Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. 3º ESO

Probabilidad

CPI da Cañiza. Departamento de Matemáticas

curso 2017-2018

Experimento Aleatorio

Definición:

Una experiencia o experimento aleatorio es aquel que cumple las siguientes condiciones:

- El conjunto de posibles resultados es conocido.
- El resultado que se obtendrá no puede predecirse con anterioridad a la realización del experimento.
- Repetido bajo idénticas condiciones iniciales, pueden obtenerse resultados diferentes.

Ejemplos:

Lanzar una moneda, lanzar dos dados y sumar la puntuación de las caras, extraer una bola de un bombo, pedirle a alguien que diga un número entre 1 y 100

Experimento Determinista

Definción:

Un experimento que repetido bajo idénticas condiciones produce siempre el mismo resultado se llama determinista.

Ejemplo:

Dejar caer una piedra desde 4 m de altura, y medir el tiempo que tarda en llegar al suelo.

Espacio Muestral

Definición:

El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
Suele representarse con la letra E, o con la letra griega Ω.

Ejemplo:

Si consideramos el experimento "Lanzar un dado",
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sucesos

Definición:

Un suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral.
Como cualquier conjunto, los sucesos se designan utilizando letras mayúsculas.

Ejemplo:

En el experimento consistente en lanzar un dado, un suceso podría ser "Obtener un número par".
Sería por ejemplo $B = \{2, 4, 6\}$

Tipos de sucesos (I)

Suceso Elemental y Suceso Compuesto

- Suceso elemental: es un subconjunto formado por un único elemento, o un suceso formado por un único resultado.
- Suceso compuesto: es un subconjunto formado por más de un elemento, o un suceso formado por varios resultados elementales.

Ejemplos:

- El suceso "sacar un 2", que con notación conjuntista sería $A = \{2\}$, es un suceso elemental.
- El suceso $B = \{2, 4, 6\}$ ("sacar un número par), es un suceso compuesto.

Tipos de sucesos (II)

Suceso Imposible y Suceso Seguro

- Suceso imposible: es un suceso que no puede obtenerse en ningún caso como resultado del experimento. Se representa con el símbolo $\emptyset$.
- Suceso seguro: es un suceso que siempre se va a producir, es decir, es el suceso compuesto formado por todos los elementos del espacio muestral, (o todo el espacio muestral).
  Suele representarse por E.

Ejemplos:

- Un suceso imposible es "sacar un siete".
- Un suceso seguro es "sacar un número mayor o igual que 1".

Verificación de un suceso

Definición:

Decimos que un suceso se verifica cuando el resultado del experimento es alguno de sus elementos.

Ejemplo:

Si al lanzar el dado obtenemos un 2, se verifican el suceso A y el suceso B, y si obtenemos un 4, se verifica el suceso B.

Operaciones con sucesos

Puesto que los sucesos son subconjuntos, pueden realizarse con ellos las mismas operaciones que con los conjuntos.

Ejemplo:

Continuando con el ejemplo del experimento consitente en lanzar un dado, consideremos los sucesos siguientes:

- $A = \{2\}$ ("sacar un 2")
- $B = \{2, 4, 6\}$ ("sacar un número par")
- $C = \{1, 3, 5\}$ ("sacar un número impar")
- $D = \{4, 5, 6\}$ ("sacar un número mayor que 4", o "sacar al menos un 4")
- $F = \{3, 4\}$ ("sacar un 3 o un 4")

Unión de sucesos

Definición:

- Dados dos sucesos A y B, se llama suceso unión, $A \cup B$, al formado por todos los elementos que o bien pertenecen a A, o bien pertenecen a B.
- Decimos que se verifica el suceso $A \cup B$ cuando se verifica A o B.

Ejemplo:

Dado que A está contenido en B ($A \subset B$), obviamente $A \cup B = \{2, 4, 6\}$, o equivalentemente, $A \cup B = B$.

Otros ejemplos:

- $B \cup C = E$ (es decir, el suceso sacar un número par o un número impar coincide con el suceso seguro).
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$ (podría describirse como el suceso "sacar un dos o un número par").
- $A \cup F = \{2, 3, 4\}$ (podría describirse como el suceso sacar un número mayor o igual que 2 y menor o igual que 4).

Intersección de sucesos

Definición:

- Dados dos sucesos A y B, se llama suceso intersección, $A \cap B$, al formado por los elementos que pertenecen a A y a B.
- Decimos que se verifica el suceso $A \cap B$ cuando se verifican simultáneamente A y B.

Cuando $A \cap B = \emptyset$, se dice que A y B son sucesos incompatibles (ya que no pueden suceder simultáneamente).

Ejemplos:

En nuestro caso, dado que $A \subset B$, obviamente $A \cap B = \{2\}$.
Otros ejemplos serían:

- $B \cap C = \emptyset$ (es imposible obtener al mismo tiempo un número par y un número impar).
- $F \cap D = \{3\}$.
- $\Omega \cap D = \{4, 6\}$ (podría describirse como el suceso "sacar un cuatro o un número seis", o "sacar un número par mayor que 2").
- $C \cap D = \{5\}$ (podría describirse como el suceso sacar un número impar mayor que 3").

