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \rightarrow \hat{B} = 43°\,7'\,28''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 121°\,17'\,51''$

22 **Resolve os seguintes triángulos:**

a) $\boldsymbol{b = 32}$ **cm** $\quad \boldsymbol{a = 17}$ **cm** $\quad \boldsymbol{\widehat{C} = 40°}$

b) $\boldsymbol{a = 85}$ **cm** $\quad \boldsymbol{c = 57}$ **cm** $\quad \boldsymbol{\widehat{B} = 65°}$

c) $\boldsymbol{a = 23}$ **cm** $\quad \boldsymbol{b = 14}$ **cm** $\quad \boldsymbol{c = 34}$ **cm**

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40° \;\rightarrow\; c = 21{,}9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21{,}9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21{,}9 \cos \widehat{A} \;\rightarrow\; \widehat{A} = 29°\ 56'\ 8''$

$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) \;\rightarrow\; \widehat{B} = 110°\ 3'\ 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65° \;\rightarrow\; b = 79{,}87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79{,}87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79{,}87 \cos \widehat{C} \;\rightarrow\; \widehat{C} = 40°\ 18'\ 5''$

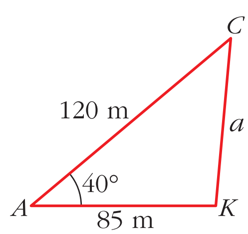
$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) \;\rightarrow\; \widehat{A} = 74°\ 41'\ 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \widehat{A} \;\rightarrow\; \widehat{A} = 30°\ 10'\ 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \widehat{B} \;\rightarrow\; \widehat{B} = 17°\ 48'\ 56''$

$\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) \;\rightarrow\; \widehat{C} = 133°\ 0'\ 35''$

23 **Desde a porta da miña casa, *A*, vexo o cine, *C*, que está a 120 m, e o quiosco, *K*, que está a 85 m, baixo un ángulo $\boldsymbol{\widehat{CAK} = 40°}$. Que distancia hai entre o cine e o quiosco?**



$a^2 = 120^2 + 85^2 - 2 \cdot 120 \cdot 85 \cos 40°$

$a = 77{,}44$ m es la distancia entre el cine y el kiosko.

Resolución de triángulos calquera

24 **Resolve os seguintes triángulos:**

a) $\boldsymbol{a = 100}$ **m** $\quad \boldsymbol{\widehat{B} = 47°}$ $\quad \boldsymbol{\widehat{C} = 63°}$

b) $\boldsymbol{b = 17}$ **m** $\quad \boldsymbol{\widehat{A} = 70°}$ $\quad \boldsymbol{\widehat{C} = 35°}$

c) $\boldsymbol{a = 70}$ **m** $\quad \boldsymbol{b = 55}$ **m** $\quad \boldsymbol{\widehat{C} = 73°}$

d) $\boldsymbol{a = 122}$ **m** $\quad \boldsymbol{c = 200}$ **m** $\quad \boldsymbol{\widehat{B} = 120°}$

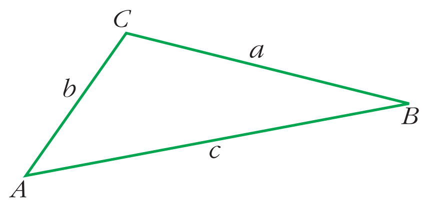
e) $\boldsymbol{a = 25}$ **m** $\quad \boldsymbol{b = 30}$ **m** $\quad \boldsymbol{c = 40}$ **m**

f) $\boldsymbol{a = 100}$ **m** $\quad \boldsymbol{b = 185}$ **m** $\quad \boldsymbol{c = 150}$ **m**

g) $\boldsymbol{a = 15}$ **m** $\quad \boldsymbol{b = 9}$ **m** $\quad \boldsymbol{\widehat{A} = 130°}$

h) $\boldsymbol{b = 6}$ **m** $\quad \boldsymbol{c = 8}$ **m** $\quad \boldsymbol{\widehat{C} = 57°}$

a) • $\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 70°$



• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{b}{sen\ 47°} \rightarrow$

$\rightarrow b = \dfrac{100 \cdot sen\ 47°}{sen\ 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{c}{sen\ 63°} \rightarrow c = \dfrac{100 \cdot sen\ 63°}{sen\ 70°} = 94{,}82$ m

b) • $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 75°$

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{a}{sen\ 70°} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\ 70°}{sen\ 75°} = 16{,}54$ m

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{c}{sen\ 35°} \rightarrow c = \dfrac{17 \cdot sen\ 35°}{sen\ 75°} = 10{,}09$ m

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot cos\ 73° = 5\,673{,}74 \rightarrow c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot cos\ \widehat{A} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \rightarrow \widehat{A} = 62°\ 43'\ 49{,}4''$

• $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cdot cos\ 120° = 79\,284 \rightarrow b = 281{,}6$ m

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \widehat{A} \rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{281{,}6^2 + 200^2 - 122^2}{2 \cdot 281{,}6 \cdot 200} = 0{,}92698 \rightarrow \widehat{A} = 22°\ 1'\ 54{,}45''$

• $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 37°\ 58'\ 55{,}5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \widehat{A} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \rightarrow \widehat{A} = 38°\ 37'\ 29{,}4''$

• $cos\ \widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \rightarrow \widehat{B} = 48°\ 30'\ 33''$

• $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

f) • $cos\ \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0{,}84189 \rightarrow \widehat{A} = 32°\ 39'\ 34{,}4''$

