2 SUCESIÓNS

Páxina 51

REFLEXIONA E RESOLVE

Cantas parellas de coellos?

Cantas parellas de coellos se producirán nun ano, comezando cunha parella única, se cada mes calquera parella enxendra outra parella, que se reproduce pola súa vez desde o segundo mes?

Razonando del modo que se propone, llegamos a que el número de parejas, mes a mes, es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Así, el número total de parejas al final del año es de 144 (la que había al principio y otras 143 nuevas).

A sucesión de Fibonacci e o número Φ

Se dividimos cada dous termos consecutivos da sucesión de Fibonacci, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \end{array}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{13}{8} \quad \frac{21}{13}$$

$$1 \quad 2 \quad 1{,}5 \quad 1{,}66 \quad 1{,}6 \quad 1{,}625 \quad 1{,}615$$

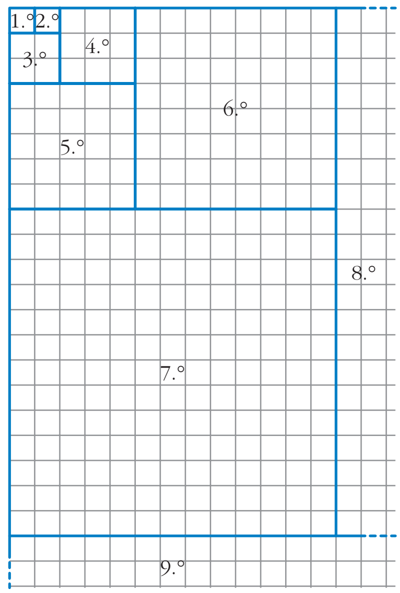
Comproba, calculando novos cocientes, que o número ao que se aproximan é o número áureo.

$$\frac{55}{34} = 1{,}61764\ldots; \quad \frac{89}{55} = 1{,}61818\ldots; \quad \frac{144}{89} = 1{,}61797\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$

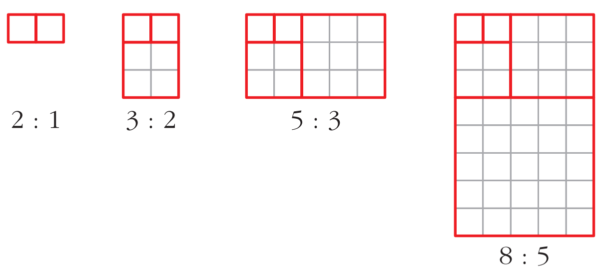
Unha representación gráfica

Observa esta composición feita con cadrados:



O lado dos cadrados primeiro e segundo é 1. A partir do terceiro, o lado de cada un dos seguintes cadrados que se van formando é igual á suma dos lados dos dous que o preceden. Cal é o lado do 8.°? E o do 9.°?

Observa tamén os rectángulos que se forman sucesivamente:



Os cocientes entre as súas dimensións forman a sucesión que estudamos na epígrafe anterior. Aproxímanse, polo tanto, ao número Φ. Isto quere dicir que estes rectángulos se parecen, cada vez máis, a rectángulos áureos.

Compróbao para os catro seguintes rectángulos:

13 : 8 21 : 13 34 : 21 55 : 34

El lado del 8.° cuadrado es 21 y el lado del 9.° cuadrado es 34.

$$\frac{13}{8} = 1,625; \ \frac{21}{13} = 1,615; \ \frac{34}{21} = 1,619\ldots; \ \frac{55}{34} = 1,617\ldots$$

Se aproximan al número áureo $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$

Páxina 52

1. Di o criterio polo que se forman as sucesións seguintes e engádelle dous termos a cada unha:

a) 3, 8, 13, 18, 23, … **b) 1, 8, 27, 64, 125, …**

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, … **d) 8; 4; 2; 1; 0,5; …**

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, … **f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …**

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, … **h) 20, 13, 6, –1, –8, …**

a) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole 5 al anterior: $a_6 = 28$, $a_7 = 33$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa: $b_6 = 216$, $b_7 = 343$.

c) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por 10 el anterior:

$c_6 = 100\,000$, $c_7 = 1\,000\,000$.

d) Cada término, a partir del segundo, se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ (dividiendo entre 2) el anterior: $d_6 = 0{,}25$, $d_7 = 0{,}125$.

e) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores: $e_7 = 29$, $e_8 = 47$.

f) Cada término, a partir del tercero, se obtiene restando los dos anteriores: $f_7 = 16$, $f_8 = -25$.

g) Cada término es el número del lugar que ocupa, con signo positivo si es impar, y negativo si es par: $g_7 = 7$, $g_8 = -8$.

h) Cada término, a partir del segundo, se obtiene restándole 7 al anterior: $h_6 = -15$, $h_7 = -22$.

Páxina 53

2. Forma unha sucesión recorrente, a_n, con estes datos:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

3. Escribe os catro primeiros termos das sucesións que teñen como termo xeral:

$a_n = 3 + 5(n-1)$ $\quad b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad c_n = (-1)^n\, 2^n$

$d_n = (n-1)(n-2)$ $\quad e_n = n^2 + (-1)^n\, n^2$

$a_1 = 3$, $a_2 = 8$, $a_3 = 13$, $a_4 = 18$ $\qquad b_1 = 3$, $b_2 = \frac{3}{2}$, $b_3 = \frac{3}{4}$, $b_4 = \frac{3}{8}$

$c_1 = -2$, $c_2 = 4$, $c_3 = -8$, $c_4 = 16$ $\qquad d_1 = 0$, $d_2 = 0$, $d_3 = 2$, $d_4 = 6$

$e_1 = 0$, $e_2 = 8$, $e_3 = 0$, $e_4 = 32$

4. **Constrúe unha sucesión cuxa lei de recorrencia sexa $a_n = a_{n-1} + n$.**

Si tomamos, por ejemplo, $a_1 = 1$, entonces quedaría: $a_2 = 1 + 2 = 3$, $a_3 = 3 + 3 = 6$, $a_4 = 6 + 4 = 10$, $a_5 = 10 + 5 = 15$, $a_6 = 15 + 6 = 21$, $a_7 = 21 + 7 = 28$, …

5. **Dá o termo xeral das sucesións seguintes que non sexan recorrentes:**

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 1, 10, 100, 1 000, 10 000, …

d) 8, 4, 2, 1, …

e) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

f) 8, 3, 5, –2, 7, –9, …

g) 1, –2, 3, –4, 5, –6, …

h) 20, 13, 6, –1, –8, …

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5$

b) $b_n = n^3$

c) $c_n = 10^{n-1}$

d) $d_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

e) Es recurrente

f) Es recurrente

g) $g_n = (-1)^{n-1} \cdot n$

h) $h_n = 20 - 7 \cdot (n - 1)$

Páxina 54

1. **Cales das seguintes sucesións son *progresións aritméticas*? En cada unha delas di a súa diferenza e engade dous termos máis:**

a) 3, 7, 11, 15, 19, …

b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

d) 10, 7, 4, 1, –2, …

e) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; 11; …

f) –18; –3,1; 11,8; 26,7; 41,6; …

a) Es una progresión aritmética con $d = 4$; $a_6 = 23$, $a_7 = 27$.

b) No es una progresión aritmética.

c) No es una progresión aritmética.

d) Es una progresión aritmética con $d = -3$; $d_6 = -5$, $d_7 = -8$.

e) Es una progresión aritmética con $d = 1{,}6$; $e_6 = 9{,}4$; $e_7 = 7{,}8$.

f) Es una progresión aritmética con $d = 14{,}9$; $f_6 = 56{,}5$; $f_7 = 71{,}4$.

