

Páxina 69

REFLEXIONA E RESOLVE

Presada de améndoas

Tres amigos, Antón, Xoán e Paulo, foron cos seus tres fillos, Xulio, Xosé e Luís, a un almacén de froitos secos.

Ante un saco de améndoas, o dono díxolles:

— Collede as que queirades.

Cada un dos seis meteu a man no saco un número n de veces e, cada vez, levou n améndoas (é dicir, se un deles meteu a man no saco 9 veces, cada vez colleu 9 améndoas, e, polo tanto, levou 81 améndoas). Ademais, cada pai colleu, en total, 45 améndoas máis có seu fillo.

Antón meteu a man 7 veces máis ca Luís, e Xulio, 15 máis ca Paulo.

- *Como se chama o fillo de Antón?*
- *E o de Xoán?*
- *Cantas améndoas levaron entre todos?*

- 2.º caso: 15×3

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 18 \rightarrow x = 9 \\ \text{Restando: } 2y = 12 \rightarrow y = 6 \end{array}$$

Esto significa que outro de los padres cogió 9 puñados de 9 almendras (81 almendras) y su hijo, 6 puñados de 6 almendras (36 almendras).

- 3.º caso: 45×1

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 45 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 46 \rightarrow x = 23 \\ \text{Restando: } 2y = 44 \rightarrow y = 22 \end{array}$$

Uno de los padres se llevó 23 puñados de 23 almendras (529 almendras) y su hijo, 22 puñados de 22 almendras (484 almendras).

Como Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, Antonio cogió 9 puñados y Luis 2 puñados.

Como Julio metió la mano 15 veces más que Pablo, Julio cogió 22 puñados y Pablo, 7 puñados.

Por tanto:

- Antonio se lleva 9 puñados, y José, 6.
- Juan coge 23 puñados, y Julio, 22.
- Pablo se lleva 7 puñados, y Luis, 2.
- El hijo de Antonio es José, el de Juan es Julio y el de Pablo es Luis.

Por último, el número total de almendras que se llevaron entre todos será:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1\,183 \text{ almendras}$$

Sen necesidade da álgebra

Un galgo persegue a unha liebre.

A liebre lévalle 30 dos seus saltos de vantaxe ao galgo. Mentres o galgo dá dous saltos, a liebre dá tres. Tres saltos do galgo equivalen a cinco da liebre.

Cantos saltos coidas que dará cada un ata o momento da captura?

Cada 2 saltos de galgo y 3 de liebre se acerca 1 u el galgo.

Cada 2 · 2 saltos de galgo y 3 · 2 de liebre se acerca 2 u el galgo.

Cada 2 · 3 saltos de galgo y 3 · 3 de liebre se acerca 3 u el galgo.

... ..

Cada 2 · 90 saltos de galgo y 3 · 90 de liebre se acerca 90 u el galgo.

Como la liebre lleva 30 de sus saltos al galgo (90 u de ventaja), serán:

$$2 \cdot 90 = 180 \text{ saltos el galgo}$$

$$3 \cdot 90 = 270 \text{ saltos la liebre}$$

De esta forma el galgo recorre $180 \cdot 5 u = 900 u$; y la liebre $270 \cdot 3 u = 810 u$.

Como tenía 90 de ventaja: $810 + 90 = 900 u$

Por tanto, hasta el momento de la captura el galgo da 180 saltos, y la liebre, 270.

Páxina 71

1. Descompón factorialmente os seguintes polinomios:

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

a) $x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x^3 - 9x^2 + 24x - 20)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 24 & -20 \\ 2 & & 2 & -14 & 20 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \\ 2 & & 2 & -10 & \\ \hline & 1 & -5 & 0 & \end{array}$$

$x^6 - 9x^5 + 24x^4 - 20x^3 = x^3(x - 2)^2(x - 5)$

b) $x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 2x + 8)$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -3 & -5 & 2 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & -10 & -8 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & 2 & 8 & \\ \hline & 1 & -3 & -2 & -8 & 0 & \\ 4 & & 4 & 4 & 8 & & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$

no tiene solución

$x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x - 1)(x + 1)(x - 4)(x^2 + x + 2)$

c) $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 1 & 6 & 9 & 0 & -1 & -6 & -9 \\ -1 & & -1 & -5 & -4 & 4 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & -4 & 3 & -9 & 0 \\ -3 & & -3 & -6 & 6 & -6 & 9 & \\ \hline & 1 & 2 & -2 & 2 & -3 & 0 & \\ -3 & & -3 & 3 & -3 & 3 & & \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & & \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & & & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \end{array}$$

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow$ no tiene solución

Así, $x^6 + 6x^5 + 9x^4 - x^2 - 6x - 9 = (x + 3)^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$

2. a) Intenta factorizar $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4$.

b) Faino agora sabendo que é divisible por $x^2 + x + 1$.

a) El polinomio dado no tiene raíces enteras (de hecho, no tiene raíces reales).

b) Hacemos la división:

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 \quad | \quad x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^4 - x^3 - x^2} \quad x^2 + 3x + 4 \\ 3x^3 + 7x^2 + 7x + 4 \\ \underline{-3x^3 - 3x^2 - 3x} \\ 4x^2 + 4x + 4 \\ \underline{-4x^2 - 4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 3x + 4$ son irreducibles (las ecuaciones $x^2 + x + 1 = 0$ y $x^2 + 3x + 4 = 0$ no tienen solución). Por tanto:

$$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 7x + 4 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 4)$$

3. Intenta factorizar $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1$. Vuelve intentarlo sabiendo que $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ son raíces súas.

El polinomio dado no tiene raíces enteras.

Teniendo en cuenta el dato adicional (que $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ son raíces), procedemos así:

$-1/2$	6	7	6	0	-1	$6x^2 + 6x + 6 = 0$
	-3	-2	-2	1	1	$6(x^2 + x + 1) = 0$
$1/3$	6	4	4	-2	0	$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ no tiene solución
	6	6	6	0	0	

Por tanto:

$$6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) 6(x^2 + x + 1) = (2x + 1)(3x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Página 73

1. Reduce previamente a común denominador as fracciones alxébricas següentes, e súmaas:

$$\frac{x + 7}{x} \quad \frac{x - 2}{x^2 + x} \quad -\frac{2x + 1}{x + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = x \\ x^2 + x = x(x + 1) \\ x + 1 = x + 1 \end{array} \right\} \text{mín.c.m.} = x(x + 1)$$

Reducimos a común denominador:

$$\begin{aligned} \frac{x + 7}{x} &= \frac{(x + 7)(x + 1)}{x(x + 1)} = \frac{x^2 + 8x + 7}{x(x + 1)} \\ \frac{x - 2}{x^2 + x} &= \frac{x - 2}{x(x + 1)} \\ -\frac{2x + 1}{x + 1} &= -\frac{(2x + 1)x}{x(x + 1)} = -\frac{2x^2 + x}{x(x + 1)} = -\frac{2x^2 - x}{x(x + 1)} \end{aligned}$$

Las sumamos:

$$\begin{aligned} \frac{x + 7}{x} + \frac{x - 2}{x^2 + x} - \frac{2x + 1}{x + 1} &= \frac{x^2 + 8x + 7}{x(x + 1)} + \frac{x - 2}{x(x + 1)} + \frac{-2x^2 - x}{x(x + 1)} = \\ &= \frac{x^2 + 8x + 7 + x - 2 - 2x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{-x^2 + 8x + 5}{x^2 + x} \end{aligned}$$

2. Efectúa: $\frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x-1} = \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{1 + 2x(x-1) - x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{1 + 2x^2 - 2x - x^2 - x}{x^2-1} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Página 74

3. Efectúa estas operaciones:

a) $\frac{x^2-2x+3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5}$

b) $\frac{x^2-2x+3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2-2x+3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5} &= \frac{(x^2-2x+3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)} = \\ &= \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 6x + 6x + 9}{x^2 + 5x - 2x - 10} = \frac{2x^3 - x^2 + 9}{x^2 + 3x - 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^2-2x+3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5} &= \frac{x^2-2x+3}{x-2} \cdot \frac{x+5}{2x+3} = \frac{(x^2-2x+3)(x+5)}{(x-2)(2x+3)} = \\ &= \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5x^2 - 10x + 15}{2x^2 + 3x - 4x - 6} = \frac{x^3 + 3x^2 - 7x + 15}{2x^2 - x - 6} \end{aligned}$$

4. Calcula:

a) $\frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1} \right)$

b) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1} \right) &= \frac{x+2}{x} : \frac{(x-1)x}{3(2x+1)} = \frac{x+2}{x} \cdot \frac{3(2x+1)}{(x-1)x} = \\ &= \frac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)} = \frac{3(2x^2 + 4x + x + 2)}{x^3 - x^2} = \\ &= \frac{6x^2 + 15x + 6}{x^3 - x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4} &= \frac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4} = \frac{x^8-x^4}{x^6+x^4} = \frac{x^4(x^4-1)}{x^4(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = x^2-1 \end{aligned}$$

Página 75

1. Resolve as ecuaciones seguintes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a) $x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 2 \text{ y } -2$

b) $x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 3 \text{ y } -3$

2. Resolve:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

a) $x^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ -9 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

No tiene solución.

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x^2 = -1 \rightarrow \text{No vale} \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

Página 76

3. Resolve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3$; $x^2 - 4x + 4 = 0$; $x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0$; $x = \frac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 114$

$$c) \sqrt{x} = x - 2; \quad x = x^2 + 4 - 4x; \quad 0 = x^2 - 5x + 4$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 4$$

$$d) 2 - x = \sqrt{x}; \quad 4 + x^2 - 4x = x; \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 1$$

$$e) \sqrt{3x + 3} - 1 = \sqrt{8 - 2x}$$

$$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8 - 2x}$$

$$5x - 6 = 2\sqrt{8 - 2x}$$

$$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$$

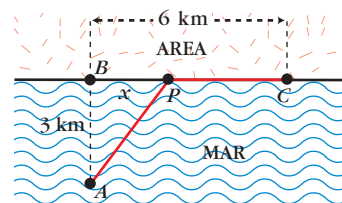
$$25x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0,08 \end{cases} \rightarrow \text{no vale}$$

$$\text{Así, } x = 2.$$

- 4.** Para irnos de A a C navegamos a 4 km/h en línea recta a P , e despois camiñamos a 5 km/h de P a C . Tardamos en facelo, en total, 99 minutos ($99/60$ horas).