• $cos\ \widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0{,}0575 \rightarrow \widehat{B} = 93°\ 17'\ 46{,}7''$

• $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 54°\ 2'\ 38{,}9''$

g) • $\dfrac{15}{sen\ 130°} = \dfrac{9}{sen\ \hat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\ 130°}{15} = 0,4596 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46,8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13,2'' \end{cases}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13,2''$

• $\dfrac{15}{sen\ 130°} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow c = \dfrac{15 \cdot sen\ \hat{C}}{sen\ 130°} = 7,54$ m

h) • $\dfrac{8}{sen\ 57°} = \dfrac{6}{sen\ \hat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{6 \cdot sen\ 57°}{8} = 0,6290 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 38°\ 58'\ 35,7'' \\ \hat{B}_2 = 141°\ 1'\ 24,3'' \end{cases}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 84°\ 1'\ 24,3''$

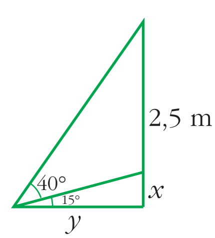
• $\dfrac{8}{sen\ 57°} = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow a = \dfrac{8 \cdot sen\ \hat{A}}{sen\ 57°} = 9,5$ m

PARA RESOLVER

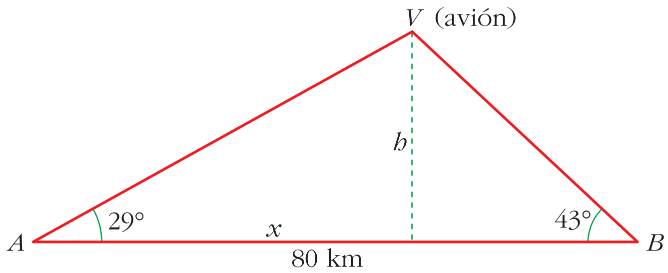
25 **Unha estatua de 2,5 m de alto está colocada sobre un pedestal. Desde un punto do chan vese o pedestal baixo un ángulo de 15° e a estatua, baixo un ángulo de 40°. Calcula a altura do pedestal.**

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 15° = \dfrac{x}{y} \rightarrow y = \dfrac{x}{tg\ 15°} \\[2ex] tg\ 55° = \dfrac{2,5 + x}{y} \rightarrow y = \dfrac{2,5 + x}{tg\ 55°} \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x}{tg\ 15°} = \dfrac{2,5 + x}{tg\ 55°} \rightarrow$$

$\rightarrow x\ tg\ 55° = 2,5\ tg\ 15° + x\ tg\ 15° \rightarrow x = \dfrac{2,5 \cdot tg\ 15°}{tg\ 55° - tg\ 15°} = 0,58$ m (el pedestal)



26 **Un avión voa entre dúas cidades, *A* e *B*, que distan 80 km. As visuais desde o avión a *A* e a *B* forman ángulos de 29° e 43° coa horizontal, respectivamente. A que altura está o avión?**



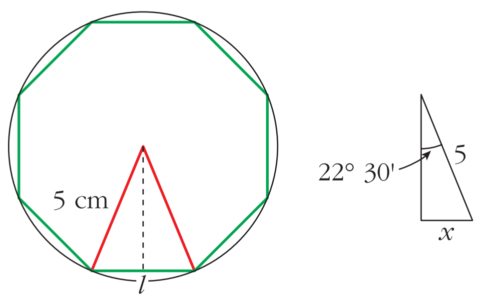
$$tg\ 29° = \frac{h}{x} \rightarrow x = \frac{h}{tg\ 29°}$$

$$tg\ 43° = \frac{h}{80 - x} \rightarrow x = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°}$$

$$\frac{h}{tg\ 29°} = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°} \rightarrow h\ tg\ 43° = 80\ tg\ 43°\ tg\ 29° - h\ tg\ 29° \rightarrow$$

$$\rightarrow h = \frac{80\ tg\ 43°\ tg\ 29°}{tg\ 43° + tg\ 29°} = 27{,}8 \text{ km}$$

27 **Determina o lado do octógono inscrito e do octógono circunscrito nunha circunferencia de raio 5 cm.**

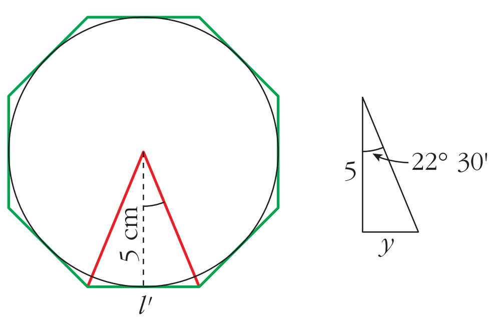


$$\frac{360°}{8} = 45°$$

$sen\ 22°\ 30' = \dfrac{x}{5} \rightarrow x = 1{,}91$ cm

Lado del octógono inscrito:

$l = 3{,}82$ cm

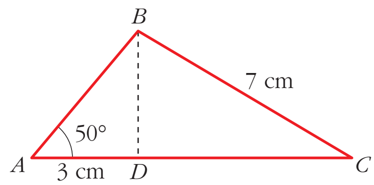


$tg\ 22°\ 30' = \dfrac{y}{5} \rightarrow y = 2{,}07$ cm

Lado del octógono circunscrito:

$l' = 4{,}14$ cm

28 **Calcula os lados e mais os ángulos do triángulo *ABC*.**



☛ ***No triángulo rectángulo ABD, indica $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$. En BDC, indica $\hat{C}$ e $\overline{DC}$. Para calcular $\hat{B}$, sabes que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.***