2. **Na sucesión 1a), determina o termo a_{20} e mais a suma dos 20 primeiros termos.**

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot d = 3 + 19 \cdot 4 = 3 + 76 = 79$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(3 + 79) \cdot 20}{2} = 820$$

3. **Na sucesión 1d), indica o termo d_{40} e mais a suma dos 40 primeiros termos.**

$d_{40} = d_1 + 39 \cdot (-3) = 10 - 117 = -107$

$$S_{40} = \frac{(d_1 + d_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(10 - 107) \cdot 40}{2} = -1\,940$$

4. **Na sucesión 1e), determina o termo e_{100} e mais a suma dos 100 primeiros termos.**

$e_{100} = e_1 + 99 \cdot (-1{,}6) = 17{,}4 - 158{,}4 = -141$

$$S_{100} = \frac{(e_1 + e_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(17{,}4 - 141) \cdot 100}{2} = -6\,180$$

5. **Na sucesión 1f), indica os termos f_8, f_{17} e a suma $f_8 + f_9 + \ldots + f_{16} + f_{17}$.**

$f_8 = f_1 + 7 \cdot 14{,}9 = -18 + 104{,}3 = 86{,}3$

$f_{17} = f_1 + 16 \cdot 14{,}9 = -18 + 238{,}4 = 220{,}4$

En la suma pedida hay 10 sumandos.

$$S = \frac{(f_1 + f_{17}) \cdot 10}{2} = \frac{(86{,}3 + 220{,}4) \cdot 10}{2} = 1\,533{,}5$$

Páxina 55

6. **Cales das seguintes sucesións son *progresións xeométricas*? En cada unha delas di a súa razón e engade dous termos máis:**

a) 1, 3, 9, 27, 81, …

b) 100; 50; 25; 12,5; …

c) 12, 12, 12, 12, 12, …

d) 5, –5, 5, –5, 5, –5, …

e) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …

a) Es una progresión geométrica con $r = 3$; $a_6 = 243$, $a_7 = 729$.

b) Es una progresión geométrica con $r = \frac{1}{2}$; $b_5 = 6{,}25$, $b_6 = 3{,}125$.

c) Es una progresión geométrica con $r = 1$; $c_6 = 12$, $c_7 = 12$.

d) Es una progresión geométrica con $r = -1$; $d_7 = 5$, $d_8 = -5$.

e) Es una progresión geométrica con $r = -\frac{1}{3}$; $e_6 = -\frac{10}{27}$, $e_7 = \frac{10}{81}$.

7. **Calcula a suma dos 10 primeiros termos de cada unha das progresións xeométricas do exercicio anterior.**

a) $a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot 3^9 = 19\,683$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$$

b) $b_{10} = b_1 \cdot r^9 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{100}{512} = \frac{25}{128}$

$$S_{10} = \frac{b_{10} \cdot r - b_1}{r - 1} = \frac{\frac{25}{128} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1} \approx 199{,}805$$

c) $c_{10} = 12$; $S_{10} = 12 \cdot 10 = 120$

d) $d_{10} = -5$; $S_{10} = 0$

e) $e_{10} = e_1 \cdot r^9 = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{-90}{19\,683} = \frac{-10}{2\,187}$

$$S_{10} = \frac{e_{10} \cdot r - e_1}{r - 1} = \frac{\frac{10}{6\,561} - 90}{-\frac{1}{3} - 1} \approx 67{,}499$$

8. **En cales das progresións xeométricas do exercicio anterior podes calcular a suma dos seus infinitos termos? Indícaa.**

Podemos calcular la suma de sus infinitos términos en las progresiones geométricas con $|r| < 1$:

b) $S_\infty = \frac{b_1}{1 - r} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} = 200$

e) $S_\infty = \frac{e_1}{1 - r} = \frac{90}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{90}{\frac{4}{3}} = 67{,}5$

Páxina 56

9. **Calcula: $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$**

$$\frac{30 \cdot (30 + 1) \cdot (60 + 1)}{6} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$$

10. **Calcula: $50^2 + 51^2 + \ldots + 60^2$**

$$(1^2 + \ldots + 60^2) - (1^2 + \ldots + 49^2) = \frac{60 \cdot 61 \cdot 121}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} =$$

$$= 73\,810 - 40\,425 = 33\,385$$

11. **Calcula: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3$**

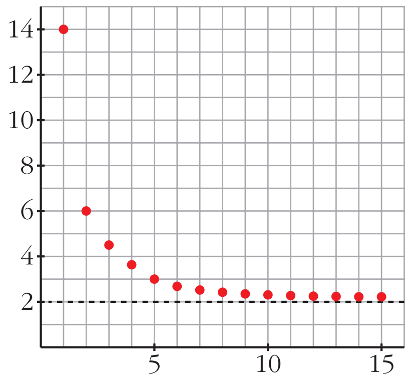
$$\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$$

12. **Calcula: $2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$**

$$\begin{aligned} 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3 &= (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \dots + (2 \cdot 10)^3 = \\ &= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \dots + 2^3 \cdot 10^3 = \\ &= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) = \\ &= 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3\,025 = 24\,200 \end{aligned}$$

Páxina 57

1. **Representa a sucesión $a_n = \dfrac{4n + 10}{2n - 1}$ e asígnalle un valor ao seu límite.**



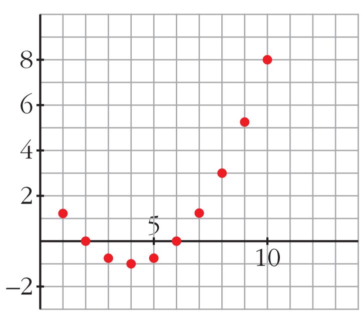
$a_1 = 14$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4{,}4$; $a_4 \approx 3{,}71$;

$a_5 \approx 3{,}33$, …, $a_{10} \approx 2{,}63$,…;

$a_{100} \approx 2{,}06$; …; $a_{1\,000} \approx 2{,}006$,…

$lím\ a_n = 2$

2. **Representa a sucesión $b_n = \dfrac{n^2}{4} - 2n + 3$ e asígnalle un valor ao seu límite.**



$b_1 = 1{,}25$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0{,}75$;

$b_4 = -1$; $b_5 = -0{,}75$; $b_6 = 0$;

$b_7 = 1{,}25$; $b_8 = 3$; $b_9 = 5{,}25$; $b_{10} = 8$,…,

$b_{100} = 2\,303$,…

$lím\ b_n = +\infty$

Páxina 59

3. Estuda o comportamento destas sucesións para termos moi avanzados e indica o seu límite:

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$

c) $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{100} \approx 32{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83, \dots$ $\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987, \dots$ $\lim b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 10^3, \dots$ $\lim c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999, \dots$ $\lim d_n = 5$

4. Di, razoadamente, cales das seguintes sucesións teñen límite:

a) $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$

c) $c_n = (-1)^n n$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002, \dots$ $\lim a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962, \dots$

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3, \dots$ $c_{1\,000} = 1\,000$, $c_{1\,001} = -1\,001, \dots$

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. La sucesión no tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5; \dots$; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196, \dots$ $\lim d_n = 0$.