Diagramas de Venn de la unión y la intersección

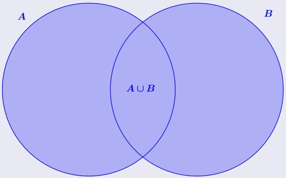

Figura: Unión de sucesos

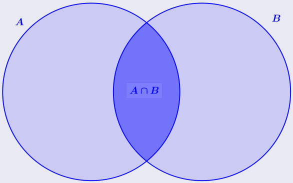

Figura: Intersección de sucesos

Diferencia de sucesos

Definción:

- Dados dos sucesos A y B, se llama suceso diferencia, $B \setminus A$, al formado por los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A.
- Decimos que se verifica el suceso $B \setminus A$ cuando se verifica B y no se verifica A.

Ejemplo:

En nuestro caso, obviamente $B \setminus A = \{4, 6\}$.

Suceso Contrario

Definción:

- Dado un suceso A, se llama suceso contrario, $\overline{A}$, al suceso que se verifica cuando no se verifica A, es decir, al formado por todos los elementos de Ω que no pertenecen a A.
- Esto también podemos expresarlo como $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Es evidente que $B \setminus A = B \cap \overline{A}$

Ejemplo:

En nuestro caso, el suceso contrario a A sería "no sacar un 2", es decir $\overline{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Diagramas de Venn de la diferencia de sucesos

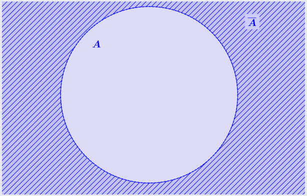

Figura: Suceso contrario

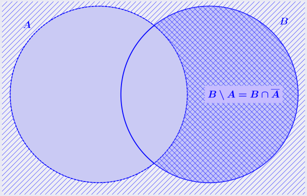

Figura: Diferencia de sucesos

Leyes de Morgan

Se utilizan para facilitar la obtención del resultado de operaciones con sucesos:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  Es decir, si no se obtiene como resultado del experimento un algún elemento de A o de B, es porque no se produjo ningún resultado que sea elemento de A, ni tampoco ningún resultado que sean elemento de B. O equivalentemente, si no se verifica A ni se verifica B, no se verifica el suceso "A o B".
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  Es decir, si no se obtiene como resultado del experimento ningún elemento que pertenezca a la vez a A y a B, es porque o no se verifica A, o no se verifica B.

Definición frecuentista de la probabilidad

Ley de los Grandes Números

La "Ley de los grandes números" afirma que cuando el número de repeticiones de un experimento aleatorio es suficientemente elevado, las frecuencias relativas de aparición de los sucesos tienden a estabilizarse en torno a una cantidad concreta.

Definición:

Se llama probabilidad de un suceso a la cantidad a la que tiende a estabilizarse la frecuencia relativa de sus apariciones cuando el número de repeticiones del experimento es suficientemente elevado.

Propiedades de la probabilidad

Puesto que una probabilidad es un límite de frecuencias relativas, la probabilidad tiene las mismas propiedades que las frecuencias relativas.
En lo sucesivo, la probabilidad de un suceso A se denotará por $\mathcal{P}(A)$.

Axiomas de la probabilidad

I) $\mathcal{P}(A) \geq 0$ para cualquier suceso A del espacio muestral.

II) $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ (el suceso seguro tiene probabilidad 1).

III) Si se tiene una sucesión de sucesos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, incompatibles dos a dos, entonces $\mathcal{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{P}(A_n)$

Como consecuencia de los anteriores axiomas:

Propiedades de la probabilidad

- $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ (la probabilidad del suceso imposible es cero).
- $\mathcal{P}(\overline{A}) = 1 - \mathcal{P}(A)$ (las probabilidades de un suceso y su contrario siempre suman 1).
- $\mathcal{P}(A) \leq 1$ para cualquier suceso A del espacio muestral.
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$ para cualquier pareja de sucesos A y B.
  Esta propiedad es una generalización del axioma III, y además puede extenderse el resultado para más de dos sucesos. Por ejemplo: $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_3) - \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) + \mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$
- Si $A \subset B$, entonces $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$.

Asignación de probabilidades

Por medio de las propiedades de la probabilidad pueden resolverse muchas cuestiones relativas al cálculo de probabilidades, pero el primer problema que surge siempre es la determinación de la probabilidad de los sucesos elementales.
Resulta obvio que no es operativo repetir durante mucho tiempo un experimento, para ver cuál es el comportamiento de las frecuencias relativas y poder determinar así las probabilidades de los sucesos elementales.

Equiprobabilidad de sucesos

Si todos los sucesos elementales de un espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrencia, se dice que son equiprobables.

Ley de Laplace

Si todos los sucesos elementales de un espacio muestral son equiprobables, la probabilidad de un suceso A puede calcularse dividiendo el número total de elementos de A entre el número total de sucesos elementales del espacio muestral.
El número total de elementos de A recibe el nombre de "casos favorables" al suceso A, y el número total de sucesos elementales de Ω se llama "casos posibles".
Es decir: $\mathcal{P}(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$