- En $\widehat{ABD}$:

$$\cos 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \quad \to \quad \overline{AB} = \frac{3}{\cos 50°} = 4{,}7 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \quad \to \quad \overline{BD} = 3 \operatorname{tg} 50° = 3{,}6 \text{ cm}$$

- En $\widehat{BDC}$:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{7} = \frac{3{,}6}{7} \approx 0{,}5143 \quad \to \quad \hat{C} = 30°\ 56'\ 59''$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{7} \quad \to \quad \overline{DC} = 7 \cdot \cos \hat{C} \approx 6 \text{ cm}$$

- Así, ya tenemos:

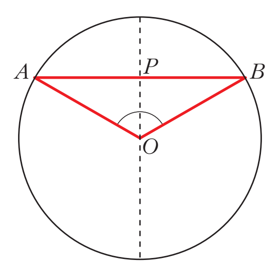
$\hat{A} = 50°$ $\qquad$ $a = 7$ cm

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 99°\ 3'\ 1''$ $\qquad$ $b = \overline{AD} + \overline{DC} = 9$ cm

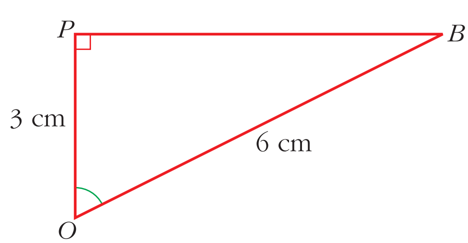
$\hat{C} = 30°\ 56'\ 59''$ $\qquad$ $c = 4{,}7$ cm

29 **Nunha circunferencia de raio 6 cm trazamos unha corda *AB* a 3 cm do centro.**

Indica o ángulo $\widehat{AOB}$.



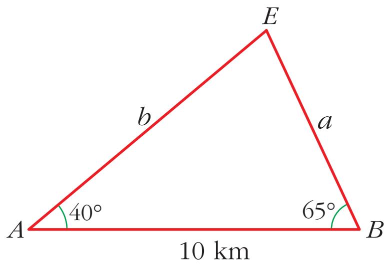
☛ ***O triángulo AOB é isóscele.***



$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP} = 3 \text{ cm} \\ \overline{OB} = 6 \text{ cm} \\ \widehat{OPB} = 90° \end{array}\right\} \to \cos \widehat{POB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \to \widehat{POB} = 60° \to$$

$$\to \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{POB} = 2 \cdot 60° = 120°$$

30 **Para localizar unha emisora clandestina, dous receptores, *A* e *B*, que distan entre eles 10 km, orientan as súas antenas cara ao punto onde está a emisora. Estas direccións forman con *AB* ángulos de 40° e 65°. A que distancia de *A* e *B* se encontra a emisora?**



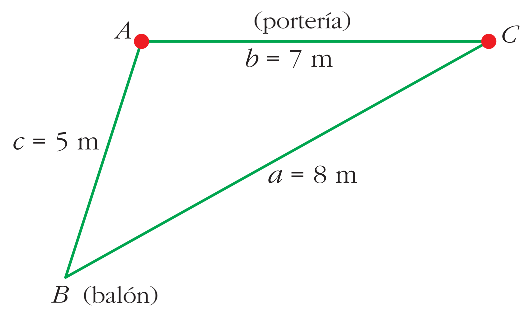
$\hat{E} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\ 40°} = \frac{10}{sen\ 75°} \rightarrow a = \frac{10 \cdot sen\ 40°}{sen\ 75°} = 6{,}65 \text{ km} \text{ dista de } B.$$

$$\frac{b}{sen\ 65°} = \frac{10}{sen\ 75°} \rightarrow b = \frac{10 \cdot sen\ 65°}{sen\ 75°} = 9{,}38 \text{ km} \text{ dista de } A.$$

31 **Nun adestramento de fútbol colócase o balón nun punto situado a 5 m e 8 m de cada un dos postes da portería, cuxo ancho é de 7 m. Baixo que ángulo calculas que se ve a portería desde ese punto?**



Aplicando el teorema del coseno:

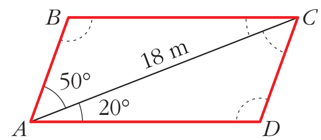
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\ \hat{B} \rightarrow$

$$\rightarrow cos\ \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0{,}5 \rightarrow B = 60°$$

Páxina 124

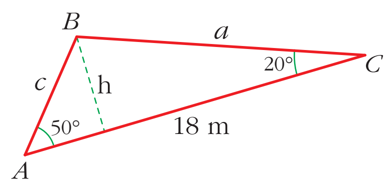
32 **Calcula a área e as lonxitudes dos lados e da outra diagonal:**

☛ ***$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$. Calcula os lados do triángulo ACD e a súa área. Para calcular a outra diagonal, considera o triángulo ABD.***



• Los dos triángulos en que la diagonal divide al paralelogramo son iguales.