Páxina 61

1. Obtén os oito primeiros valores de a_n (termos da sucesión) e de S_n (sumas parciais) en cada unha das progresións seguintes. Calcula en cada unha o $\lim S_n$:

a) 125, 50, 20, … **b) 125, –50, 20, …** **c) 17, –17, 17, …**

d) 17, 17, 17, … **e) 10; 12; 14,4; …** **f) 10; –12; 14,4; …**

a) $a_1 = 125$, $a_2 = 50$, $a_3 = 20$, $a_4 = 8$, $a_5 = \dfrac{16}{5} = 3{,}2$; $a_6 = \dfrac{32}{25} = 1{,}28$; $a_7 = \dfrac{64}{125} = 0{,}512$;

$a_8 = \dfrac{128}{625} = 0{,}2048$.

$S_1 = 125;\ S_2 = 175;\ S_3 = 195;\ S_4 = 203;\ S_5 = 206{,}2;\ S_6 = 207{,}48;\ S_7 = 207{,}992;$

$S_8 = 208{,}1968.$

Como $r = \dfrac{2}{5} = 0{,}4 < 1;\ \text{lím } S_n = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{125}{1 - \dfrac{2}{5}} = \dfrac{625}{3} = 208{,}\widehat{3}$

b) $b_1 = 125;\ b_2 = -50;\ b_3 = 20;\ b_4 = -8;\ b_5 = 3{,}2;\ b_6 = -1{,}28;\ b_7 = 0{,}512;\ b_8 = -0{,}2048.$

$S_1 = 125;\ S_2 = 75;\ S_3 = 95;\ S_4 = 87;\ S_5 = 90{,}2;\ S_6 = 88{,}92;\ S_7 = 89{,}432;\ S_8 = 89{,}2272.$

Como $r = -\dfrac{2}{5} = -0{,}4 < 1;\ \text{lím } S_n = \dfrac{b_1}{1 - r} = \dfrac{125}{1 + \dfrac{2}{5}} = \dfrac{625}{7} \approx 89{,}286$

c) $c_1 = 17;\ c_2 = -17;\ c_3 = 17;\ c_4 = -17;\ c_5 = 17;\ c_6 = -17;\ c_7 = 17;\ c_8 = -17.$

$S_1 = 17;\ S_2 = 0;\ S_3 = 17;\ S_4 = 0;\ S_5 = 17;\ S_6 = 0;\ S_7 = 17;\ S_8 = 0.$

S_n no tiene límite.

d) $d_1 = 17;\ d_2 = 17;\ d_3 = 17;\ d_4 = 17;\ d_5 = 17;\ d_6 = 17;\ d_7 = 17;\ d_8 = 17.$

$S_1 = 17;\ S_2 = 34;\ S_3 = 51;\ S_4 = 68;\ S_5 = 85;\ S_6 = 102;\ S_7 = 119;\ S_8 = 136.$

$\text{lím } S_n = +\infty.$

e) $e_1 = 10;\ e_2 = 12;\ e_3 = 14{,}4;\ e_4 = 17{,}28;\ e_5 = 20{,}736;\ e_6 = 24{,}8832;\ e_7 = 29{,}85984;$

$e_8 = 35{,}831808.$

$S_1 = 10;\ S_2 = 22;\ S_3 = 36{,}4;\ S_4 = 53{,}68;\ S_5 = 74{,}416;\ S_6 = 99{,}2992;\ S_7 = 129{,}15904;$

$S_8 = 164{,}99084.$

Como $r = 1{,}2 > 1;\ \text{lím } S_n = +\infty.$

f) $f_1 = 10;\ f_2 = -12;\ f_3 = 14{,}4;\ f_4 = -17{,}28;\ f_5 = 20{,}736;\ f_6 = -24{,}8832;\ f_7 = 29{,}85984;$

$f_8 = -35{,}831808.$

$S_1 = 10;\ S_2 = -2;\ S_3 = 12{,}4;\ S_4 = -4{,}88;\ S_5 = 15{,}856;\ S_6 = -9{,}0272;\ S_7 = 20{,}83264;$

$S_8 = -14{,}999168.$

S_n no tiene límite.

Páxina 64

EXERCICIOS E PROBLEMAS PROPOSTOS

PARA PRACTICAR

Criterio para formar sucesións

1 **Describe o criterio co que se forman estas sucesións e engádelle tres termos a cada unha:**

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

b) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots$

c) $2, 5, 10, 17, 26, \dots$

d) $0, 3, 8, 15, 24, \dots$

e) $1, 3, 6, 10, 15, \dots$

a) Cada término lo obtenemos dividiendo 1 entre el lugar que ocupa el término:

$$a_6 = \frac{1}{6},\ a_7 = \frac{1}{7},\ a_8 = \frac{1}{8}$$

b) Cada término es la raíz cuadrada del lugar que ocupa: $a_6 = \sqrt{6}$, $a_7 = \sqrt{7}$, $a_8 = \sqrt{8}$

c) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa más 1 unidad: $a_6 = 37$, $a_7 = 50$, $a_8 = 65$

d) Cada término es el cuadrado del lugar que ocupa menos 1 unidad: $a_6 = 35$, $a_7 = 48$, $a_8 = 63$

e) Cada término, a partir del segundo, se obtiene sumándole al lugar que ocupa el término anterior: $a_6 = 21$, $a_7 = 28$, $a_8 = 36$

2 **Escribe os cinco primeiros termos das sucesións cuxos termos xerais son estes:**

a) $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$

b) $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$

c) $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$

d) $d_n = 2^{-n}$

e) $e_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

f) $f_n = \frac{(-1)^n\, n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{8}{3}$; $b_4 = \frac{15}{4}$; $b_5 = \frac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \frac{5}{3}$; $c_3 = 2$; $c_4 = \frac{11}{5}$; $c_5 = \frac{7}{3}$

d) $d_1 = \frac{1}{2}$; $d_2 = \frac{1}{4}$; $d_3 = \frac{1}{8}$; $d_4 = \frac{1}{16}$; $d_5 = \frac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

3 **Escribe o termo xeral destas sucesións:**

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

c) $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \ldots$

d) $5,1; 5,01; 5,001; 5,0001; \ldots$

a) $a_n = \dfrac{n}{n-1}$

b) $b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

c) $c_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

d) $d_n = 5 + \dfrac{1}{10^n}$

4 **Constrúe dúas sucesións cuxas leis de recorrencias sexan as seguintes:**

a) $a_1 = 0 \qquad a_2 = 2 \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

b) $a_1 = 1 \qquad a_2 = 2 \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \ldots$

b) $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \ldots$

5 **Busca unha lei de recorrencia para definir as seguintes sucesións:**

a) $4, 7, 3, -4, -7, \ldots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progresións aritméticas

6 **Das seguintes sucesións, di cales son progresións aritméticas e escribe o seu termo xeral:**

a) $1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; \ldots$

b) $5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; \ldots$

c) $1, 2, 4, 7, 11, \ldots$

d) $14, 13, 11, 8, 4, \ldots$

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1,2$ y $d = 1,2$.