Cal é a distancia, x , de B a P ?



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AP}^2 = x^2 + 9 \\ \overline{PC} = 6 - x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = t \\ \frac{6 - x}{5} = \left(\frac{99}{60} - t \right) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} \\ t = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60} \end{array} \right\} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5} = \frac{99}{60}$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 12(6 - x) = 99$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 72 - 12x = 99$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} = 12x + 27$$

$$225(x^2 + 9) = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$225x^2 + 2025 = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$81x^2 - 648x + 1296 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

Así, la distancia de B a P es de 4 km.

Página 77

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10}$$

$$\text{b) } \frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4$$

$$\text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{a) } 10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$$

$$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$$

$$0 = 3x^2 - 11x - 30$$

$$x = \frac{11 \pm 21,93}{6} = \begin{cases} 5,489 \\ -1,822 \end{cases}$$

$$x_1 = 5,489; \quad x_2 = -1,822$$

$$\text{b) } 12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$$

$$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$$

$$0 = 10x^2 - 38x + 24$$

$$0 = 5x^2 - 19x + 12; \quad x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } 4x + 4 = 3x^2; \quad 0 = 3x^2 - 4x - 4$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{-2}{3}$$

6. Resolve:

$$\text{a) } \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3 \quad \text{b) } \frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2} \quad \text{c) } \frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$$

$$\text{a) } x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$$

$$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$$

$$x = 3$$

$$\text{b) } 10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2+5x+6)$$

$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; x_2 = -4$$

$$\text{c) } 35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$$

$$35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1)$$

$$35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26$$

$$26x^2 - 140x - 96 = 0$$

$$x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases}$$

$$x_1 = 6; x_2 = \frac{-8}{13}$$

Página 79**7. Resolve as seguintes equações:**

$$\text{a) } 2^{3x} = 0,5^{3x+2}$$

$$\text{b) } 3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{c) } \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$$

$$\text{d) } 7^{x+2} = 5\,764\,801$$

$$\text{a) } 2^{3x} = 2^{-3x-2}; \quad 3x = -3x-2; \quad 6x = -2; \quad x = \frac{-1}{3}$$

$$\text{b) } 3^{4-x^2} = 3^{-2}; \quad 4-x^2 = -2; \quad x^2 = 6; \quad x = \pm\sqrt{6}$$

$$x_1 = \sqrt{6}; \quad x_2 = -\sqrt{6}$$

$$c) \frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186; \quad 2^{2x-2-x-2} = 186; \quad 2^{x-4} = 186$$

$$\log 2^{x-4} = \log 186; \quad (x-4) \log 2 = \log 186$$

$$x = 4 + \frac{\log 186}{\log 2} = 11,54$$

$$d) 7^{x+2} = 7^8; \quad x = 6$$

8. Resolve:

$$a) 3^x + 3^{x+2} = 30$$

$$b) 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$$

$$c) 2 \log x - \log(x+6) = 3 \log 2$$

$$d) 4 \log_2(x^2+1) = \log_2 625$$

$$a) 3^x + 3^x \cdot 9 = 30$$

$$3^x(10) = 30; \quad 3^x = 3; \quad x = 1$$

$$b) 5 \cdot 5^x + 5^x + \frac{5^x}{5} = \frac{31}{5}$$

$$5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{5}; \quad x = 0$$

$$c) \log \frac{x^2}{x+6} = \log 8$$

$$x^2 = 8x + 48; \quad x^2 - 8x - 48 = 0; \quad x = \frac{8 \pm 16}{2} = \begin{cases} 12 \\ -4 \end{cases} \quad (\text{no vale})$$

$$x = 12$$

$$d) \log_2(x^2+1)^4 = \log_2 5^4; \quad x^2+1 = 5; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2$$

Página 81

1. Resolva estes sistemas de equações:

$$a) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

$$x^2 - 9 = 2x - 1; \quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; y_1 = 7$$

$$x_2 = -2; y_2 = -5$$

$$\text{b) } \begin{cases} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$y = 5 - x$$

$$x(5 - x) = 6; 5x - x^2 = 6; x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; y_1 = 3$$

$$x_2 = 3; y_2 = 2$$

$$\text{c) } x = 2y + 1$$

$$\sqrt{3y + 1} - \sqrt{y + 1} = 2; \sqrt{3y + 1} = 2 + \sqrt{y + 1}$$

$$3y + 1 = 4 + y + 1 + 4\sqrt{y + 1}; 2y - 4 = 4\sqrt{y + 1}; y - 2 = 2\sqrt{y + 1}$$

$$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4; y^2 - 8y = 0$$

$$y = 8 \rightarrow x = 17$$

$$y = 0 \text{ (no vale)}$$

$$x = 17; y = 8$$

2. Resolve:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = 27 \\ \log x - 1 = \log y \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \log(x^2 + y) - \log(x - 2y) = 1 \\ 5^{x+1} = 25^{y+1} \end{cases}$$

$$\text{a) } y = 1 - x; x^2 + x(1 - x) + (1 - x)^2 = 21$$

$$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21; x^2 - x - 20 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$x_1 = -4; y_1 = 5$$

$$x_2 = 5; y_2 = -4$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 27 + y \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

$$10y = 27 + y; 9y = 27; y = 3$$

$$\frac{x}{y} = 10; x = 10y; x = 30$$

$$x = 30; y = 3$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} \text{c) } \log \frac{x^2 + y}{x - 2y} = 1 \\ 5^{x+1} = 5^{2y+2} \end{aligned} \right\} \\
 & \left. \begin{aligned} x^2 + y = 10x - 20y \\ x + 1 = 2y + 2 \end{aligned} \right\} \\
 & x = 2y + 1 \\
 & 4y^2 + 1 + 4y + y = 20y + 10 - 20y \\
 & 4y^2 + 5y - 9 = 0 \\
 & y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{8} = \frac{-5 \pm 13}{8} = \begin{cases} -9/4 \rightarrow x = -7/2 \\ 1 \rightarrow x = 3 \end{cases} \\
 & x_1 = 3; y_1 = 1 \\
 & x_2 = \frac{-7}{2}; y_2 = \frac{-9}{4}
 \end{aligned}$$

Página 82

1. Reconhece como graduados e resolve:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x = -3 \\ 5y = 20 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} x &= 7 \\ 2x - 3y &= 8 \\ 3x + y - z &= 12 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= \frac{2x - 8}{3} = 2 \\ z &= 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 2 \\ z &= 11 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ 2y &= -6 \\ 5x + y - z &= 17 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= \frac{-6}{2} = -3 \\ x &= \frac{-4y}{3} = 4 \\ z &= 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -3 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \left. \begin{aligned} 3x &= -3 \\ 5y &= 20 \\ 2x + y - z &= -2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \\ z &= 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ x - z = 11 \\ y - z = 7 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ z = y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x = 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 8 \\ y = 4 \\ z = -3 \end{array}$$

2. Resolva os seguintes sistemas graduados:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array} \right.$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array} \right.$$

$$a) \left. \begin{array}{l} y = -5 \\ 2z = 8 \\ 3x = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = -5 \\ z = 4 \\ x = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{array}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x + 2y - z = -3 \\ 3x + y = -5 \\ 5y = -10 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = \frac{-10}{5} = -2 \\ x = \frac{-5 - y}{3} = -1 \\ z = x + 2y + 3 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{array}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} z = 1 \\ y = \frac{5 + z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 8 + 10 - 3 = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{9}{3} = 3 \\ y = \frac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$$

Página 83

3. Resolve polo método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$$

4. Resolve:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a + 4 \cdot 2.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{cases} \begin{array}{l} 2 \cdot 1.^a + 3.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 2 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ z = \frac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \frac{2x + 4z + 1}{5} = \frac{1}{5} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$$

Página 84

5. Intenta resolver polo método de Gauss:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{array} \right. \qquad d) \left\{ \begin{array}{l} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right.$$

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 0). Por tanto, el sistema es incompatible.

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y , z en función de x :

$$(2.^a) \rightarrow y = 2x - 1$$

$$(1.^a) \rightarrow z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$$

$$\text{Soluciones: } \left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{array} \right.$$

Para cada valor de x , se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right. \qquad \text{Para } x = -2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{array} \right.$$

$$c) \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 2x - y + 4z = 8 & 2.^a + 3.^a \\ x + y - z = 2 & 3.^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 3x + 3z = 10 & 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ x + y - z = 2 & 3.^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La segunda ecuación es absurda. No} \\ \text{puede ser } 0 = 1. \\ \text{Por tanto, el sistema no tiene solución.} \end{array}$$

$$d) \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 2x - y + 4z = 8 & 2.^a + 3.^a \\ x + y - z = 1 & 3.^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 3x + 3z = 9 & 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ x + y - z = 1 & 3.^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La segunda ecuación no dice nada. No} \\ \text{es una ecuación. Por tanto, solo quedan} \\ \text{dos ecuaciones, la } 1.^a \text{ y la } 3.^a. \end{array}$$

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z :

$$\begin{cases} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1 - (3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$$

Para cada valor que le demos a z , se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

$$\text{Para } z = 0 \rightarrow x = 3, y = -2$$

$$\text{Para } z = 4 \rightarrow x = -1, y = 6$$

Página 85

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \leq 10$

c) $2x + 5 \geq 6$

a) $3x - 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

Soluciones: $\{x / x \leq 4\} = (-\infty, 4]$

c) $2x + 5 \geq 6 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x / x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

b) $x - 2 > 1$

d) $3x + 1 \leq 15$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x / x > 3\} = (3, +\infty)$

d) $3x + 1 \leq 15 \rightarrow 3x \leq 14 \rightarrow x \leq \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x / x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2. Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a)
$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3 \end{cases} \quad \text{Soluciones: } \{x / 3 < x \leq 4\} = (3, 4]$$

b)
$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{14}{3} \end{cases} \quad \text{Soluciones: } \left\{x / \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$$

Página 86**3. Resolve as seguintes inecuaciones:**

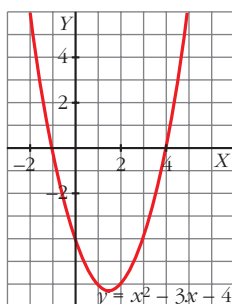
a) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$

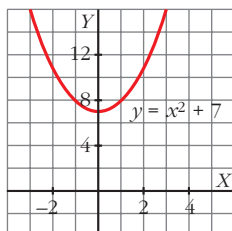
d) $x^2 - 4 \leq 0$

a) $x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow \text{intervalo } (-1, 4)$



b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c) $x^2 + 7 < 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$



d) $x^2 - 4 \leq 0$

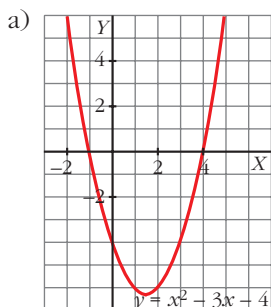
La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$.

Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4. Resolve os seguintes sistemas de inecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$$



$$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$$

$$\text{Solución: } (6, +\infty)$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).
- Las soluciones de la segunda inecuación son:
$$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$$
- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

Página 87

LINGUAXE MATEMÁTICA

1. Das seguintes igualdades, cales son identidades?

$$\text{a) } (x - 3)(x - 2)x = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$\text{b) } (x - 3)(x - 2)x = x^3$$

$$\text{c) } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\text{d) } \frac{x^3 - 3x - 5}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 - \frac{3}{x - 2}$$

Comproba, nelas, que a igualdade é certa para calquera valores das variables (fai a comprobación para varios números).

Son identidades a), c) y d).

2. Resolve, paso a paso, a ecuación

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

e explica en cada paso por que a ecuación que se obtén é equivalente á que había.

Cando o paso consista en obter unha expresión idéntica a outra, sinala cal é a expresión transformada, cal é a obtida e que operación permite pasar da unha á outra.

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^4 - 6x^3 + 36$$

En el primer miembro se ha efectuado la multiplicación:

$$(x^2 - 6x + 9)x^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2.$$

Ha convenido ponerlo en forma polinómica para poder simplificar en el segundo miembro.

$$9x^2 = 36$$

Esta ecuación es equivalente a la anterior porque se han simplificado algunos términos de ambos miembros.

$$x^2 = 36 : 9 = 4$$

Ecuación equivalente, por haber dividido los dos miembros por 9.

$$x = \pm 2$$

EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

Factorización

1 Descompón en factores estes polinomios e di cales son as súas raíces:

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $x^4 - 5x^2 + 4$

c) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

d) $x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$

e) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

f) $x^5 - 16x$

g) $4x^2 - 25$

h) $4x^2 + 4x + 1$

a) $(x + 1)(x - 1)(x - 2) \rightarrow$ Raíces: $-1, 1, 2$

b) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) \rightarrow$ Raíces: $1, -1, 2, -2$

c) $(x - 1)(x + 2)(4x - 10) \rightarrow$ Raíces: $1, -2, \frac{10}{4}$

d) $(x - 1)(x - 2)(x - 5)(x^2 + x + 1) \rightarrow$ Raíces: $1, 2, 5$

e) $(x + 2)(x - 2)(2x - 1)(3x - 1) \rightarrow$ Raíces: $-2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

f) $x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \rightarrow$ Raíces: $0, 2, -2$

g) $(2x + 5)(2x - 5) \rightarrow$ Raíces: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

h) $(2x + 1)^2 \rightarrow$ Raíz: $-\frac{1}{2}$

2 Determina, en cada un dos seguintes casos, o máx.c.d. $[A(x), B(x)]$ e o mín.c.m. $[A(x), B(x)]$:

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^3 - 9x$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a) $A(x) = (x - 3)(x + 4)$; $B(x) = x(x - 3)(x + 3)$

máx.c.d. = $(x - 3)$

mín.c.m. = $x(x - 3)(x + 3)(x + 4)$

b) $A(x) = (x - 1)(x + 1)^2$; $B(x) = x(x - 1)(x + 1)$

máx.c.d. = $(x - 1)(x + 1)$

mín.c.m. = $x(x - 1)(x + 1)^2$

$$c) A(x) = x^2(x+1)(x-1)(x^2+1); B(x) = (x-1)(x^2+1)$$

$$\text{máx.c.d.} = (x-1)(x^2+1)$$

$$\text{mín.c.m.} = x^2(x+1)(x-1)(x^2+1)$$

3 Resolve as seguintes equações, pero factoriza previamente:

a) $x^3 - 7x - 6 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

g) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

a)

1	0	-7	-6	
-1	-1	1	6	
1	-1	-6	0	0
-2	-2	6		
1	-3	0		
3	3			
1	0			

$x_1 = -1; x_2 = -2; x_3 = 3$

b)

2	-3	-9	10	
1	2	-1	-10	
2	-1	-10	0	0
-2	-4	10		
2	-5	0		

$x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = \frac{5}{2}$

c)

1	-5	5	5	-6	
1	1	-4	1	6	
1	-4	1	6	0	0
-1	-1	5	-6		
1	-5	6	0		
2	2	-6			
1	-3	0			
3	3				
1	0				

$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = 3$

$$d) \begin{array}{c|cccc} & 3 & -10 & 9 & -2 \\ 1 & & 3 & -7 & 2 \\ \hline & 3 & -7 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & & 6 & -2 & \\ \hline & 3 & -1 & & \boxed{0} \end{array} \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = \frac{1}{3}$$

$$e) x(x^4 - 16) = 0; \quad x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -2$$

$$f) x(x^2 - 3x + 2) = 0; \quad x(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2$$

$$g) \begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} \end{array} \quad x = 1$$

Fracciones alébricas

4 Simplifica as fracciones:

$$a) \frac{9 - x^2}{x^2 - 3x}$$

$$b) \frac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^3 - 4x}$$

$$a) \frac{(3 - x)(3 + x)}{x(x - 3)} = \frac{-(3 + x)}{x}$$

$$b) \begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ 2 & & 6 & 8 & 2 \\ \hline & 3 & 4 & 1 & \boxed{0} \\ -1 & & -3 & -1 & \\ \hline & 3 & 1 & & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{(x - 2)(x + 1)(3x + 1)}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x}$$

5 Opera e simplifica o resultado:

$$a) \frac{3a + 3}{12a - 12} : \frac{(a + 1)^2}{a^2 - 1}$$

$$b) \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$$

$$c) \frac{x}{x - 2} - \frac{x}{x - 1} - \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$d) \left(\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x + 2} \right) : \left(1 + \frac{x}{x + 2} \right)$$

$$e) \left(1 - \frac{x + 1}{x + 2} \cdot \frac{x + 3}{x + 2} \right) : \frac{1}{x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{3(a+1)(a+1)(a-1)}{12(a-1)(a+1)^2} = \frac{1}{4} \\ \text{b)} \quad & \frac{(x+3)(x-1)(x-2)^2}{(x-2)^3(x+1)(x-1)} = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)} \\ \text{c)} \quad & \frac{x(x-1) - x(x-2) - x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x^2 - x - x^2 + 2x - x}{(x-2)(x-1)} = 0 \\ \text{d)} \quad & \frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)} : \frac{x+2+x}{x+2} = \frac{3x+2}{x(x+2)} \cdot \frac{x+2}{2x+2} = \\ & = \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x(x+1)} \\ \text{e)} \quad & \frac{x^2 + 4 + 4x - x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} \cdot (x+2) = \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

6 Demuestra as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1-x^2} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x} \\ \text{b)} \quad & \frac{a^2 - 1}{a^2 - 3a + 2} : \frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - a - 2} = 1 \\ \text{c)} \quad & \left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2} \right) : \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) = 2x - 5 \\ \text{a)} \quad & \left(\frac{1-x+2x}{1-x^2} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{x} \right) = \left(\frac{1+x}{(1-x)(1+x)} \right) \cdot \left(\frac{1-x}{x} \right) = \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} \\ \text{b)} \quad & \frac{(a+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)} : \frac{(a+1)^2}{(a-2)(a+1)} = \frac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a+1)} = 1 \\ \text{c)} \quad & \left(\frac{(x-2)^2 - (x-3)^2}{(x-3)(x-2)} \right) : \left(\frac{(x-2) - (x-3)}{(x-3)(x-2)} \right) = \\ & = \frac{(x-2+x-3)(x-2-x+3)}{(x-3)(x-2)} : \frac{x-2-x+3}{(x-3)(x-2)} = \\ & = \frac{(2x-5)}{(x-3)(x-2)} : \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{(2x-5)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = 2x - 5 \end{aligned}$$

Ecuacións de primeiro e segundo grao

7 Entre estas ecuacións de primeiro grao, hai dúas que non teñen solución, dúas que teñen infinitas solucións e dúas que teñen solución única. Identifica cada caso e resolve as que sexan posible:

$$\text{a) } \frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$$

$$\text{b) } x + \frac{3-x}{3} - 1 = \frac{2}{3}x$$

$$\text{c) } \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$$

$$\text{d) } 0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 = 1,25x - (0,5x+2)^2$$

$$\text{e) } (5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$$

$$\text{f) } \frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$$

$$\text{a) } 2x + 2 = 4x - 2x - 3; \quad 5 = 0$$

No tiene solución.

$$\text{b) } 3x + 3 - x - 3 = 2x; \quad 0 = 0$$

Infinitas soluciones.