Luego bastará resolver uno de ellos para calcular los lados:



$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

$\dfrac{a}{sen\ 50°} = \dfrac{18}{sen\ 110°} \rightarrow a = \dfrac{18 \cdot sen\ 50°}{sen\ 110°} = 14{,}7$ m

$\dfrac{c}{sen\ 20°} = \dfrac{18}{sen\ 110°} \rightarrow c = \dfrac{18 \cdot sen\ 20°}{sen\ 110°} = 6{,}6$ m

Así: $\overline{AB} = \overline{CD} = c = 6{,}6$ m

$\overline{BC} = \overline{AD} = a = 14{,}7$ m

Para calcular el área del triángulo ABC:

$$sen\ 50° = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot sen\ 50° \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Área}_{ABC} = \frac{18 \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot c \cdot sen\ 50°}{2} = \frac{18 \cdot 6{,}6 \cdot sen\ 50°}{2} = 45{,}5 \text{ m}^2$$

El área del paralelogramo será:

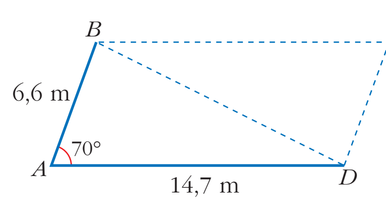
$$\text{Área}_{ABCD} = 2 \cdot \text{Área}_{ABC} = 2 \cdot 45{,}5 = 91 \text{ m}^2$$

• Para calcular la otra diagonal, consideremos el triángulo ABD:

Aplicando el teorema del coseno:

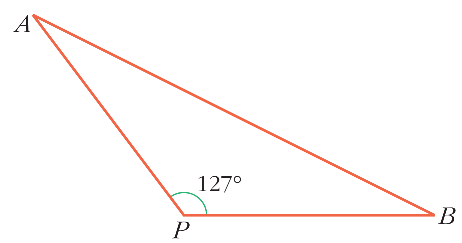
$$\overline{BD}^2 = 6{,}6^2 + 14{,}7^2 - 2 \cdot 6{,}6 \cdot 14{,}7 \cdot cos\ 70° \approx 193{,}28 \rightarrow \overline{BD} = 13{,}9 \text{ m}$$

$\hat{A} = 50° + 20° = 70°$



33 **Dous barcos parten dun porto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127°. O primeiro sae ás 10 h da mañá cunha velocidade de 17 nós, e o segundo sae ás 11 h 30 min, cunha velocidade de 26 nós. Se o alcance dos seus equipos de radio é de 150 km, poderán poñerse en contacto ás 3 da tarde?**

(Nó = milla / hora; milla = 1 850 m).



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

Barco A $\rightarrow$ $\overline{PA} = 17 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 5 h $= 157\,250$ m

Barco B $\rightarrow$ $\overline{PB} = 26 \cdot 1\,850$ m/h $\cdot$ 3,5 h $= 168\,350$ m

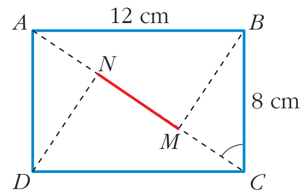
Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\rightarrow$ $\overline{AB} = 291\,432{,}7$ m).

34 **Nun rectángulo *ABCD* de lados 8 cm e 12 cm, trázase desde *B* unha perpendicular á diagonal *AC*, e desde *D*, outra perpendicular á mesma diagonal. Sexan *M* e *N* os puntos onde esas perpendiculares cortan á diagonal. Calcula a lonxitude do segmento *MN*.**



☛ ***No triángulo ABC, indica $\hat{C}$. No triángulo BMC, indica $\overline{MC}$. Ten en conta que:***

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\,\overline{MC}$$

Los triángulos *AND* y *BMC* son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$$

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo *ABC* y $\overline{MC}$ en el triángulo *BMC*.

• En $\widehat{ABC}$:

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \text{ (por el teorema de Pitágoras)} \rightarrow \overline{AC} = 14{,}4 \text{ cm}$$

Calculamos $\hat{C}$ (en $\widehat{ABC}$):

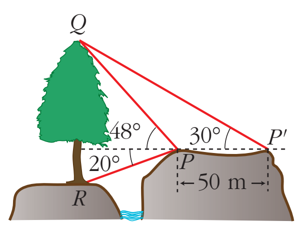
$$tg\ \hat{C} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \rightarrow \hat{C} = 56°\ 18'\ 35{,}8''$$

• En $\widehat{BMC}$:

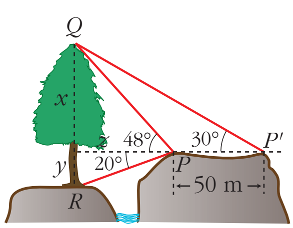
$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot cos\ (56°\ 18'\ 35{,}8'') = 4{,}4 \text{ cm}$$

Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14{,}4 - 2 \cdot 4{,}4 = 5{,}6$ cm

35 **Calcula a altura da árbore QR de pé inaccesible e máis baixo có punto de observación, cos datos da figura.**



Llamemos x e y a las medidas de la altura de las dos partes en que queda dividida la torre según la figura dada; y llamemos z a la distancia de P a la torre.



$$\left.\begin{aligned} tg\ 48° = \frac{x}{z} &\rightarrow x = z \cdot tg\ 48° \\ tg\ 30° = \frac{x}{z + 50} &\rightarrow x = (z + 50)\ tg\ 30° \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow z \cdot tg\ 48° = (z + 50)\ tg\ 30° \rightarrow$$

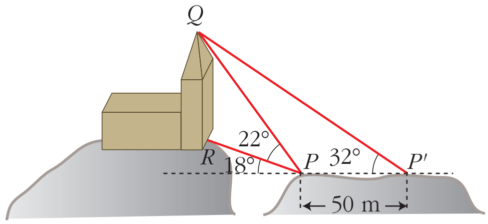
$$\rightarrow z \cdot tg\ 48° = z \cdot tg\ 30° + 50 \cdot tg\ 30° \rightarrow z = \frac{50\ tg\ 30°}{tg\ 48° - tg\ 30°} = 54{,}13 \text{ m}$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\ 48° = 54{,}13 \cdot tg\ 48° = 60{,}12 \text{ m} = x$

Para calcular y: $tg\ 20° = \dfrac{y}{z} \rightarrow y = z \cdot tg\ 20° = 54{,}13 \cdot tg\ 20° = 19{,}7$ m

Luego: $\overline{QR} = x + y = 79{,}82$ m mide la altura de la torre.