$a_n = 1,2 + (n-1) \cdot 1,2 = 1,2n$.

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0,4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0,4) = -0,4n + 5,4$.

c) y d) no son progresiones aritméticas.

7 **Das sucesións seguintes, indica cales son progresións aritméticas:**

a) $\boldsymbol{a_n = 3n}$ **b)** $\boldsymbol{b_n = 5n - 4}$

c) $\boldsymbol{c_n = \frac{1}{n}}$ **d)** $\boldsymbol{d_n = \frac{8 - 3n}{4}}$

e) $\boldsymbol{e_n = 5 + \frac{n}{2}}$ **f)** $\boldsymbol{f_n = n^2 - 1}$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8 - 3n}{4} - \frac{8 - 3(n-1)}{4} = \frac{8 - 3n - 8 + 3n - 3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0, f_2 = 3, f_3 = 8, f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

8 **Calcula os termos $\boldsymbol{a_{10}}$ e $\boldsymbol{a_{100}}$ das seguintes progresións aritméticas:**

a) –4, –2, 0, 2, 4, …

b) 2, –3, –8, –13, –18, …

c) $\boldsymbol{\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots}$

a) $a_{10} = a_1 + 9d = -4 + 9 \cdot 2 = -4 + 18 = 14$

$a_{100} = a_1 + 99d = -4 + 99 \cdot 2 = -4 + 198 = 194$

b) $a_{10} = a_1 + 9d = 2 - 9 \cdot 5 = 2 - 45 = -43$

$a_{100} = a_1 + 99d = 2 - 99 \cdot 5 = 2 - 495 = -493$

c) $a_{10} = a_1 + 9d = \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$$a_{100} = a_1 + 99d = \frac{3}{4} + 99 \cdot \frac{1}{4} = \frac{102}{4} = \frac{51}{2}$$

9 **Calcula a suma dos 25 primeiros termos das seguintes progresións aritméticas:**

a) 3, 6, 9, 12, 15, … **b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …**

c) $\boldsymbol{c_n = 4n - 2}$ **d)** $\boldsymbol{d_n = \frac{1-2n}{2}}$

a) $a_1 = 3$; $a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5$; $b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0,1 = 2,6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2,6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2$; $c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1\,250$$

d) $d_1 = \frac{-1}{2}$; $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312,5$$

Progresións xeométricas

10 **Das seguintes sucesións, cales son progresións xeométricas? Escribe tres termos máis en cada unha e tamén o seu termo xeral.**

a) 32, 16, 8, 4, 2, … **b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …**

c) 1, 4, 9, 16, 25, … **d)** $\boldsymbol{\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots}$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ a_7 = \frac{1}{2},\ a_8 = \frac{1}{4};\ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_6 = 0{,}00001;\ c_7 = 0{,}000001;\ c_8 = 0{,}0000001;\ c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8;\ d_7 = 8\sqrt{2};\ d_8 = 16;\ d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

11 **Calcula a suma dos 25 primeiros termos das seguintes progresións xeométricas e determina a suma dos infinitos termos nos casos que sexa posible:**

a) $a_1 = 32,\ r = \frac{1}{2}$ **b)** $a_1 = 10,\ r = \frac{1}{10}$

c) $a_1 = 2^{-10},\ r = 2$ **d)** $a_1 = -5,\ r = -\frac{1}{4}$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r - 1},\quad S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

a) $$S_{25} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64 \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{32}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$$

b) $$S_{25} = \frac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11{,}1 \approx \frac{100}{9} \qquad S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11{,}1$$

c) $$S_{25} = \frac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2 - 1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\,768$$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $$S_{25} = \frac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4 \qquad S_\infty = \frac{-5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$$

Páxina 65

Suma de potencias

12 **a) Demostra que:**

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

b) Calcula a suma dos cadrados dos 50 primeiros números pares.

c) Calcula a suma dos cadrados de todos os números impares menores que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 =$

$$= 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2) =$

$$= 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 99^2 =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2) =$

$= \dfrac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$

13 **Calcula a suma seguinte:**

$$\mathbf{21^3 + 22^3 + 23^3 + \ldots + 37^3 + 38^3 + 39^3 + 40^3}$$

$21^3 + \ldots + 40^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 20^3 + 21^3 + \ldots + 40^3) - (1^3 + \ldots + 20^3) =$

$$= \frac{40^2 \cdot 41^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 672\,400 - 44\,100 = 628\,300$$

Límite dunha sucesión

14 **Calcula os termos a_{10}, a_{100} e $a_{1\,000}$, en cada sucesión e indica cal é o seu límite:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$

b) $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$

c) $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$

d) $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$\text{lím } a_n = 0$

b) $a_{10} = 2,5$; $a_{100} = 2,05$; $a_{1\,000} = 2,005$

$\text{lím } a_n = 2$

c) $a_{10} = -0,5$; $a_{100} = -0,95$; $a_{1\,000} = -0,995$

$\text{lím } a_n = -1$

d) $a_{10} = -6,7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$\text{lím } a_n = -\infty$

15 **Indica algúns termos moi avanzados das seguintes sucesións e indica cal é o seu límite:**

a) $a_n = 5n - 10$

b) $b_n = 100 - n$

c) $c_n = \dfrac{n-3}{n+1}$

d) $d_n = \dfrac{n}{2n+1}$

a) $a_{10} = 40;\ a_{100} = 490;\ a_{1\,000} = 4\,990$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 90;\ b_{100} = 0;\ b_{1\,000} = -900$

$\text{lím } b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 0{,}63;\ c_{100} \approx 0{,}9603;\ c_{1\,000} \approx 0{,}996$

$\text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} \approx 0{,}476;\ d_{100} \approx 0{,}498;\ d_{1\,000} \approx 0{,}4998$