$$\text{c) } \frac{x^2+1+2x}{16} - \frac{8+8x}{16} = \frac{x^2+1-2x}{16} - \frac{8+4x}{16}$$

$$2x - 8 - 8x = -2x - 8 - 4x; \quad 0 = 0$$

Infinitas soluciones.

$$\text{d) } 0,2x + 0,6 - 0,25(x^2 + 1 - 2x) = 1,25x - (0,25x^2 + 4 + 2x)$$

$$0,2x + 0,6 - 0,25x^2 - 0,25 + 0,5x = 1,25x - 0,25x^2 - 4 - 2x$$

$$1,45x = -4,35$$

$$x = -3$$

$$\text{e) } 25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x; \quad 9 = 0$$

No tiene solución.

$$\text{f) } 4x + 2 - 7(x^2 - x - 2) = 7x - 14 - 7(x^2 + 4 - 4x)$$

$$4x + 2 - 7x^2 + 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$$

$$58 = 24x$$

$$x = \frac{29}{12}$$

8 Resuelve as seguintes ecuacións:

$$\text{a) } \frac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \frac{x^2+2}{2}$$

$$\text{b) } 0,5(x-1)^2 - 0,25(x+1)^2 = 4-x$$

$$\text{c) } (0,5x-1)(0,5x+1) = (x+1)^2 - 9$$

$$\text{d) } \frac{3}{2} \left(\frac{x}{2} - 2 \right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$$

$$e) \frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} = \frac{(3x-2)^2}{8} + 1$$

$$f) 0,3x^2 - x - 1,3 = 0$$

• **Expresa os decimais periódicos en forma de fracción e obterás solucións enteiras.**

$$a) 2x^2 - 2 + 6(x^2 + 4 - 4x) = 3x^2 + 6$$

$$2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x = \frac{24 \pm 16}{10} = \begin{cases} 4 \\ 4/5 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; x_2 = \frac{4}{5}$$

$$b) 0,5(x^2 + 1 - 2x) - 0,25(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$$

$$0,5x^2 + 0,5 - x - 0,25x^2 - 0,25 - 0,5x = 4 - x$$

$$0,25x^2 - 0,5x - 3,75 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = -3; x_2 = 5$$

$$c) 0,25x^2 - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$0 = 0,75x^2 + 2x - 7$$

$$x = \frac{-2 \pm 5}{1,5} = \begin{cases} 2 \\ -70/15 = -14/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{14}{3}$$

$$d) \frac{3}{2} \left(\frac{x^2}{4} + 4 - 2x \right) - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{2x-2}{8}$$

$$3x^2 + 48 - 24x - x - 1 = 1 - 2x + 2; 3x^2 - 23x + 44 = 0$$

$$x = \frac{23 \pm 1}{6} = \begin{cases} 4 \\ 11/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; x_2 = \frac{11}{3}$$

$$e) 4x(x-3) + 2x(x+2) = 9x^2 + 4 - 12x + 8$$

$$4x^2 - 12x + 2x^2 + 4x = 9x^2 + 4 - 12x + 8$$

$$0 = 3x^2 - 4x + 12 \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

$$f) \frac{x^2}{3} - \frac{3x}{3} - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 4, x_2 = -1$$

Página 93

9 Resolve estas ecuacións incompletas de segundo grao sen aplicar a fórmula xeral e comproba as solucións:

👉 *Lembra: $ax^2 + c = 0$ resólvese despexando x . $ax^2 + bx = 0$ resólvese sacando factor común e igualando a cero cada factor.*

$$a) (x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$$

$$b) \frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$$

$$c) \frac{3x + 1}{3} - \frac{5x^2 + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 2}{3}$$

$$d) (x - a)^2 + x(x + b) = 8b^2 - x(2a - b) + a^2$$

$$a) x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$$

$$0 = 2x^2 - 8; x^2 = 4$$

$$x_1 = -2; x_2 = 2$$

$$b) 6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$$

$$x^2 - 13x = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 13$$

$$c) 6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$$

$$0 = 18x^2 - 8x; 2x(9x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{4}{9}$$

$$d) x^2 + a^2 - 2ax + x^2 + bx = 8b^2 - 2ax + bx + a^2$$

$$2x^2 = 8b^2; x^2 = 4b^2; x = \pm 2b$$

$$x_1 = 2b; x_2 = -2b$$

Ecuaciones bicuadradas

10 Resuelve estas ecuaciones bicuadradas e comprueba las soluciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

$$a) x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 1; x_4 = -1$$

$$b) x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \text{ (no vale)}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

$$c) x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \rightarrow \text{No tiene solución}$$

$$d) x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2} = \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2\sqrt{2}; x_4 = -2\sqrt{2}$$

11 Resuelve:

a) $(x^2 - 2)^2 = 1$

b) $\frac{3x^4 - 1}{4} + \frac{1}{2} \left(x^4 - 2 - \frac{1}{2} x^2 \right) = \frac{x^2 - 5}{4}$

a) $(x^2 - 2)^2 = 1 \rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 1$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = 1; x_4 = -1$$

b) $3x^4 - 1 + 2x^4 - 4 - x^2 = x^4 - 5$

$$4x^4 - x^2 = 0$$

$$x^2 (4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = -\frac{1}{2}$$

Ecuaciones con radicales

12 Resuelve las siguientes ecuaciones e comprueba las soluciones:

a) $\sqrt{5x+6} = 3+2x$

b) $x + \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{2-5x} + x\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-5} = 0$

a) $5x+6 = 9+4x^2+12x; 0 = 4x^2+7x+3$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \frac{-7 \pm 1}{8} = \begin{cases} -1 \\ -3/4 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; x_2 = -\frac{3}{4}$$

b) $7-3x = 1+x^2-2x; 0 = x^2+x-6$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$$x = -3$$

c) $2-5x = 3x^2; 0 = 3x^2+5x-2$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \begin{cases} 1/3 \text{ (no vale)} \\ -2 \end{cases}$$

$$x = -2$$

d) $2x+3 = x-5; x = -8$ (no vale)

No tiene solución.

13 Resuelve:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$ b) $\sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$ c) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$

a) $5x-6 = 16+2x-8\sqrt{2x}$

$$3x-22 = -8\sqrt{2x}$$

$$9x^2+484-132x = 64 \cdot 2x; 9x^2-260x+484 = 0$$

$$x = \frac{260 \pm 224}{18} = \begin{cases} 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ 2 \end{cases}$$

$$x = 2$$

b) $\frac{7x+1}{4} = \frac{25x^2+49-70x}{36}$

$$63x+9 = 25x^2+49-70x; 0 = 25x^2-133x+40$$

$$x = \frac{133 \pm 117}{50} = \begin{cases} 5 \\ 8/25 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x = 5$$

c) Aislamos un radical: $\sqrt{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$x - 2 = 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1 \rightarrow 6\sqrt{x+1} = 12 \rightarrow \sqrt{x+1} = 2$$

Repetimos el proceso: $x + 1 = 4 \rightarrow x = 3$

Comprobamos la solución, $\sqrt{3-2} + \sqrt{3+1} = 3$, vemos que es válida.

Ecuaciones con x no denominador

14 Resuelve estas ecuaciones e comprueba la validez de las soluciones:

a) $\frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$

b) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

c) $\frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{2-x}$

• Ten en cuenta que $2-x = -(x-2)$.

d) $\frac{x}{x-6} - \frac{1}{2} = \frac{x}{6} + \frac{x+6}{6-x}$

e) $\frac{3x+1}{x^3} + \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{2x+3}{x^2}$

f) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}x$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$$x^2 - 4x + 4 = 0; \quad x = 2$$

b) $8(x-6) + (12-x)(x+6) = x^2 - 36$

$$8x - 48 + 12x + 72 - x^2 - 6x = x^2 - 36$$

$$0 = 2x^2 - 14x - 60$$

$$0 = x^2 - 7x - 30$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{2} = \begin{cases} 10 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = 10; \quad x_2 = -3$$

c) $(x-2)^2 = x^2 + (x-1)^2$

$$x^2 + 4 - 4x = x^2 + x^2 + 1 - 2x$$

$$0 = x^2 + 2x - 3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \text{ (no vale)} \\ -3 \end{cases}$$

$$x = -3$$

$$d) 6x - 3(x - 6) = x(x - 6) - 6(x + 6)$$

$$6x - 3x + 18 = x^2 - 6x - 6x - 36$$

$$0 = x^2 - 15x - 54$$

$$x = \frac{15 \pm 21}{2} = \begin{cases} 18 \\ -3 \end{cases}$$

$$x_1 = -3; x_2 = 18$$

$$e) 3x + 1 + x^2(x + 1) = x^3 + 2x^2 + 3x$$

$$3x + 1 + x^3 + x^2 = x^3 + 2x^2 + 3x$$

$$0 = x^2 - 1$$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

$$f) x^2 + 2 = 2x^2; 2 = x^2$$

$$x_1 = \sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2}$$

Ecuaciones exponenciales e logarítmicas

15 Resolve as seguintes ecuacións exponenciais:

$$a) 3^x = \sqrt[3]{9}$$

• *Expressa $\sqrt[3]{9}$ como potencia de base 3.*

$$b) 2^x \cdot 2^{x+1} = 8$$

• *Multiplícala o primeiro membro.*

$$c) 5 \cdot 7^{-x} = 35$$

• *Divide os dous membros por 5.*

$$d) (0,5)^x = 16$$

• *0,5 é unha potencia de base 2.*

$$e) \sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$$

$$f) 2^{1/x} = 16$$

$$g) \frac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$$

$$h) \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$$

$$i) 2^x \cdot 5^x = 0,1$$

• *Lembra que $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$.*

- a) $3^x = 3^{2/3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$
- b) $2^{2x+1} = 2^3 \Rightarrow x = 1$
- c) $7^{-x} = 7 \Rightarrow x = -1$
- d) $2^{-x} = 2^4 \Rightarrow x = -4$
- e) $7^{x/2} = 7^{-2} \Rightarrow x = -4$
- f) $2^{1/x} = 2^4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$
- g) $3^{3x-2-x-3} = 3^4 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$
- h) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \Rightarrow x = 3$
- i) $10^x = 10^{-1} \Rightarrow x = -1$