36 **Calcula a altura de QR, cuxo pé é inaccesible e máis alto có punto onde se encontra o observador, cos datos da figura.**



Llamemos x a la distancia del punto más alto a la línea horizontal del observador; y, a la distancia de la base de la torre a la misma línea; y z, a la distancia $\overline{R'P}$, como se indica en la figura.

$$\left.\begin{array}{l} tg\,(18° + 22°) = tg\,40° = \dfrac{x}{z} \quad\to\quad x = z \cdot tg\,40° \\[2ex] tg\,32° = \dfrac{x}{z + 50} \quad\to\quad x = (z + 50)\,tg\,32° \end{array}\right\} \to$$

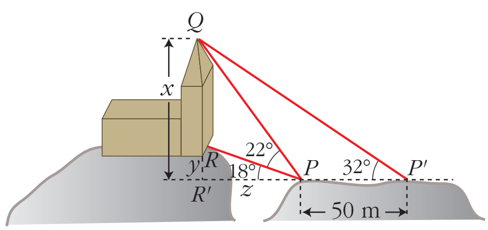
$$\to \quad z \cdot tg\,40° = (z + 50)\,tg\,32° \quad\to\quad z = \frac{50\,tg\,32°}{tg\,40° - tg\,32°} = 145{,}84$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\,40° = 145{,}84 \cdot tg\,40° = 122{,}37$ m

Para calcular y:

$$tg\,18° = \frac{y}{z} \quad\to\quad y = z \cdot tg\,18° =$$

$$= 145{,}84 \cdot tg\,18° = 47{,}4 \text{ m}$$



Por tanto:

$\overline{QR} = x - y = 74{,}97$ m mide la altura de la torre.

CUESTIÓNS TEÓRICAS

37 **Explica se as seguintes igualdades referidas ao triángulo ABC son verdadeiras ou falsas:**

1) $a = \dfrac{b}{sen\,\hat{A}}$ 2) $c = a\cos\hat{B}$

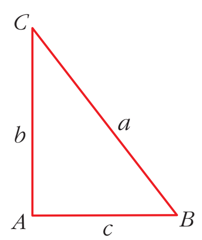
3) $c = \dfrac{b}{tg\,\hat{C}}$ 4) $b = a\,sen\,\hat{C}$

5) $tg\,\hat{B} \cdot tg\,\hat{C} = 1$ 6) $c\,tg\,\hat{B} = b$

7) $sen\,\hat{B} - \cos\hat{C} = 0$ 8) $a = \dfrac{b}{\cos\hat{C}}$

9) $b = \dfrac{c}{tg\,\hat{B}}$ 10) $\sqrt{1 - sen^2\,\hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

11) $sen\,\hat{B} \cdot \cos\hat{C} = 1$ 12) $\dfrac{sen\,\hat{B}}{\cos\hat{C}} = 1$



1) Verdadera, pues $sen\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$

2) Verdadera, pues $cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow a \cdot cos\ \hat{B} = c$

3) Falsa, pues $tg\ \hat{C} = \dfrac{c}{b} \rightarrow c = b \cdot tg\ \hat{C}$

4) Falsa, pues $sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow a \cdot sen\ \hat{C} = c \neq b$

5) Verdadera, pues $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = \dfrac{b}{c} \cdot \dfrac{c}{b} = 1$

6) Verdadera, pues $tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot tg\ \hat{B}$

7) Verdadera, pues $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a} = 0$

8) Verdadera, pues $cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ \hat{C}}$

9) Falsa, pues $tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot tg\ \hat{B}$

10) Verdadera, pues $sen^2\ \hat{B} + cos^2\ \hat{B} = 1 \rightarrow cos\ \hat{B} = \sqrt{1 - sen^2\ \hat{B}}$

Como $cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow \sqrt{1 - sen^2\ \hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

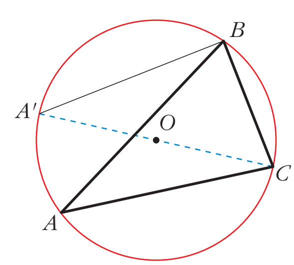
11) Falsa, pues $sen\ \hat{B} \cdot cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} \neq 1$ (porque $b \neq a$)

12) Verdadera, pues $\dfrac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{C}} = \dfrac{b/a}{b/a} = 1$

38 **Proba que nun triángulo calquera se verifica:**

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R$$

***R* é o raio da circunferencia circunscrita.**



☛ ***Traza o diámetro desde un dos vértices do triángulo ABC. Aplica o teorema dos senos nos triángulos ABC e A'BC.***

Aplicamos el teorema de los senos en los triángulos ABC y $A'BC$:

- En $\widehat{ABC} \rightarrow \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$
- En $\widehat{A'BC} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{sen\ \hat{A}'} = \dfrac{\overline{A'C}}{sen\ A'BC}$

Sucede que:

$\overline{BC} = a$

$\widehat{A}' = \widehat{A}$ (ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco)

$\overline{A'C} = 2R$

$\widehat{A'BC} = 90°$ (medida de ángulos inscritos en una circunferencia)

La igualdad queda: $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{2R}{sen\ 90°} \rightarrow \dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{2R}{1} = 2R$

- Por último, sustituyendo en la primera expresión, se obtiene el resultado:

$$2R = \frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}}$$

39 **Proba que só existe un triángulo con estes datos:**

$$\boldsymbol{b = \sqrt{3}\ \text{m}, \quad a = 1{,}5\ \text{m}, \quad \widehat{A} = 60°}$$

Existe algún triángulo con estes datos?:

$$\boldsymbol{\widehat{C} = 135°, \quad b = 3\sqrt{2}\ \text{cm}, \quad c = 3\ \text{cm}}$$

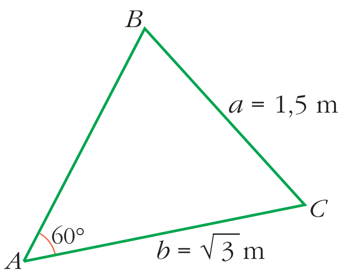
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \widehat{A}$

$1{,}5^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c\ cos\ 60°$

$2{,}25 = 3 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c \cdot \dfrac{1}{2}$

$c^2 - \sqrt{3}\,c + 0{,}75 = 0$

$c = \dfrac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m



La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

(NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para B con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría $\widehat{A} + \widehat{B} > 180°$).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{sen\ \widehat{B}} = \frac{3}{sen\ 135°} \rightarrow$$

$$\rightarrow sen\ \widehat{B} = \frac{3\sqrt{2}\ sen\ 135°}{3} =$$

$$= \sqrt{2}\ sen\ 135° = 1 \rightarrow \widehat{B} = 90°$$

Pero: $\widehat{C} + \widehat{B} = 135° + 90° > 180°$ ¡Imposible!

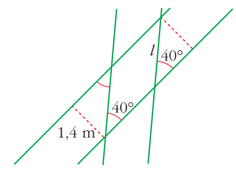
Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

Páxina 125

PARA AFONDAR

40 **Dúas vías de tren de 1,4 m de ancho crúzanse formando un rombo. Se un ángulo de corte é de 40°, canto valerá o lado do rombo?**

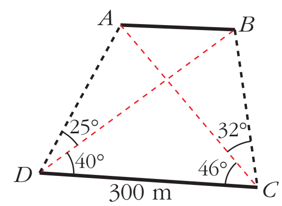
$$sen\ 40° = \frac{1,4}{l} \rightarrow l = \frac{1,4}{sen\ 40°} = 2,18 \text{ m}$$



41 **Para calcular a distancia entre dous puntos inaccesibles *A* e *B*, fixamos dous puntos *C* e *D* tales que $\overline{CD}$ = 300 m, e medimos os seguintes ángulos:**

$$\widehat{ADB} = 25° \qquad \widehat{BDC} = 40°$$

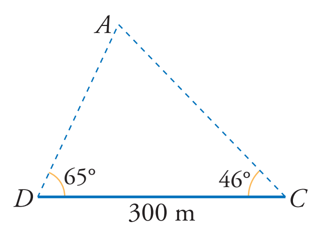
$$\widehat{ACD} = 46° \qquad \widehat{ACB} = 32°$$



Calcula $\overline{AB}$.

Si conociésemos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, podríamos hallar $\overline{AB}$ con el teorema del coseno en $\widehat{ABC}$.

Calculemos, pues, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$:



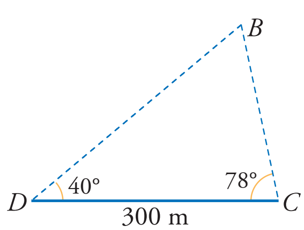
• En el triángulo ADC:

$$\hat{A} = 180° - 65° - 46° = 69°$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 69°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 65°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{300 \cdot sen\ 65°}{sen\ 69°} = 291,24 \text{ m}$$

• En el triángulo BCD:



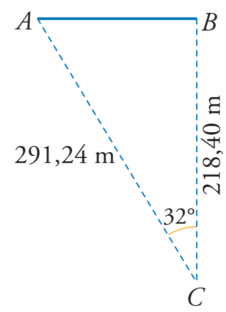
$$\hat{B} = 180° - 40° - 78° = 62°$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 62°} = \frac{\overline{BC}}{sen\ 40°} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \frac{300 \cdot sen\ 40°}{sen\ 62°} = 218,40 \text{ m}$$

• Podemos centrarnos ya en el triángulo ABC y aplicar el teorema del coseno:

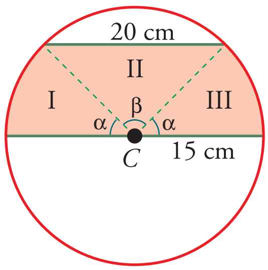


$$\overline{AB}^2 = 291{,}24^2 + 218{,}40^2 - 2 \cdot 291{,}24 \cdot 218{,}40 \cdot \cos 32° =$$

$$= 24\,636{,}019$$

$$\overline{AB} = 156{,}96 \text{ m}$$

42 **Nun círculo de 15 cm de raio, calcula a área comprendida entre unha corda de 20 cm de lonxitude e o diámetro paralelo a ela.**



Podemos dividir la zona sombreada en tres, de forma que:

I = III $\rightarrow$ sectores circulares de ángulo α desconocido.