$\text{lím } d_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

16 **Estuda o comportamento das seguintes sucesións para termos moi avanzados e indica cal é o límite de cada unha delas:**

a) $a_n = 3n^2 - 10$

b) $b_n = 3n - n^2$

c) $c_n = 10 - 5n + n^2$

d) $d_n = (1 - 2n)^2$

e) $e_n = (4 - n)^3$

f) $f_n = 1 - (n + 2)^2$

a) $a_{10} = 290;\ a_{100} = 29\,990;\ a_{1\,000} = 2\,999\,990$

$\text{lím } a_n = +\infty$

b) $b_{10} = -70;\ b_{100} = -9\,700;\ b_{1\,000} = -997\,000$

$\text{lím } b_n = -\infty$

c) $c_{10} = 60;\ c_{100} = 9\,510;\ c_{1\,000} = 995\,010$

$\text{lím } c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 361;\ d_{100} = 39\,601;\ d_{1\,000} = 3\,996\,001$

$\text{lím } d_n = +\infty$

e) $e_{10} = -216;\ e_{100} = -884\,736;\ e_{1\,000} = -988\,047\,936$

$\text{lím } e_n = -\infty$

f) $f_{10} = -143;\ f_{100} = -10\,403;\ f_{1\,000} = -1\,004\,003$

$\text{lím } f_n = -\infty$

17 **Estuda o comportamento das seguintes sucesións para termos moi avanzados e indica cal é o límite de cada unha delas:**

a) $a_n = \frac{1}{3n}$ **b)** $b_n = \frac{5}{3n+2}$

c) $c_n = \frac{3}{n+1}$ **d)** $d_n = \frac{3n}{n^2+1}$

e) $e_n = \frac{1}{n^2}$ **f)** $f_n = \frac{-100}{n^2}$

g) $g_n = (-1)^n$ **h)** $h_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

a) $a_{10} = 0,0\widehat{3}$; $a_{100} = 0,00\widehat{3}$; $a_{1\,000} = 0,000\widehat{3}$

$\text{lím } a_n = 0$

b) $b_{10} = 0,15625$; $b_{100} = 0,01656$; $b_{1\,000} = 0,00167$

$\text{lím } b_n = 0$

c) $c_{10} = 0,\widehat{27}$; $c_{100} = 0,\widehat{0297}$; $c_{1\,000} = 0,\widehat{002997}$

$\text{lím } c_n = 0$

d) $d_{10} = 0,297$; $d_{100} = 0,029997$; $d_{1\,000} = 0,002999997$

$\text{lím } d_n = 0$

e) $e_{10} = 0,01$; $e_{100} = 0,0001$; $e_{1\,000} = 0,000001$

$\text{lím } e_n = 0$

f) $f_{10} = -1$; $f_{100} = -0,01$; $f_{1\,000} = -0,0001$

$\text{lím } f_n = 0$

g) $g_{10} = 1$; $g_{101} = -1$; $g_{1\,000} = 1$; $g_{10\,001} = -1$

La sucesión no tiene límite.

h) $h_{10} = 0,0909$; $h_{100} = 0,0099$; $h_{1\,000} = 0,000999$; $h_{1\,001} = -0,000999$

$\text{lím } h_n = 0$

PARA RESOLVER

18 **Calcula o 15.° termo na seguinte progresión:**

3; 2,7; 2,4; 2,1; …

Es una progresión aritmética con $a_1 = 3$ y $d = -0,3$.

Por tanto, $a_{15} = a_1 + 14d = 3 - 0,3 \cdot 14 = 3 - 4,2 = -1,2$.

19 **Indica o cuarto termo dunha progresión aritmética na que $d = 3$ e $a_{20} = 100$.**

$a_{20} = a_4 + 16d \;\rightarrow\; a_4 = a_{20} - 16d = 100 - 16 \cdot 3 = 52$

20 **Calcula a suma de todos os números impares de tres cifras.**

Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

21 **Canto vale a suma dos 100 primeiros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35\,350$$

22 **Nunha progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_n = 34$ e $S_n = 133$. Calcula n e a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \;\rightarrow\; 34 = a_1 + (n-1) \cdot 3 \\ S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot n}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3n - 3 \;\rightarrow\; a_1 = 37 - 3n$

$$133 = \frac{(37 - 3n + 34) \cdot n}{2} \;\rightarrow\; 266 = (71 - 3n)n$$

$266 = 71n - 3n^2 \;\rightarrow\; 3n^2 - 71n + 266 = 0$

$$n = \frac{71 \pm \sqrt{5\,041 - 3\,192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1\,849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} n = 14/3 \text{ (no vale)} \\ n = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\rightarrow\; a_1 = -20$

23 **Os lados dun hexágono están en progresión aritmética. Calcúlaos sabendo que o maior mide 13 cm e que o perímetro vale 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} a_6 = a_1 + 5d \;\rightarrow\; 13 = a_1 + 5d \;\rightarrow\; a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \dfrac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \;\rightarrow\; 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \;\rightarrow\; 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{array}\right.$$

$$48 = 78 - 15d \;\rightarrow\; 15d = 30 \;\rightarrow\; d = \frac{30}{15} = 2 \;\rightarrow\; d = 2$$

$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \;\rightarrow\; a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

24 **Nun cine, a segunda fila de butacas está a 10 m da pantalla e a sétima fila está a 16 m. En que fila debe sentar unha persoa que lle guste ver a pantalla a unha distancia de 28 m?**

$a_7 = 16 \quad \to \quad a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \quad \to \quad d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 8{,}8 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 28 \quad \to \quad 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28$$

$$1{,}2n = 20{,}4 \quad \to \quad n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

25 **Escribe os termos intermedios dunha progresión aritmética se sabes que $a_1 = -3$ e $a_{10} = 18$.**

$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 9d = 18 \quad \to \quad d = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$

Los términos son: $a_1 = -3$, $a_2 = -\frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{5}{3}$, $a_4 = 4$, $a_5 = \frac{19}{3}$, $a_6 = \frac{26}{3}$, $a_7 = 11$, $a_8 = \frac{40}{3}$, $a_9 = \frac{47}{3}$, $a_{10} = 18$.

26 **Indica os dous termos centrais dunha progresión aritmética de 8 termos se sabes que $S_8 = 100$ e que $a_1 + 2a_8 = 48$.**

Tenemos que calcular a_4 y a_5. Sabemos que:

$$\begin{cases} S_8 = \dfrac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = (a_1 + a_8) \cdot 4 = 100 \quad \to \quad a_1 + a_8 = 25 \\ a_1 + 2a_8 = 48 \end{cases}$$

Restando a la 2.ª ecuación la 1.ª, queda:

$$a_8 = 23 \quad \to \quad a_1 = 25 - a_8 = 25 - 23 = 2 \quad \to \quad a_1 = 2$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 2 + 7d = 23 \quad \to \quad d = 3$$

Por tanto:

$$\left.\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 2 + 9 = 11 \\ a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14 \end{cases}\right\} \quad \begin{matrix} a_4 = 11 \\ a_5 = 14 \end{matrix}$$

27 **Nunha progresión xeométrica, $a_1 = 8$ e $a_3 = 0{,}5$. Calcula a_5 e a expresión de a_n.**

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8r^2 = 0{,}5 \quad \to \quad r^2 = 0{,}0625 \quad \to \quad r = \pm\, 0{,}25 = \pm\, \frac{1}{4}$