Página 94

16 Resolve, tomando logaritmos, estas ecuaciones:

a) $\frac{1}{e^x} = 27$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$

d) $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

a) $\frac{1}{e^x} = 27 \rightarrow \frac{1}{27} = e^x \rightarrow \ln \frac{1}{27} = \ln e^x$

$$x = \ln \frac{1}{27} = \ln 1 - \ln 27 = 0 - \ln 27 \rightarrow x \approx -3,296$$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73} \rightarrow \ln e^{x-9} = \ln \sqrt{73}$

$$x - 9 = \frac{1}{2} \ln 73 \rightarrow x = 9 + \frac{\ln 73}{2} \rightarrow x \approx 11,145$$

c) $6^x = 81; x \log 6 = \log 81$

$$x = \frac{\log 81}{\log 6} \approx 2,453$$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1; \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3; x \log \frac{2}{3} = \log 3$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3} \approx -2,710$$

17 Resolve as seguintes equações mediante un cambio de variable:

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

a) $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

$$z = 2^x \rightarrow z + \frac{2}{z} = 3; \quad z^2 + 2 = 3z$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0; \quad z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$2^x = 2 \rightarrow x_1 = 1; \quad 2^x = 1 \rightarrow x_2 = 0$$

b) $2 \cdot 2^x + \frac{2^x}{2} = \frac{5}{2}; \quad 4 \cdot 2^x + 2^x = 5; \quad 2^x = 1$

$$x = 0$$

c) $2^3 + 3^x + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

$$8 \cdot (2^x)^3 + \frac{(2^x)^3}{2} = \frac{17}{16} \rightarrow 2^x = z \rightarrow 128z^3 + 8z^3 = 17$$

$$(128 + 8)(z)^3 = 17; \quad (z)^3 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \rightarrow z = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \rightarrow 2^x = \frac{1}{2}$$

$$x = -1$$

d) $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$$2^x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$

e) $(3^x)^2 - 3^x - 6 = 0; \quad 3^x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -2 \text{ (no vale)} \end{matrix}$

$$x = 1$$

f) $7 \cdot (7^x)^2 - 50 \cdot 7^x + 7 = 0; \quad 7^x = \frac{50 \pm 48}{14} = \begin{matrix} 7 \\ 1/7 \end{matrix}$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

18 Resolva as equações:

a) $\log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$

b) $\ln(x - 3) + \ln(x + 1) = \ln 3 + \ln(x - 1)$

c) $2\ln(x - 3) = \ln x - \ln 4$

d) $\log(x + 3) - \log(x - 6) = 1$

a) $\log \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \log \frac{13}{12}$

$$12x^2 + 12 = 13x^2 - 13; \quad 25 = x^2$$

$$x_1 = -5; \quad x_2 = 5$$

b) $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(3x - 3)$

$$x^2 - 2x - 3 = 3x - 3; \quad x^2 - 5x = 0$$

$$x = 5 \quad (x = 0 \text{ no vale})$$

c) $\ln(x - 3)^2 = \ln \frac{x}{4}$

$$x^2 + 9 - 6x = \frac{x}{4}$$

$$4x^2 + 36 - 24x = x; \quad 4x^2 - 25x + 36 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm 7}{8} = \begin{cases} 4 \\ 9/4 \end{cases} \quad (9/4 \text{ no vale})$$

$$x = 4$$

d) $\log \frac{x + 3}{x - 6} = 1$

$$x + 3 = 10x - 60; \quad 63 = 9x$$

$$x = 7$$

19 Resolva as equações:

a) $\log(x + 9) = 2 + \log x$

b) $\log \sqrt{3x + 5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $2(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$

d) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$

☛ **Haz** $\log x = y$.

e) $\log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x + 3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$

a) $\log \frac{x + 9}{x} = 2$

$$x + 9 = 100x; \quad 9 = 99x; \quad x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

$$x = \frac{1}{11}$$

$$b) \frac{\log(x(3x+5))}{2} = 1; \quad 3x^2 + 5x - 100 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm 35}{6} = \begin{cases} 5 \\ -40/6 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x = 5$$

$$c) \log x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{4} = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} 1; & x_1 = 10 \\ -18/4 = -9/2; & x_2 = 10^{-9/2} \end{cases}$$

$$d) x^2 - 7x + 110 = 100; \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 5$$

$$e) \log \frac{x^2 + 3x + 36}{x + 3} = 1$$

$$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30; \quad x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 6$$

$$f) \ln x + \ln 2x + \ln 4x = 3$$

$$\ln(x \cdot 2x \cdot 4x) = 3$$

$$\ln(8x^3) = 3 \rightarrow 8x^3 = e^3 \rightarrow x^3 = \frac{e^3}{8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{e^3}{8}} = \frac{e}{2} \rightarrow x = \frac{e}{2}$$

Sistemas de ecuaciones

20 Resuelve:

$$a) \begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

• *Suma as dúas ecuacións.*

$$a) x = \frac{5y}{3}$$

$$\frac{5y^2}{3} = 15; y^2 = 9 \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3$$

$$b) \begin{cases} 6y + 6x = 5xy \\ 4 - 4x + 6x = \frac{5x(2-2x)}{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{2-2x}{3} \begin{cases} 6x + 12 = 10x - 10x^2 \\ 10x^2 - 4x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$10x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0$$

No tiene solución.

$$c) 2x^2 - 10x + 12 = 0; x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$$

$$-x^2 + y^2 + 5x - 5y - 2 = 0$$

$$\frac{2y^2 - 10y + 8 = 0}{2y^2 - 10y + 8 = 0}$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 4; x_2 = 3, y_2 = 1; x_3 = 2, y_3 = 4; x_4 = 2, y_4 = 1$$

$$d) x = \frac{4y}{3}$$

$$\frac{7y}{3} \cdot \frac{y}{3} = 7$$

$$y^2 = 9; y = \pm 3$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = -4, y_2 = -3$$

21 Resolve:

$$a) \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y+1 \\ 2x-3y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{x+y+2} = x+1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$a) x = (5 - y)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$$

$$8y = 24; y = 3; x = 4$$

$$x = 4; y = 3$$

$$b) 4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; x = \frac{y^2 + 2y - 3}{4}$$

$$x = \frac{1 + 3y}{2} = \frac{2 + 6y}{4}$$

$$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow x = 8 \\ -1 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 8, y_2 = 5$$

$$c) y = 2x - 6$$

$$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$$

$$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$$

$$0 = x^2 - 33x + 162$$

$$x = \frac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$$x = 6; y = 6 \text{ (} x = 27, y = 48 \text{ no vale)}$$

$$d) y = 2x - 5$$

$$\sqrt{3x - 5} = x - 1$$

$$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow y = 1 \\ 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, y_1 = -1; x_2 = 3, y_2 = 1$$

22 Resolve os seguintes sistemas de equações:

$$a) \begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$$

$$a) y - x = 1$$

$$2^x + 2^y = 12$$

$$y = 1 + x \rightarrow 2^x + 2^{1+x} = 12 \rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \cdot 2^x = 12 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1 + 2 = 3$$

$$x = 2; y = 3$$

$$b) 5^x \cdot 5^y = 1$$

$$5^x : 5^y = 25$$

$$\left. \begin{aligned} 5^{x+y} = 5^0 &\rightarrow x+y=0 \\ 5^{x-y} = 5^2 &\rightarrow x-y=2 \end{aligned} \right\}$$

$$2x = 2 \rightarrow x = 1$$

$$1 + y = 0 \rightarrow y = -1$$

23 **Resolve:**

$$a) \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log(x^2 y) = 2 \\ \log x = 6 + \log y^2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - y = 25 \\ \log y = \log x - 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{cases}$$

$$a) 2 \log x = 2$$

$$x = 10; y = 100$$

$$b) \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \quad \log_2 x + 3 \log_2 y = 5$$

$$2 \log_2 x - \log_2 y = 3 \quad \frac{6 \log_2 x - 3 \log_2 y = 9}{7 \log_2 x = 14}$$

$$x = 4; y = 2$$

$$c) 2 \log x + \log y = 2 \quad 4 \log x + 2 \log y = 4$$

$$\log x - 2 \log y = 6 \quad \frac{\log x - 2 \log y = 6}{5 \log x = 10} \rightarrow \log x = 2$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 100 \\ y &= \frac{1}{100} \end{aligned} \right\}$$

$$d) \log \frac{x}{y} = 1; \frac{x}{y} = 10; x = 10y$$

$$100y^2 - y^2 = 11; 99y^2 = 11; y^2 = \frac{1}{9} \rightarrow y = \pm \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{10}{3}; y = \frac{1}{3}$$

$$\left(y = -\frac{1}{3} \text{ no vale} \right)$$

$$e) \left. \begin{array}{l} x = 25 + y \\ \log \frac{y}{x} = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0,1x \\ 0,9x = 25 \end{array}$$

$$x = \frac{250}{9}; y = \frac{25}{9}$$

$$f) \left. \begin{array}{l} \ln x - \ln y = 2 \\ \ln x + \ln y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando las dos ecuaciones, queda:} \\ 2 \ln x = 6 \rightarrow \ln x = 3 \rightarrow x = e^3 \end{array}$$

Restando a la 2.^a ecuación la 1.^a, queda:

$$2 \ln y = 2 \rightarrow \ln y = 1 \rightarrow y = e$$

Solución: $x = e^3$; $y = e$

Método de Gauss

24 Resuelve polo método de Gauss:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 2.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{array}$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{array} \left. \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

25 Resolva aplicando o método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 1.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3 \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{cases} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{cases} \begin{array}{l} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 6 \cdot 2.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \begin{array}{l} z = \frac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

Página 95
26 Resolva pelo método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{cases} \begin{array}{l} z = \frac{-5}{2} \\ x = \frac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array} \left. \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \frac{-5}{2} \end{array} \right\}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

27 Resolve aplicando o método de Gauss:

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \quad f) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases}$$

➡ Encontrarás sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e sistemas incompatibles.