II $\rightarrow$ triángulo isósceles de lados iguales 15 cm y de lado desigual 20 cm.

• En II:

Calculemos la altura h desde C:

$$15^2 = h^2 + 10^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{15^2 - 10^2} = 11{,}18 \text{ cm}$$

Así: $\text{Área}_{II} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{20 \cdot 11{,}18}{2} = 111{,}8 \text{ cm}^2$

Calculemos el ángulo β (el ángulo desigual) aplicando el teorema del coseno:

$$20^2 = 15^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{15^2 + 15^2 - 20^2}{2 \cdot 15 \cdot 15} = 0{,}\widehat{1} \quad \rightarrow \quad \beta = 83° \; 37' \; 14{,}3''$$

• En I:

Conocido β podemos calcular α fácilmente:

$$\alpha = \frac{180° - \beta}{2} = 48° \; 11' \; 22{,}9''$$

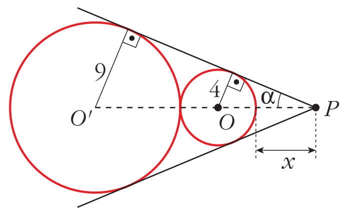
Y, con esto, el área:

$$\text{Área}_I = \frac{\pi r^2}{360°} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 15^2}{360°} \cdot \alpha = 94{,}62 \text{ cm}^2$$

• Por último, el área pedida será:

$$A_T = \text{Área}_{II} + 2 \cdot \text{Área}_I = 111{,}8 + 2 \cdot 94{,}62 \quad \rightarrow \quad A_T = 301{,}04 \text{ cm}^2$$

43 **Dúas circunferencias son tanxentes exteriormente e os seus raios miden 9 m e 4 m. Calcula o ángulo, 2α, que forman as tanxentes comúns.**



☛ ***Os raios forman coas tanxentes dous triángulos rectángulos. Como $\overline{OP} = 4 + x$, tense:***

$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{4}{4+x} \quad y \quad \textit{sen}\ \alpha = \frac{9}{17+x}$$

Calcula x e despois α.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP} = 4 + x \;\rightarrow\; \textit{sen}\ \alpha = \dfrac{4}{4+x} \\[2ex] \overline{O'P} = 9 + 4 + 4 + x = 17 + x \;\rightarrow\; \textit{sen}\ \alpha = \dfrac{9}{17+x} \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{9}{17+x} \rightarrow 4(17+x) = 9(4+x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 68 - 36 = 9x - 4x \rightarrow 32 = 5x \rightarrow x = 6{,}4 \text{ m}$$

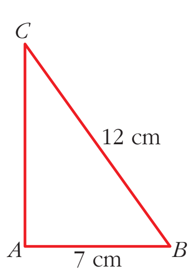
Sustituyendo x por su valor:

$$\textit{sen}\ \alpha = \frac{4}{4+x} = \frac{4}{4+6{,}4} = \frac{4}{10{,}4} = 0{,}3846 \rightarrow \alpha = 22°\ 37'\ 11{,}5''$$

Así: $2\alpha = 45°\ 14'\ 23''$

AUTOAVALIACIÓN

1. **Dun triángulo rectángulo *ABC* coñecemos a hipotenusa *a* = 12 cm e o cateto *c* = 7 cm. Determina os seus ángulos agudos.**



$$\textit{sen}\ \hat{C} = \frac{7}{12} \rightarrow \hat{C} = 35°\ 41'\ 7''$$

$$\hat{B} = 90° - \hat{C} = 54°\ 18'\ 53''$$

2. **Expresa cun ángulo do primeiro cuadrante as razóns trigonométricas dos seguintes ángulos: 154°, 207°, 318°, 2 456°**

$$\begin{cases} sen\ 154° = sen\ (180° - 26°) = sen\ 26° \\ cos\ 154° = -cos\ 26° \\ tg\ 154° = -tg\ 26° \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\ 207° = sen\ (180° + 27°) = -sen\ 27° \\ cos\ 207° = -cos\ 27° \\ tg\ 207° = tg\ 27° \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\ 318° = sen\ (360° - 42°) = -sen\ 42° \\ cos\ 318° = cos\ 42° \\ tg\ 318° = -tg\ 42° \end{cases}$$

$$\begin{cases} sen\ 2\,456° = sen\ (360° \cdot 6 + 296°) = sen\ 296° = sen\ (360° - 64°) = -sen\ 64° \\ cos\ 2\,456° = cos\ 64° \\ tg\ 2\,456° = -tg\ 64° \end{cases}$$

3. **Se $sen\ \alpha = 4/5$ e $\alpha > 90°$, calcula sen determinar o ángulo α:**

a) $cos\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha$ **c)** $sen\ (180° + \alpha)$

d) $cos\ (90° + \alpha)$ **e)** $tg\ (180° - \alpha)$ **f)** $sen\ (90° + \alpha)$

a) $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \ \rightarrow \ cos^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{25} \ \rightarrow \ cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \ \rightarrow \ cos\ \alpha = \pm\frac{3}{5}$

$cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

b) $tg\ \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

d) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

e) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

f) $sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

4. **Se $tg\ \alpha = -3{,}5$, indica α con axuda da calculadora, exprésao como un ángulo do intervalo [0, 360°) e obtén o seu seno e o seu coseno.**

α = SHIFT tan 3.5 +/– = -74.054604

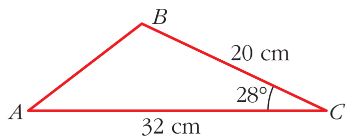
Hay dos soluciones:

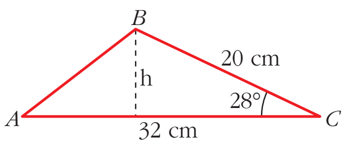
$\alpha_1 = 285°\ 56'\ 43''$ $\qquad$ $\alpha_2 = 105°\ 56'\ 43''$

$sen\ \alpha_1 = -0{,}96; \ cos\ \alpha_1 = 0{,}27$

$sen\ \alpha_2 = 0{,}96; \ cos\ \alpha_2 = -0{,}27$

5. **Calcula a área do triángulo *ABC*.**

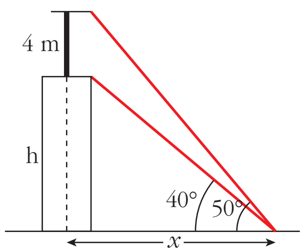




Altura: $sen\ 28° = \dfrac{h}{20} \rightarrow h = 20 \cdot sen\ 28° = 9{,}39$ cm

$\text{Área} = \dfrac{32 \cdot 9{,}39}{2} = 150{,}24\ \text{cm}^2$

6. **No alto dun edificio en construción hai un guindastre de 4 m. Desde un punto do chan vese o punto máis alto do guindastre baixo un ángulo de 50° con respecto á horizontal e o punto máis alto do edificio baixo un ángulo de 40° coa horizontal. Calcula a altura do edificio.**



$$\begin{cases} tg\ 40° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 50° = \dfrac{4 + h}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = x\, tg\ 40° \\ x\, tg\ 50° = 4 + x\, tg\ 40° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x\, tg\ 50° - tg\ 40° = 4 \ \rightarrow\ x = \frac{4}{tg\ 50° - tg\ 40°} = 11{,}34 \text{ m}$$

$h = 11{,}34 \cdot tg\ 40° = 9{,}52$ m

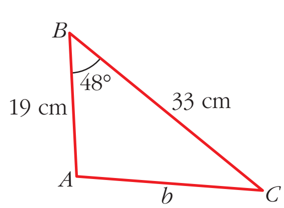
La altura del edificio es 9,52 m.

7. **Resolve o triángulo *ABC* nestes casos:**

a) $c = 19$ **cm,** $a = 33$ **cm,** $\hat{B} = 48°$

b) $a = 15$ **cm,** $b = 11$ **cm,** $\hat{B} = 30°$

a)



- Con el teorema del coseno, hallamos b:

  $b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33\ cos\ 48° = 610{,}9 \rightarrow$

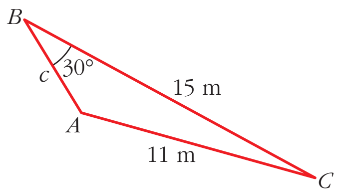
  $\rightarrow\ b = 24{,}72$ cm

- Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

  $33^2 = 19^2 + 24{,}72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24{,}72\ cos\ \hat{A}$

  $cos\ \hat{A} = -0{,}1245 \ \rightarrow\ \hat{A} = 97°\ 9'$

- $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 34°\ 51'$

b) 

• Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \frac{15}{sen\ \hat{A}} = \frac{11}{sen\ 30°} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ sen\ \hat{A} = 0{,}6818$$

• Hay dos soluciones:

$\hat{A}_1 = 42°\ 59'\ 9''$ $\quad \hat{A}_2 = 137°\ 0'\ 51''$

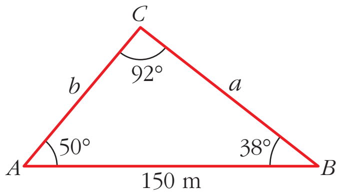
$\hat{C}_1 = 107°\ 0'\ 51''$ $\quad \hat{C}_2 = 12°\ 59'\ 9''$

$$\frac{11}{sen\ 30°} = \frac{c_1}{sen\ 107°\ 0'\ 51''} \rightarrow c_1 = 21{,}04 \text{ cm}$$

$$\frac{11}{sen\ 30°} = \frac{c_2}{sen\ 12°\ 59'\ 9''} \rightarrow c_2 = 4{,}94 \text{ cm}$$

8. Dous amigos están nunha praia a 150 m de distancia e no mesmo plano vertical ca un papaventos que se encontra voando entre os dous. Nun momento dado, un veo cun ángulo de elevación de 50° e o outro cun ángulo de 38°. Que distancia hai de cada un eles ao papaventos?

$\hat{C} = 180° - (50° + 38°) = 92°$



Hallamos a y b con el teorema de los senos:

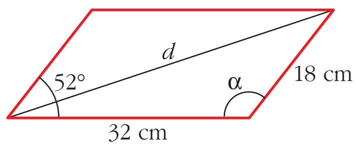
$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{sen\ 50°} = \frac{150}{sen\ 92°} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ a = 114{,}98 \text{ m}$$

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 38°} = \frac{150}{sen\ 92°} \rightarrow b = 92{,}41 \text{ m}$$

Las distancias de cada uno a la cometa son 114,98 m y 92,41 m, respectivamente.

9. Os lados dun paralelogramo miden 18 cm e 32 cm e forman un ángulo de 52°. Calcula a lonxitude da diagonal maior.



$\alpha = 180° - 52° = 128°$

Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32\ cos\ 128° = 2\,057{,}24$

$d = 45{,}36$ cm es la medida de la diagonal.