1.° caso: $r = 0,25 = \frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{32} = 0,03125$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2^3}{2^{2n-2}} = \frac{1}{2^{2n-5}}$$

2.° caso: $r = -0,25 = -\frac{1}{4}$

$$a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{1}{32} = 0,03125$$

$$a_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

28 **Nunha progresión xeométrica de razón $r = 3$ coñecemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 e a_4.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} =$$

$$= 364a_1 = 1\,456 \;\rightarrow\; a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

29 **A maquinaria dunha fábrica perde cada ano un 20% do seu valor. Se custou 4 millóns de euros, en canto se valorará despois de 10 anos de funcionamento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\rightarrow$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0,8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\rightarrow$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0,8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\rightarrow$ $(4 \cdot 10^6) \cdot 0,8^{10} \approx 429\,496,73$ €

30 **O 1 de xaneiro depositamos 5 000 € nunha conta bancaria a un xuro anual do 6% con pago mensual de xuros. Cal será o valor do noso diñeiro un ano despois?**

☛ ***Un 6% anual corresponde a $\frac{6}{12}$ = 0,5% mensual. Cada mes o diñeiro multiplícase por 1,005.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1,005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1,005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\rightarrow$ $5\,000 \cdot 1,005^{12} \approx 5\,308,39$ €

Páxina 66

31 **A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica é igual a 4 e $a_2 = 1$. Calcula a_1 e a razón.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \;\rightarrow\; a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{1/r}{1-r} = \dfrac{1}{r-r^2} = 4 \;\rightarrow\; 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \;\rightarrow\; r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; r = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; a_1 = 2$$

32 **Comproba, e dálle a n valores grandes, que as seguintes sucesións tenden a un número e di cal é ese número:**

a) $a_n = \dfrac{5n-3}{2n+1}$ **b)** $b_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+1}$

c) $c_n = 1 + \dfrac{1}{2^n}$ **d)** $d_n = \dfrac{2n^2-5}{n^3}$

a) $a_{10} = 2{,}238$; $a_{100} = 2{,}473$; $a_{1\,000} = 2{,}497$

$\quad \text{lím } a_n = 2{,}5 = \dfrac{5}{2}$

b) $b_{10} = -1{,}970$; $b_{100} = -1{,}9997$; $b_{1\,000} = -1{,}999997$

$\quad \text{lím } b_n = -2$

c) $c_{10} = 1{,}000977$; $c_{20} = 1{,}000000954$

$\quad \text{lím } c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}195$; $d_{100} = 0{,}019995$; $d_{1\,000} = 0{,}001999995$

$\quad \text{lím } d_n = 0$

33 **Calcula o límite das seguintes sucesións:**

a) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **b)** $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

c) $c_n = \dfrac{3n+1}{\sqrt{n}}$ **d)** $d_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+2}}$

e) $e_n = \dfrac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ **f)** $f_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{10} = 0{,}7864$; $a_{100} = 0{,}9798$; $a_{1\,000} = 0{,}9980$

$\quad \text{lím } a_n = 1$

b) $b_{10} = 0,5025$; $b_{100} = 0,500025$; $b_{1\,000} = 0,50000025$

$lím\ b_n = 0,5 = \frac{1}{2}$

c) $c_{10} = 9,80$; $c_{100} = 30,1$; $c_{1\,000} = 94,90$

$lím\ c_n = +\infty$

d) $d_{10} = 1,756$; $d_{100} = 1,973$; $d_{1\,000} = 1,997$

$lím\ d_n = 2$

e) $e_{10} = 20,797$; $e_{100} = 107,278$; $e_{1\,000} = 1\,007,027$

$lím\ e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 0,760$; $f_{100} = 0,909$; $f_{1\,000} = 0,969$

$lím\ f_n = 1$

34 Comproba se teñen límite as seguintes sucesións:

a) $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$

b) $b_n = 1 + (-1)^n$

c) $c_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$

d) $d_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$

a) $a_{100} = 2,01$; $a_{101} = -2,0099$; $a_{1\,000} = 2,001$; $a_{1\,001} = -2,000999$

Los términos pares tienden a 2 y los impares a –2.

a_n no tiene límite.

b) $b_1 = 0$; $b_2 = 2$; $b_3 = 0$; $b_4 = 2$, …

Los términos impares son 0 y los pares son 2.

b_n no tiene límite.

c) $c_1 = 0$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0$; $c_4 = 0,5$; …; $c_{100} = 0,02$

Los términos impares son cero y los pares tienden a cero.

$lím\ c_n = 0$.

d) $d_1 = 0$; $d_2 = 1,5$; $d_3 = 0,67$; $d_4 = 1,25$; …; $d_{100} = 1,01$; $d_{101} = 0,99$

$lím\ d_n = 1$.

35 **Dadas as sucesións $a_n = n^2$ e $b_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, estuda o límite de:**

a) $a_n + b_n$ **b)** $a_n \cdot b_n$ **c)** $\dfrac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n^2 + \dfrac{1}{n^2+1}$

$A_{10} = 100{,}0099;\ A_{100} = 10\,000{,}0001$

$\text{lím}\,(a_n + b_n) = +\infty$

b) $B_n = a_n \cdot b_n = n^2 \cdot \dfrac{1}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

$B_{10} = 0{,}9901;\ B_{100} = 0{,}9999$

$\text{lím}\,(a_n \cdot b_n) = 1$

c) $C_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2}{1(n^2+1)} = n^2(n^2+1) = n^4 + n^2$

$C_{10} = 10\,100;\ C_{100} = 100\,010\,000$

$\text{lím}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$

36 **Durante 5 anos depositamos nun banco 2 000 € ao 4% con pago anual de xuros.**

a) En canto se converte cada depósito ao final do quinto ano?

b) Que cantidade de diñeiro acumulamos durante eses 5 anos?

a) Al final del 5.º año:

– Los primeros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^5$ € ≈ 2 433,31 €

– Los segundos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^4$ € ≈ 2 339,72 €

– Los terceros 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^3$ € ≈ 2 249,73 €

– Los cuartos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04^2$ € = 2 163,2 €

– Los quintos 2 000 € se convierten en $2\,000 \cdot 1{,}04$ € = 2 080 €

b) Sumamos las cantidades anteriores:

$2\,000 \cdot 1{,}04^5 + 2\,000 \cdot 1{,}04^4 + 2\,000 \cdot 1{,}04^3 + 2\,000 \cdot 1{,}04^2 + 2\,000 \cdot 1{,}04 =$

$= 2\,000(1{,}04^5 + 1{,}04^4 + 1{,}04^3 + 1{,}04^2 + 1{,}04) \overset{(*)}{=}$

$= 2\,000 \cdot \dfrac{1{,}04^6 - 1{,}04}{1{,}04 - 1} = 11\,265{,}95$ €

(*) Suma de una progresión geométrica con $a_1 = 1{,}04$ y $r = 1{,}04$.