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 5 \cdot 3.^a \\ 3.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a : 6 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{Las ecuaciones } 2.^a \text{ y } 3.^a \text{ dicen cosas contradicto-} \\ \text{rias.} \\ \text{El sistema es incompatible, no tiene solución.} \end{array}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{cases}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función de z :

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{array} \right\} \rightarrow (5 - 5z) + y = 2 - 3z \rightarrow y = 2z - 3$$

$$\rightarrow x = 5 - 5z$$

Solución: $x = 5 - 5z$, $y = 2z - 3$, $z = z$

$$d) \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 5 \cdot 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{5x - 9}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

Solución: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

$$e) \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

$$f) \left. \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{array} \right\}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en función del parámetro y :

$$\left. \begin{array}{l} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{array} \right\} \rightarrow -2(1 - 3y) + z = 1 - y \rightarrow z = 3 - 7y$$

Solución: $x = 1 - 3y$, $z = 3 - 7y$

Inecuaciones

28 Resuelve estas inecuaciones:

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x-1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x$; $10x > -10$; $x > -1$

$(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2$; $1 > x$

$(-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0$

$(-5, 0)$

d) $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e) $\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \begin{matrix} -2 \\ -4 \end{matrix}$

$(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $\frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{matrix} 5 \\ -3 \end{matrix}$

$[-3, 5]$

29 Resolve os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

• *Resolve cada inequação e busca as soluções comuns. Um dos sistemas non ten solución.*

a) $\left. \begin{matrix} x < 1 \\ x > -4 \end{matrix} \right\} (-4, 1)$

b) $\left. \begin{matrix} x > -\frac{5}{3} \\ x > 4 \end{matrix} \right\} (4, +\infty)$

c) $\left. \begin{matrix} x > 17 \\ x > \frac{19}{5} \end{matrix} \right\} (17, +\infty)$

d) $\left. \begin{matrix} x > \frac{3}{2} \\ x < -\frac{1}{5} \end{matrix} \right\} \text{No tiene solución.}$

30 Resolve:

a) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$

d) $x(x^2 + 3) < 0$

a) $\frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix}$

$[1, 6]$

b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

c) $\left. \begin{matrix} x + 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x > -1 \\ x > 3 \end{matrix} \right\} (3, +\infty)$
 $\left. \begin{matrix} x + 1 < 0 \\ x - 3 < 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x < -1 \\ x < 3 \end{matrix} \right\} (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

d) $(-\infty, 0)$

31 Resolve estas inecuaciones:

$$\text{a) } \frac{2}{x-3} > 0 \quad \text{b) } \frac{3x+5}{x^2+1} \geq 0 \quad \text{c) } \frac{x^2}{x+4} < 0 \quad \text{d) } \frac{x-3}{x+2} < 0$$

$$\text{a) } x - 3 > 0 \rightarrow (3, +\infty)$$

$$\text{b) } 3x + 5 \geq 0; x \geq -\frac{5}{3} \rightarrow \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{c) } x + 4 < 0; x < -4 \rightarrow (-\infty, -4)$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x - 3 > 0 \\ x + 2 < 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x > 3 \\ x < -2 \end{array} \right\} \rightarrow \emptyset$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ x > -2 \end{array} \right\} \rightarrow (-2, 3)$$

PARA RESOLVER
32 Un investidor, que ten 28 000 €, coloca parte do seu capital nun banco ao 8% e o resto noutro banco ao 6%. Se a primeira parte lle produce anualmente 200 € máis ca a segunda, canto colocou en cada banco?

$$x \text{ al } 8\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0,08x$$

$$(28000 - x) \text{ al } 6\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0,06(28000 - x)$$

$$0,08x = 0,06(28000 - x) + 200; 0,08x = 1680 - 0,06x + 200 \rightarrow x = 13428,57 \text{ €}$$

Colocó 13428,57 € al 8% y 14571,43 € al 6%.

33 Dúas billas enchen un depósito de 1 500 litros nunha hora e doce minutos. Manando por separado, a primeira tardaría unha hora máis cá segunda. Canto tardaría en encher o depósito cada billa por separado?

Entre los dos \rightarrow 1500 litros en 1,2 horas

$$\left. \begin{array}{l} 1.^\circ \rightarrow t + 1 \\ 2.^\circ \rightarrow t \end{array} \right\} \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} = \frac{1}{1,2} \text{ (en 1 hora)}$$

$$\frac{1,2(t+t+1)}{1,2t(t+1)} = \frac{t(t+1)}{1,2t(t+1)}$$

$$2,4t + 1,2 = t^2 + t$$

$$t^2 - 1,4t - 1,2 = 0$$

$$t = \frac{1,4 \pm 2,6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -0,6 \end{cases} \text{ ¡Imposible!}$$

El primero tardaría 3 horas, y el segundo, 2 horas.

- 34** Un granxeiro espera obter 36 € pola venda de ovos. No camiño ao mercado rómpenlle catro ducias. Para obter o mesmo beneficio, aumenta en 0,45 € o prezo da ducia.

Cantas ducias tiña ao principio?

• *Iguala o custo das ducias que rompen ao que aumenta o custo das que quedan.*

$$\text{Tenía } x \text{ docenas} \rightarrow \frac{36}{x} \text{ €/docena}$$

$$\text{Le quedan } x - 4 \text{ docenas} \rightarrow \left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) \text{ €/docena}$$

$$\left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) (x - 4) = 36$$

$$(36 + 0,45x)(x - 4) = 36x$$

$$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x$$

$$0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$$

$$x = 20 \text{ (} x = -16 \text{ no vale)} \Rightarrow \text{Tenía 20 docenas.}$$

- 35** Un tendeiro inviste 125 € na compra dunha partida de mazás. Desbota 20 kg por defectuosas e vende o resto, aumentando 0,40 € cada quilo sobre o prezo de compra, por 147 €.

Cantos quilogramos comprou?

• *Iguala o custo das que se desbotan máis as ganancias ao aumento de custo das que quedan.*

$$\text{Compró } x \text{ kg} \rightarrow \frac{125}{x} \text{ €/kg}$$

$$\text{Vende } (x - 20) \text{ kg} \rightarrow \left(\frac{125}{x} + 0,40 \right) \text{ €/kg}$$

$$\left(\frac{125}{x} + 0,40 \right) (x - 20) = 147$$

$$(125 + 0,40x)(x - 20) = 147x$$

$$125x - 2500 + 0,40x^2 - 8x = 147x$$

$$0,40x^2 - 30x - 2500 = 0$$

$$x = 125 \text{ (} x = -50 \text{ no vale)}$$

Compró 125 kg.

- 36** Varios amigos toman un refresco nunha terraza e deben pagar 6 € polo total das consumicións. Como dous non teñen diñeiro, os demais convidanos e teñen que aumentar o que lles toca en 0,80 € cada un. Cantos amigos son?

Número de amigos $\rightarrow x \rightarrow \frac{6}{x}$ €/consumición

$$(x - 2) \left(\frac{6}{x} + 0,80 \right) = 6$$

$$(x - 2) (6 + 0,80x) = 6x$$

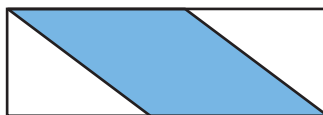
$$6x + 0,80x^2 - 12 - 1,6x = 6x$$

$$0,80x^2 - 1,6x - 12 = 0$$

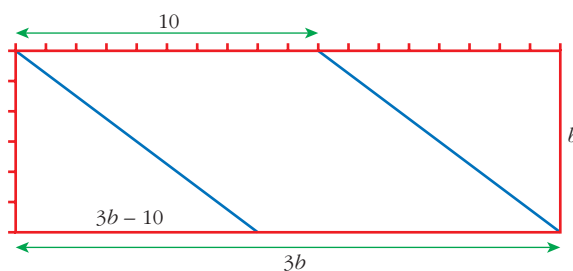
$$x = 5 \quad (x = -3 \text{ no vale})$$

Son 5 amigos.

- 37** O cuadrilátero central é un rombo de 40 m de perímetro. Calcula as dimensións do rectángulo se sabes que a base é o triplo da altura.



$$4x = 40; \quad x = 10 \text{ m}$$



$$b^2 + (3b - 10)^2 = 10^2 \rightarrow b^2 + 9b^2 + 100 - 60b = 100 \rightarrow 10b^2 - 60b = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow b(10b - 60) = 0 \rightarrow b = 0, \quad b = 6$$

Base: 18 m; Altura: 6 m

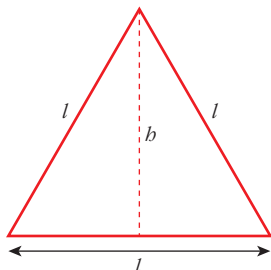
- 38** O número de visitantes a certa exposición durante o mes de febreiro incrementouse nun 12% respecto ao mes de xaneiro. Pero en marzo sufriu un descenso do 12% respecto a febreiro. Se o número de visitantes de xaneiro superou en 36 persoas ao de marzo, cantas persoas viron a exposición en xaneiro?

$$\begin{array}{ccccc} \text{Enero} & \xrightarrow{+12\%} & \text{Febreiro} & \xrightarrow{-12\%} & \text{Marzo} \\ x & & 1,12x & & 0,88 \cdot 1,12x = 0,9856x \end{array}$$

$$x = 0,9856x + 36 \Rightarrow x = 2\,500 \text{ persoas}$$

Páxina 96

- 39** A superficie dun triángulo equilátero é de 50 m^2 . Calcula o lado.