37 **Recibimos un préstamo de 2 000 € ao 10% de xuro anual e temos que devolvelo en 4 anos, pagando cada ano os xuros da parte adebedada máis a cuarta parte do capital prestado. Calcula o que temos que pagar cada ano.**

$a_1 = 500 + 2\,000 \cdot 0{,}1 = 700$ €

$a_2 = 500 + 1\,500 \cdot 0{,}1 = 650$ €

$a_3 = 500 + 1\,000 \cdot 0{,}1 = 600$ €

$a_4 = 500 + 500 \cdot 0{,}1 = 550$ €

38 **Calcula o termo xeral da sucesión: 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$, … e estuda o seu límite.**

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2$; $a_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$; $a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$; …; $a_{10} \approx 1{,}0718$

$a_{100} \approx 1{,}00696$; $\text{lím } a_n = 1$

39 **Dadas as sucesións $a_n = n + 3$ e $b_n = 2 - n$, calcula os seguintes límites:**

a) $\text{lím } (a_n + b_n)$

b) $\text{lím } (a_n - b_n)$

c) $\text{lím } (a_n \cdot b_n)$

d) $\text{lím } \dfrac{a_n}{b_n}$

a) $A_n = a_n + b_n = n + 3 + 2 - n = 5$

$\text{lím } (a_n + b_n) = 5$

b) $B_n = a_n - b_n = n + 3 - (2 - n) = n + 3 - 2 + n = 2n + 1$

$B_{10} = 21$; $B_{100} = 201$; $B_{1\,000} = 2\,001$

$\text{lím } (a_n - b_n) = +\infty$

c) $C_n = a_n \cdot b_n = (n + 3)\,(2 - n) = 2n - n^2 + 6 - 3n = -n^2 - n + 6$

$C_{10} = -104$; $C_{100} = -10\,094$; $C_{1\,000} = -1\,000\,994$

$\text{lím } (a_n \cdot b_n) = -\infty$

d) $D_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n + 3}{2 - n}$

$D_{10} = -1{,}625$; $D_{100} = -1{,}051$; $D_{1\,000} = -1{,}005$

$\text{lím } \dfrac{a_n}{b_n} = -1$

40 **A sucesión $x^2 - x + 1$; $x^2 + 1$; $x^2 + x + 1$, é unha progresión aritmética?**

Se o fose, calcula o quinto termo e a suma dos cinco primeiros termos.

Llamamos $a_1 = x^2 - x + 1$; $a_2 = x^2 + 1$; $a_3 = x^2 + x + 1$.

Veamos si la diferencia entre cada dos términos consecutivos es la misma:

$$a_2 - a_1 = x^2 + 1 - (x^2 - x + 1) = x^2 + 1 - x^2 + x - 1 = x$$

$$a_3 - a_2 = x^2 + x + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + x + 1 - x^2 - 1 = x$$

Por tanto, sí es una progresión aritmética con $a_1 = x^2 - x + 1$ y diferencia $d = x$.

Así, tenemos que:

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d = x^2 - x + 1 + 4x = x^2 + 3x + 1$$

$$S_5 = \frac{(a_1 + a_5) \cdot 5}{2} = \frac{(x^2 - x + 1 + x^2 + 3x + 1) \cdot 5}{2} = \frac{(2x^2 + 2x + 2) \cdot 5}{2}$$

$$= (x^2 + x + 1) \cdot 5 = 5x^2 + 5x + 5$$

41 **Calcula a seguinte suma:**

$$\mathbf{11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \ldots + 33^3}$$

Llmamos $S = 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 32^3 + 33^3 = \frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + 16^3) = 8 \cdot \frac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$$

Por tanto:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$$

$$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$$

CUESTIÓNS TEÓRICAS

42 **Sexa a_n unha progresión aritmética con $d > 0$. Cal é o seu límite?**

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $\textit{lím}\ a_n = +\infty$.

43 **Se a_n é unha progresión xeométrica con $r = \frac{1}{3}$, cal é o seu límite?**

Al ir multiplicando por $\frac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir, $\textit{lím}\ a_n = 0$.

44 **A sucesión $3, 3, 3, 3, \ldots$ pode considerarse unha progresión aritmética e tamén xeométrica. Cal é a diferenza no primeiro caso? E a razón no segundo?**

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

45 **Nunha progresión xeométrica calquera, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots,$ comproba que:**

$$\boldsymbol{a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4}$$

Verifícase tamén $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia unha propiedade que exprese os resultados anteriores.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{ Son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array}\right\} \text{ Son iguales}$$

Propiedad: Si a_n es una progresión geométrica, se verifica que $a_p \cdot a_q = a_m \cdot a_n$ siempre que $p + q = m + n$.

46 **O número $3,\widehat{9}$ podemos consideralo como a suma dos infinitos termos da sucesión:**

$$\boldsymbol{3, \frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \ldots}$$

Calcula a suma e indica o seu límite. Paréceche razoable o resultado obtido?

$$3 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \ldots = 3 + 0{,}9 + 0{,}99 + 0{,}999 + \ldots = 3{,}\widehat{9}$$

Si consideramos la progresión geométrica $\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1\,000}, \ldots$ y sumamos todos sus términos, queda:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Por tanto: $3 + \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \ldots\right) = 3 + 1 = 4$

47 **Inventa dúas sucesións cuxo límite sexa infinito e que, ao dividilas, a sucesión que resulte tenda a 2.**

Por ejemplo: $a_n = 2n$; $b_n = n + 1$

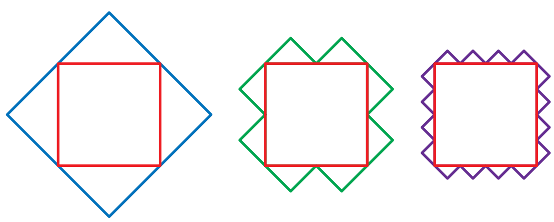
$$lím\ a_n = +\infty;\ lím\ b_n = +\infty$$

$$lím\ \frac{a_n}{b_n} = lím\ \frac{2n}{n+1} = 2$$

Páxina 67

PARA AFONDAR

48 **Debuxa un cadrado de lado $\sqrt{2}$ cm e sobre cada lado un triángulo rectángulo isóscele; despois dous, despois catro, como indican as figuras:**

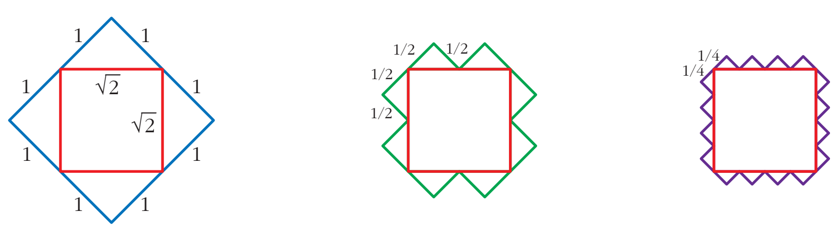


a) Forma a sucesión dos perímetros das figuras obtidas.