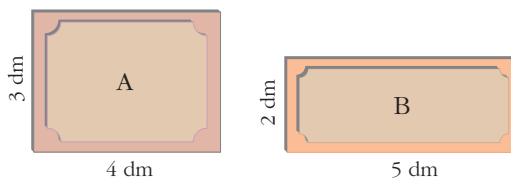
$$b^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2$$

$$b^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}; \quad b = \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4} = 50$$

$$l^2 = \frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow l = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{\sqrt{3}}} = 10,75 \text{ m}$$

- 40** Para cubrir o chan dun cuarto, un colocador dispón de dous tipos de baldosas:



Se se elixe o tipo A, necesitaríanse 40 baldosas menos ca se se elixise o tipo B. Cal é a superficie do cuarto?

$$\left. \begin{array}{l} \text{n.º baldosas A} \rightarrow x \\ \text{n.º baldosas B} \rightarrow x + 40 \end{array} \right\} \text{Superficie: } \begin{array}{l} 12x = 10(x + 40) \\ 12x = 10x + 400 \\ 2x = 400 \\ x = 200 \text{ baldosas} \end{array}$$

$$200 \cdot 12 = 2400 \text{ dm}^2 = 24 \text{ m}^2$$

- 41** Nun número de dúas cifras, as decenas son o triplo das unidades. Se se inverte a orde das cifras, obtense outro número 54 unidades menor. Calcula o número inicial.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3x}{D} \cdot \frac{x}{U} \rightarrow 30x + x = 31x \\ \frac{x}{D} \cdot \frac{3x}{U} \rightarrow 10x + 3x = 13x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 31x = 13x + 54 \\ 18x = 54 \\ x = 3 \end{array}$$

El número es el 93.

42 Pregunteille ao meu pai: *Canto vale o chocolate con churros na cafetería da esquina?*

—Non sei, nunca me fixei.

—Pero home..., acabámolo de tomar mamá, a avoa, as miñas dúas irmás, ti e mais eu. *Canto pagaches?*

—Algo máis de 14 euros.

—O domingo pasado, ademais de nós os seis, estaban dous amigos meus. *Canto pagaches?*

—Era pouco menos de 20 euros, pois puxen un billete e deixei a volta.

Canto vale o chocolate con churros na cafetería da esquina?

$$6x > 14 \rightarrow x > 2,3\bar{3}$$

$$8x < 20 \rightarrow x < 2,5$$

Entre 2,34 y 2,50 €.

43 Resolve:

a) $3x^4 - 75x^2 = 0$

b) $\sqrt{4x + 5} = x + 2$

c) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x - 5} = 2$

d) $\frac{1}{x + 2} + \frac{x}{5(x + 3)} = \frac{3}{10}$

e) $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

f) $(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3) = 0$

g) $(\sqrt{x} - x + 2)x = 0$

a) $3x^2(x^2 - 25) = 0$

$$x_1 = 0; x_2 = 5; x_3 = -5$$

b) $4x + 5 = x^2 + 4 + 4x; 1 = x^2 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$$x_1 = 1; x_2 = -1$$

c) $2x - 3 = 4 + x - 5 + 4\sqrt{x - 5}$

$$x - 2 = 4\sqrt{x - 5}$$

$$x^2 + 4 - 4x = 16(x - 5)$$

$$x^2 + 4 - 4x = 16x - 80$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm 8}{2} = \begin{cases} 14 \\ 6 \end{cases}$$

$$x_1 = 6; x_2 = 14$$

$$d) \frac{10(x+3) + 2x(x+2)}{10(x+2)(x+3)} = \frac{3(x^2 + 5x + 6)}{10(x+2)(x+3)}$$

$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$x = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; x_2 = -4$$

$$e) x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = \frac{1}{2}$$

$$f) x_1 = 3; x_2 = -3$$

$$g) x = 0$$

$$\sqrt{x} = x - 2$$

$$x_1 = 0; x_2 = 4 \text{ (} x = 1 \text{ no vale)}$$

44 Resolve:

$$a) \left| \frac{x-3}{2} \right| = 4$$

$$b) |x^2 - 1| = 3$$

$$a) \left. \begin{array}{l} \frac{x-3}{2} = 4 \Rightarrow x-3 = 8 \Rightarrow x = 11 \\ \frac{x-3}{2} = -4 \Rightarrow x-3 = -8 \Rightarrow x = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = 11 \\ x_2 = -5 \end{array}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - 1 = -3 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ (no vale)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array}$$

45 Resolve estas ecuaciones de grau superior a dous nas que podes despexar a incógnita:

$$a) \frac{3x}{5} + \frac{25}{9x^2} = 0$$

$$b) \frac{x}{8} - \frac{2}{81x^3} = 0$$

$$c) \frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$d) \frac{2}{5x} - \frac{5x^3}{2} = 0$$

$$e) \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^3+x^2} = 0$$

$$a) \frac{27x^3 + 125}{45x^2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{-5}{3} \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

$$b) \frac{81x^4 - 16}{8 \cdot 81x^3} = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}; x_2 = \frac{-2}{3}$$

$$c) x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

$$d) 4 - 25x^4 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{4}{25}$$

$$x = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{25}} = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}; x_2 = \frac{-\sqrt{10}}{5}$$

$$e) (x+1)(x+1) - x \cdot x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - x^3 - 1 = 0$$

$$-x^3 + x^2 + 2x = 0$$

$$-x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$$

46 **Resolve:**

$$a) \begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = \sqrt{2y} \\ x+y = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{4y+2x} = \sqrt{3y+x} - 1 \\ y+x = -5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x+3)(y-5) = 0 \\ (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$a) x = 8 - y$$

$$\sqrt{8-y} - \sqrt{8-2y} = \sqrt{2y} \rightarrow \sqrt{8-y} - \sqrt{2y} = \sqrt{8-2y} \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 + 2y - 2\sqrt{16y} = 8 - 2y \rightarrow 2y - 8\sqrt{y} = -2y \rightarrow$$

$$\rightarrow 4y = 8\sqrt{y} \rightarrow 16y^2 = 64y \rightarrow 16y^2 - 64y = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16y(y-4) = 0 \begin{cases} y=0 \rightarrow x=8 \\ y=4 \rightarrow x=4 \end{cases}$$

$$x_1 = 8, y_1 = 0; x_2 = 4, y_2 = 4$$

$$b) x = -5 - y$$

$$\sqrt{4y-10-2y} = \sqrt{3y-5-y} - 1$$

$$\sqrt{2y-10} = \sqrt{2y-5} - 1$$

$$2y-10 = 2y-5 + 1 - 2\sqrt{2y-5}$$

$$2\sqrt{2y-5} = 6$$

$$\sqrt{2y-5} = 3$$

$$2y-5 = 9$$

$$x = -12; y = 7$$

$$c) x_1 = -3, y_1 = 1; x_2 = 2, y_2 = 5$$

47 Resolve as seguintes ecuacións:

a) $|x - 5| = 3x - 1$

b) $|x + 2| = |x - 6|$

c) $|x^2 - 3x + 1| = 1$

d) $|x^2 - x| = |1 - x^2|$

a) $x - 5 = 3x - 1 \Rightarrow -2x = 4; x = -2$ (no vale)

$$5 - x = 3x - 1 \Rightarrow 6 = 4x; x = \frac{3}{2}$$

b) $x + 2 = x - 6 \Rightarrow$ Imposible

$$x + 2 = 6 - x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

c) $x^2 - 3x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$

$$x^2 - 3x + 1 = -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3$$

d) $x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$$x^2 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{-1}{2}; x_2 = 1$$

48 Resolve por tenteo:

a) $2^x = x^3$

b) $\ln x = -x$

a) $2^x = x^3; x \approx 1,37$

b) $x \approx 0,57$

49 Resolve por tenteo as seguintes ecuacións, se sabes que teñen unha solución no intervalo indicado:

a) $x^3 - x - 2 = 0$ en $[1, 2]$

b) $3x^3 + x^2 - 3 = 0$ en $[0, 1]$

a) $x \approx 1,52$

b) $x \approx 0,90$

- 50** Queremos repartir, mediante un sistema de ecuacións, 330 euros entre tres persoas de forma que a primeira reciba 20 euros máis cá segunda e a terceira a metade do que recibiron entre as outras dúas.

Como o facemos?

Llamamos x a los euros que recibe la primera; y a los que recibe la segunda, y z a los que recibe la tercera. Así, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x = y + 20 \\ z = \frac{x + y}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y - 2z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 1.^a \end{array} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 3x + 3y = 660 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3 \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ x + y = 220 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 330 \\ x - y = 20 \\ 2x = 240 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 120 \\ y = x - 20 = 100 \\ z = 330 - x - y = 110 \end{array} \right\}$$

Solución: $x = 120$ € recibe la 1.^a; $y = 100$ € recibe la 2.^a; $z = 110$ € recibe la 3.^a.

- 51** A suma das tres cifras dun número é igual a 7. A cifra das decenas é unha unidade maior cá suma das outras dúas.

Se invertemos a orde das cifras, o número aumenta en 99 unidades. Cal é ese número?

Llamamos x a la cifra de las centenas, y a la de las decenas, y z a la de las unidades. Así, el número es:

$$x \ y \ z \rightarrow 100x + 10y + z$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ y = x + z + 1 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z + 99 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x - y + z = -1 \\ 99x - 99z = -99 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x - y + z = -1 \\ x - z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x + 2z = 6 \\ x - z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x + z = 3 \\ x - z = -1 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ x + z = 3 \\ 2x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 3 - x = 2 \\ y = 7 - x - z = 7 - 1 - 2 = 4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 2 \end{array} \right\}$$

Solución: El número es el 142.

CUESTIÓNS TEÓRICAS

- 52** Que valores cres que ten que tomar o parámetro k para que $x^2 - 6x + k = 0$ non teña solucións reais?

$$36 - 4k < 0; \quad 36 < 4k; \quad 9 < k; \quad k > 9$$

- 53** Determina m para que ao dividir o polinomio

$$2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + m$$

entre $x + 4$, o resto sexa igual a 12.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 9 & 2 & -6 & m \\ -4 & & -8 & -4 & 8 & -8 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & 2 & \underline{m-8} \end{array}$$

$$m - 8 = 12 \Rightarrow m = 20$$

- 54** Escribe un polinomio de grao 4 que só teña por raíces 0 e 1.