Cal é o seu límite?

b) Forma tamén a sucesión das áreas. Cal é o seu límite?

1.° paso: **2.° paso:** **3.° paso:**



Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 2 = 4 cm²

Perímetro = 8 cm

Área = 2 + 1 = 3 cm²

Perímetro = 8 cm

Área $= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ cm²

… **Paso *n*-ésimo:** $\begin{cases} \text{Perímetro} = 8 \text{ cm} \\ \text{Área} = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{cm}^2 \end{cases}$

a) 8, 8, 8, 8, …; $P_n = 8$; $\lim P_n = 8$

b) 4, 3, $\frac{5}{2}$, …; $A_n = 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\lim A_n = 2$

(que es el área del cuadrado de lado $\sqrt{2}$).

49 **Os termos da sucesión 1, 3, 6, 10, 15 chámanse números triangulares porque se poden representar así:**

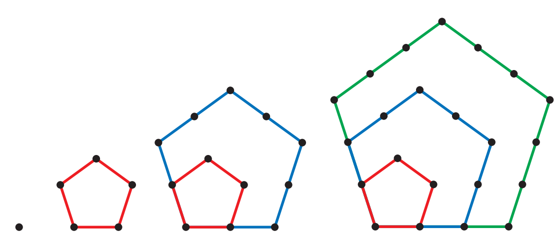
Calcula a_{10} e a_n.

$a_1 = 1$; $a_2 = 1 + 2 = 3$; $a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$; $a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;

$$a_{10} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{(1 + 10) \cdot 10}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}$$

50 **Os termos da sucesión 1, 5, 12, 22, 35 chámanse números pentagonais porque se poden representar así:**



Calcula a_6, a_{10} e a_n.

☛ ***Eses números pódense escribir así:***

1; 1 + 4; 1 + 4 + 7; 1 + 4 + 7 + 10; 1 + 4 + 7 + 10 + 13

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1 + 4 = 5;\ a_3 = 1 + 4 + 7 = 12;\ a_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

Observamos que vamos obteniendo las sumas de los términos de una progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 3$. En el paso n-ésimo tendremos:

$$a_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + (1 + (n - 1) \cdot 3) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) =$$

$$= \frac{(1 + (3n - 2)) \cdot n}{2} = \frac{(1 + 3n - 2) \cdot n}{2} = \frac{(3n - 1) \cdot n}{2}$$

Por tanto:

$$a_6 = \frac{17 \cdot 6}{2} = 17 \cdot 3 = 51;\ a_{10} = \frac{29 \cdot 10}{2} = 145$$

51 **Utiliza as propiedades das progresións para simplificar a expresión do termo xeral e calcular o límite das seguintes sucesións:**

a) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$

b) $b_n = 2n\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \ldots + \frac{n}{n^3}\right)$

a) $a_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{(1+n) \cdot n}{2}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{n + n^2}{2}\right) = \frac{n^2 + n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $\text{lím } a_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

b) $b_n = \frac{2n}{n^3}(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{2n}{n^3}\left(\frac{(1+n) \cdot n}{2}\right) = \frac{2n}{n^3} \cdot \left(\frac{n + n^2}{2}\right) = \frac{2n^2 + 2n^3}{2n^3} =$

$$= \frac{2n^3 + 2n^2}{2n^2} = \frac{2n^2(n+1)}{2n^2} = n + 1$$

$b_{10} = 11$; $b_{100} = 101$; $b_{1\,000} = 1\,001$; $\text{lím } b_n = +\infty$

AUTOAVALIACIÓN

1. Determina o termo a_{47} da sucesión cuxo termo xeral é:

$$a_n = \frac{n^2 - 709}{n + 3}$$

$a_{47} = \frac{47^2 - 709}{47 + 3} = \frac{2\,209 - 709}{50} = 30$

2. Indica o termo oitavo da sucesión definida así:

$$a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$$

$a_8 = 2a_6 - a_7$

$a_1 = 4$	$a_2 = 7$
$a_3 = 2a_1 - a_2 = 1$	$a_4 = 2a_2 - a_3 = 13$
$a_5 = 2a_3 - a_4 = -11$	$a_6 = 2a_4 - a_5 = 37$
$a_7 = 2a_5 - a_6 = -59$	$a_8 = 2a_6 - a_7 = 133$

3. **Indica o termo xeral das sucesións:**

a) **3, 7, 11, 15, 19, 23, …**

b) **1, 2, 5, 10, 17, 26, …**

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$ y primer término $a_1 = 3$.

$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) El término general de la sucesión 0, 1, 4, 9, 16, 25, … es $a_n = (n-1)^2$.

Por tanto, 1, 2, 5, 10, 17, 26, … tiene por término general $a_n = (n-1)^2 + 1 =$ $= n^2 - 2n + 2$.

4. **Indica a lei de recorrencia pola que se forman as seguintes sucesións:**

a) **7, 8, 15, 23, 38, 61, …**

b) **1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …**

c) **0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …**

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

5. **Calcula as seguintes sumas:**

a) $\mathbf{3 + 7 + 11 + \ldots + 43}$

b) $\mathbf{1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}1 + 1\,000 \cdot 1{,}1^2 + \ldots + 1\,000 \cdot 1{,}1^{15}}$

c) $\mathbf{80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \ldots}$

d) $\mathbf{101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2}$

e) $\mathbf{3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3}$

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1{,}1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \to S_{15} = \frac{1\,000 \cdot 1{,}1^{15} - 1\,000}{1{,}1 - 1} = 31\,772{,}48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{80}{1-1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) =$$

$$= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5\,546\,940 - 2\,030\,100}{6} = 586\,140$$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14\,391$$

6. Nunha progresión aritmética coñecemos $a_{15} = 43$ e $a_{86} = 85{,}6$.

a) Calcula $a_1 + a_{100}$.

b) Obtén o valor de a_{220}.

$$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85{,}6 \end{array}\right\} \to 85d - 14d = 42{,}6 \to d = 0{,}6$$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$

a) $a_1 + a_{100} = a_{15} + a_{86} = 43 + 85{,}6 = 128{,}6$ pues $1 + 100 = 15 + 86$

(a_{15} y a_{86} "equidistan" de a_1 y a_{100}).

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

7. Calcula os límites das seguintes sucesións:

$$a_n = \frac{5}{n} \qquad b_n = \frac{5+3n}{n+1} \qquad c_n = \frac{n^2+1}{5n}$$

a) $a_{10} = 0{,}5$ $\quad a_{100} = 0{,}05$ $\quad a_{1\,000} = 0{,}005 \to \lim \dfrac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3{,}18$ $\quad b_{100} = 3{,}02$ $\quad b_{1\,000} = 3{,}002 \to \lim \dfrac{5+3n}{n+1} = 3$

c) $c_{10} = 2{,}02$ $\quad c_{100} = 20{,}002$ $\quad c_{1\,000} = 200{,}0002 \to \lim \dfrac{n^2+1}{5n} = +\infty$