Por exemplo: $P(x) = x^3(x - 1)$; $Q(x) = x^2(x - 1)$

- 55** Xustifica por que este sistema de ecuacións non pode ter solución:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

La primera y la tercera ecuación son contradictorias.

- 56** Inventa ecuacións que teñan por solucións os valores:

a) 3, -3, $\sqrt{7}$ e $-\sqrt{7}$

b) 5; 0,3 e -2

c) 0, $\frac{1}{2}$ e 0,7

d) 0, 1, -1 e $\frac{1}{3}$

a) $(x - 3)(x + 3)(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = (x^2 - 9)(x^2 - 7) = x^4 - 16x^2 + 63$

b) $(x - 5)(x - 0,3)(x + 2) = x^3 - 3,3x^2 - 9,1x + 3$

c) $x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 0,7) = x(x - 0,5)(x - 0,7) = x^3 - 1,2x^2 + 0,35x$

d) $x(x - 1)(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x$

PARA AFONDAR

57 Resolve estas ecuacións de segundo grao nas que a incógnita é x :

a) $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$

• Ao aplicar a fórmula xeral, verás que o discriminante é un cadrado perfecto:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

b) $(x - a)^2 - 2x(x + a) - 4a^2 = 0$

c) $ax^2 + bx + b - a = 0$

d) $(a + b)x^2 + bx - a = 0$

$$a) x = \frac{a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4ab}}{2ab} = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab}}{2ab} =$$

$$= \frac{a + b \pm (a - b)}{2ab} = \begin{cases} \frac{a + b + a - b}{2ab} = \frac{2a}{2ab} = \frac{1}{b} \\ \frac{a + b - a + b}{2ab} = \frac{2b}{2ab} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{a}; \quad x_2 = \frac{1}{b}$$

b) $x^2 + a^2 - 2ax - 2x^2 - 2ax - 4a^2 = 0$

$$x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$$

$$x = \frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{2} = \frac{-4a \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{-4a \pm 2a}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-4a + 2a}{2} = \frac{-2a}{2} = -a \\ \frac{-4a - 2a}{2} = \frac{-6a}{2} = -3a \end{cases}$$

$$x_1 = -a; \quad x_2 = -3a$$

$$c) x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(b - a)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2}}{2a} =$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{(2a - b)^2}}{2a} = \begin{cases} \frac{-b + 2a - b}{2a} = \frac{2a - 2b}{2a} = \frac{a - b}{a} \\ \frac{-b - 2a + b}{2a} = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{a - b}{a}$$

$$d) x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(a+b)}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab}}{2(a+b)} = \frac{-b \pm (2a+b)}{2(a+b)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-b + 2a + b}{2(a+b)} = \frac{a}{a+b} \\ \frac{-b - 2a - b}{2(a+b)} = \frac{-(2a+2b)}{2(a+b)} = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{a}{a+b}$$

58 Resolve as seguintes inecuaciones:

a) $x^4 - 4x^2 < 0$

b) $x^3 - x^2 - 6x < 0$

c) $\frac{4-x^2}{(x-3)^2} > 0$

d) $\frac{-2}{(x-1)^3} < 0$

a) $x^2(x^2 - 4) < 0 \Rightarrow x^2 - 4 < 0$

b) $x(x^2 - x - 6) < 0$

$x \neq 0$

$x(x-3)(x+2) < 0$

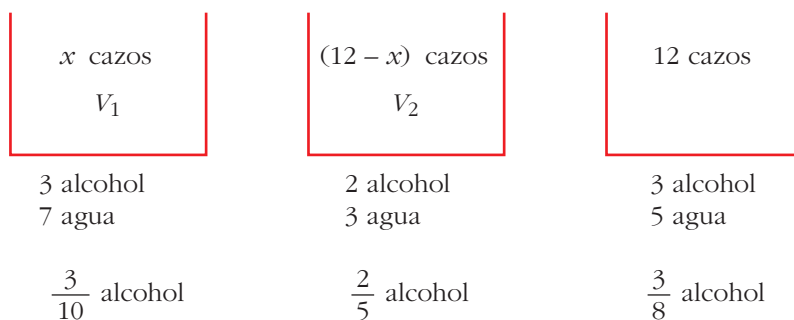
$(-2, 0) \cup (0, 2)$

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

c) $\left. \begin{array}{l} x \neq 3 \\ 4 - x^2 > 0 \end{array} \right\} (-2, 2)$

d) $x \neq 1; (1, +\infty)$

59 Unha vasilla contén unha mestura de alcohol e auga nunha proporción de 3 a 7. Noutra vasilla a proporción é de 2 a 3. Cantos cazos temos que sacar de cada vasilla para obter 12 cazos dunha mestura na que a proporción alcohol-auga sexa de 3 a 5?



La proporción de alcohol es:

$$\frac{3}{10}x + (12-x) \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot 12$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{24-2x}{5} = \frac{9}{2}; \quad 3x + 48 - 4x = 45; \quad x = 3$$

Solución: 3 cazos de la primera y 9 de la segunda.

AUTOAVALIAÇÃO

1. Resolva e factoriza previamente.

$$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$$

$$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$$

-1	3	1	-9	-9	-2
	3	-2	-7	-2	0
2	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x+1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x-2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2. Opera e simplifica o resultado.

$$\left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}\right) : \frac{3x}{x-1} &= \frac{x^2 - x(x-1)}{x^2-1} : \frac{3x}{x-1} = \\ &= \frac{(x^2 - x^2 + x)(x-1)}{3x(x^2-1)} : \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)3x} = \frac{1}{3(x+1)} \end{aligned}$$

3. Resolva as seguintes equações:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

b) $\sqrt{8+2x} - x = x + 6$

c) $\frac{3x}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} - \frac{4}{3}$

d) $3^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln(x+1)$

g) $|3x+1| = |x-3|$

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

$$y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} = \begin{matrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{y} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = -1$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6 \rightarrow \sqrt{8 + 2x} = 2x + 6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$(\sqrt{8 + 2x})^2 = (2x + 6)^2 \rightarrow 8 + 2x = 4x^2 + 36 + 24x \rightarrow 4x^2 + 22x + 28 = 0 \rightarrow 2x^2 + 11x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{-11 \pm 3}{4} = \begin{matrix} -2 \\ -\frac{7}{2} \end{matrix}$$

Comprobada sobre la ecuación inicial, el resultado $-\frac{7}{2}$ resulta ser no válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = -2$.

c) $\frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{x}{x + 2} - \frac{4}{3} \rightarrow \frac{9x}{3(x^2 - 4)} = \frac{3x(x - 2) - 4(x^2 - 4)}{3(x^2 - 4)} \rightarrow$

$$\rightarrow 9x = 3x^2 - 6x - 4x^2 + 16 \rightarrow x^2 + 15x - 16 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} = \frac{-15 \pm 17}{4} = \begin{matrix} 1 \\ -16 \end{matrix}$$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = -16$

d) $3^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 3^{x-1} = 3^{-1/2} \rightarrow x - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \rightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \rightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$y = 4 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$$

$$y = 2 \rightarrow 2^x = 2 \rightarrow 2^x = 2^1 \rightarrow x = 1$$

Soluciones: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \ln x + \ln 4 &= 2 \ln (x + 1) \rightarrow \ln 4x = \ln (x + 1)^2 \rightarrow 4x = (x + 1)^2 \rightarrow \\
 &\rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1
 \end{aligned}$$

Solución: $x = 1$

$$\text{g) } |3x + 1| = |x - 3| \begin{cases} 3x + 1 = x - 3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \\ 3x + 1 = -(x - 3) \rightarrow 4x = 2 \rightarrow x = 1/2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{2}$

4. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array} \right.$$

Hacemos el cambio $3^x = z$:

$$z^2 - 6z + 9 = 0 \rightarrow z = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$$

$$3^x = 3 \rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \rightarrow y = 2$$

Solución: $x = 1$; $y = 2$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 7y + 7z = 7 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 14z = -14 \end{array} \right.$$

$$14z = -14 \rightarrow z = -1$$

$$-y + z = -3 \rightarrow -y - 1 = -3 \rightarrow y = 2$$

$$x + 2y + 2z = 3 \rightarrow x + 4 - 2 = 3 \rightarrow x = 1$$

Solución: $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

5. Resolve:

$$\text{a) } x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1)$$

$$\text{b) } \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$$

$$\text{a) } x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1) \rightarrow x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \rightarrow$$

$$\rightarrow -4x - 4 < 0 \rightarrow 4x > -4 \rightarrow x > -1$$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

$$b) \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de serlo.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2, \quad (x + 1)^2 \geq 0 \quad \text{para cualquier valor de } x.$$

Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador ha de ser cero.

Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$$x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$$

$$\text{Solución: } x \in (-3, +\infty)$$

6. A suma das tres cifras dun número é igual a 7. A cifra das decenas é unha unidade maior cá suma das outras dúas.

Se invertemos a orde das cifras, o número aumenta en 99 unidades. Cal é ese número?

Supongamos que el número es xyz .

$$xyz = z + 10y + 100x$$

$$zyx = x + 10y + 100z$$

Con los datos que tenemos, el sistema que se plantea es:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ y = x + z + 1 \\ x + 10y + 100z = 99 + z + 10y + 100x \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ -x + y - z = 1 \\ -99x + 99z = 99 \end{array} \right\} \xrightarrow{1.^a + 2.^a} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2y = 8 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 3 \\ -x + z = 1 \end{array} \right\} 2z = 4 \rightarrow \boxed{z = 2}$$

$$-x + z = 1 \rightarrow -x + 2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

El número buscado es el 142.